Rheinisch-Westfälische Technische Hochschule Aachen
Institut für Mathematik
Prof. Dr. Heiko von der Mosel
Till Knoke

Übungen zur Vorlesung Variationsrechnung I Serie 11 vom 5.1.2012 Abgabedatum: 16.1.2012

Aufgabe 41 Sei $f \in C^1(\mathbb{R}^N)$, $q > 1$, und es gebe $c_0 > 0$, so dass

$$c_0|p|^q \leq f(p) \text{ für alle } p \in \mathbb{R}^N.$$

Zeigen Sie:

(i) $\nabla f(.) : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ surjektiv.

(ii) Falls f zusätzlich konvex ist, dann gilt $|\nabla f(p)| \to \infty$ für $|p| \to \infty$.

Hinweis: Betrachten Sie für Teil (i) zu beliebig vorgegebenem $v \in \mathbb{R}^N$ die Funktion $g_v : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ mit $g_v(x) := f(x) - x \cdot v$. Nutzen Sie für Teil (ii) die wegen der Konvexität gültige Beziehung

$$f(0) \geq f(p) + (0-p)\nabla f(p) \quad \textit{für alle } p \in \mathbb{R}^N.$$

Aufgabe 42

[Gegenbeispiel zur Regularität]

(i) Zeigen Sie, dass die Funktion $u(x) := \frac{7}{12}|x|^{12/7}$ das Funktional

$$\mathscr{F}(v) := \int_{-1}^{1} [\frac{1}{8}|v'(x)|^8 - x^5 v'(x)]\, dx$$

in der Klasse $\mathscr{C} := \{v \in W^{1,8}((-1,1)) : v(-1) = v(1) = \frac{7}{12}\}$ *eindeutig* minimiert. Wie glatt ist diese Lösung und welche Voraussetzung des Regularitätssatzes der Vorlesung, Satz 4.1, ist hier nicht erfüllt?

(ii)* Betrachten Sie dieselbe Fragestellung für den Integranden

$$F(x,z,p) := \frac{1}{8}|p|^8 + 5x^4 z.$$

Hinweis: Man mache sich klar, dass die gegebene Funktion u die Euler-Lagrange-Gleichungen löst, obwohl sie nicht in C^2 ist. Dann ist u auch eine schwache Extremale, und als Testraum kann man statt C_0^∞ auch $W_0^{1,8}$ nehmen. Das zusammen mit der Konvexität des Integranden impliziert, dass u das Funktional auch minimiert, vgl. Aufgabe 13. Der Beweis der Eindeutigkeit eines Minimierers für Teil (i) ist bereits mehrfach in der Vorlesung geführt worden, für Teil (ii) ist das Argument etwas subtiler.

Aufgabe 43

[Stetigkeit linearer Abbildungen]

Sei $l : X \to Y$ eine lineare Abbildung zwischen den linearen normierten Räumen X und Y. Beweisen Sie die Äquivalenz folgender Aussagen.

(i) l ist stetig.

(ii) l ist stetig in einem Punkt $x_0 \in X$.

(iii) Es existiert eine Konstante $L \geq 0$, so dass $\|l(x)\|_Y \leq L\|x\|_X$ für alle $x \in X$.

(iv) Die Operatornorm $\|l\|_{L(X,Y)} := \sup_{\|x\|_X \leq 1} \|l(x)\|_Y$ ist endlich.

Aufgabe 44

[Erweiterung des Testraumes für Variationsungleichungen]

Sei $I = (a,b) \subset \mathbb{R}$ ein endliches Intervall, und $u \in W^{1,p}(I)$, $p \in (1,\infty]$, erfülle die Ungleichung

$$\int_I u'(x)\phi'(x)\,dx \geq 0 \qquad \text{für alle } \phi \in C_0^\infty(I,\mathbb{R}_+),$$

wobei $\mathbb{R}_+ := \{t \in \mathbb{R} : t \geq 0\}$ bezeichnet. Zeigen Sie, dass dieselbe Ungleichung dann auch für alle $\phi \in W_0^{1,q}(I,\mathbb{R}_+)$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ gilt.

Hinweis: Eine Möglichkeit ist, den Träger von ϕ durch Vorschalten geeigneter linearer Transformationen zunächst zu verkleinern, um dann mit einem nichtnegativen Faltungskern zu falten.
