Rheinisch-Westfälische Technische Hochschule Aachen
Institut für Mathematik
Prof. Dr. Heiko von der Mosel
Tobias Hermes, Patrick Overath

Übungen zur Vorlesung
Variationsrechnung I
Serie 9 vom 14.12.2009

Aufgabe 33

Sei $I=(0,1)$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, $\mathscr{G}(v):=\int_I[\varphi(v'(x))+v(x)]\,dx$, wobei

$$\varphi(p):=\begin{cases}(1-p^2)^2 & \text{für } |p|>1,\\ 0 & \text{für } |p|\leq 1,\end{cases}$$

und es gelte $\mathscr{G}(u)=\inf_{\mathscr{C}(\alpha,\beta)}\mathscr{G}(.)$ für

$$u\in\mathscr{C}(\alpha,\beta):=\{v\in W^{1,4}(I): v(0)=\alpha, v(1)=\beta\}.$$

Zeigen Sie:

$$0=\int_I[\varphi'(u'(x))-x]\eta'(x)\,dx \text{ für alle } \eta\in C_0^\infty(I).$$

Hinweis: Berechnen Sie $\delta\mathscr{G}(u,\eta)$.

Aufgabe 34

[Lagrange Multiplikatorregel mit mehreren Nebenbedingungen]

VOR.: Seien $F,G_1,G_2,\dots,G_m\in C^1(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^N)$, mit

$$|F|+|F_z|+|F_p|+\sum_{i=1}^m[|G_i|+|(G_i)_z|+|(G_i)_p|]\leq C(1+|p|^2) \text{ auf } \bar{I}\times\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^N,$$

und $u\in W^{1,2}(I,\mathbb{R}^N)$ erfülle

$$\mathscr{F}(u)=\inf_{\mathscr{C}}\mathscr{F}(.),$$

wobei

$$\mathscr{C}:=\{v\in W^{1,2}(I,\mathbb{R}^N):\mathscr{G}_i(v)=c_i, i=1,\dots,m\},$$

$c_i\in\mathbb{R}$, $\mathscr{G}_i(v):=\int_I G_i(x,v(x),v'(x))\,dx$, $i=1,\dots,m$. Weiterhin gebe es $\psi_1,\dots,\psi_m\in C^\infty(\bar{I},\mathbb{R}^N)$, so dass die $(m\times m)$-Matrix $(\delta\mathscr{G}_i(u,\psi_j))_{ij}$ invertierbar ist.

BEH.: Es gibt $\lambda_1,\dots,\lambda_m\in\mathbb{R}$, so dass

$$\delta\mathscr{F}(u,\varphi)+\sum_{i=1}^m\lambda_i\delta\mathscr{G}_i(u,\varphi)=0 \text{ für alle } \varphi\in C^\infty(\bar{I},\mathbb{R}^N).$$

Definition: Ein Banachraum X heißt *uniform konvex*, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta(\varepsilon) > 0$ gibt, so dass gilt: Für $u, v \in X$ mit $\|u\|_X = \|v\|_X = 1$ und mit $\|u - v\|_X \geq \varepsilon$ gilt $\|u + v\|_X \leq 2(1 - \delta)$. (Gleichbedeutend ist: Aus $\|u_k\|_X = \|v_k\|_X = 1$ und $\|u_k + v_k\|_X \to 2$ folgt $\|u_k - v_k\|_X \to 0$.)

Aufgabe 35

[Normkonvergenz & schwache Konvergenz ⇒ starke Konvergenz]

Sei X ein uniform konvexer Banachraum. Zeigen Sie: Aus $u_k \rightharpoonup u$ in X und $\|u_k\|_X \to \|u\|_X$ folgt $\|u_k - u\|_X \to 0$.

Hinweis: Machen Sie sich klar, dass Sie ohne Einschränkung annehmen dürfen, dass $\|u_k\|_X = \|u\|_X = 1$, und nutzen Sie dann die schwache Unterhalbstetigkeit der Norm (vgl. Aufgabe 25 (ii)).

Aufgabe 36

[Clarkson für $q \in [2, \infty)$]

Die Banachräume $L^q(I)$, $1 < q < \infty$, sind uniform konvex. Zeigen Sie das für $q \in [2, \infty)$.

Hinweis: Beweisen Sie

$$|x + y|^q + |x - y|^q \leq 2^{q-1}(|x|^q + |y|^q) \textit{ für alle } x, y \in \mathbb{R},\ q \geq 2.$$
