Rheinisch-Westfälische Technische Hochschule Aachen
Institut für Mathematik
Prof. Dr. Heiko von der Mosel
Till Knoke

Übungen zur Vorlesung Variationsrechnung I Serie 12 vom 13.1.2012 Abgabedatum: 23.1.2012

Aufgabe 45

[Konkave Funktionen]

Sei I ein endliches Intervall in $\mathbb{R}$ und $u : \bar{I} \to \mathbb{R}$ eine beschränkte konkave Funktion.

(i) Zeigen Sie, dass in *allen* Punkten die einseitigen Ableitungen

$$u'(y^-) := \lim_{z \to y^-} \frac{u(z) - u(y)}{z - y} \quad \text{und} \quad u'(y^+) := \lim_{z \to y^+} \frac{u(z) - u(y)}{z - y}$$

existieren und geordnet sind: $u'(y^-) \geq u'(y^+)$ für alle $y \in I$.

(ii) Beweisen Sie: Falls u zusätzlich differenzierbar ist auf $\bar{I}$, dann ist $u \in C^1(\bar{I})$ und die Ableitungsfunktion u' ist monoton fallend auf $\bar{I}$.

Aufgabe 46

[Konkave Einhüllende und Yosida-Transformation]

(i) Zeigen Sie, dass für eine beschränkte Funktion $\psi : \bar{I} \to \mathbb{R}$ die Funktion

$$\operatorname{conc}(\psi)(x) := \inf\{v(x) : v \text{ konkav}, v \geq \psi \text{ auf } \bar{I}.\}$$

konkav ist. (Man nennt $\operatorname{conc}(\psi)$ die *konkave Einhüllende* von ψ.)

(ii) Zeigen Sie, dass die *Yosida-Transformierten*

$$Y_\lambda \psi(x) := \inf_{y \in \mathbb{R}} \{\psi(y) + \lambda |x - y|\}$$

für beliebige $\lambda > 0$ *subadditiv* sind, falls $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+ := \{t \in \mathbb{R} : t \geq 0\}$ subadditiv ist, d.h. falls $\psi(\xi + \eta) \leq \psi(\xi) + \psi(\eta)$ für alle $\xi, \eta \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 47

[Quadratische Integranden]

Sei $F = F(x,z,p)$ mit $F, F_{p_i} \in C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N)$ für alle $i = 1,\dots,N$, so dass $F(\cdot,\cdot,0)$ und $F_p(\cdot,\cdot,0)$ auf $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$ beschränkt sind, und es gebe Konstanten $\lambda_2 \geq \lambda_1 > 0$, so dass

$$\lambda_1 |\xi|^2 \leq \xi \cdot F_{pp}(x,z,p)\xi \leq \lambda_2 |\xi|^2 \qquad \text{für alle } \ \xi \in \mathbb{R}^N,\, (x,z,p) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N.$$

(i) Zeigen Sie, dass Konstanten $c_1 > 0$, $c_2, c_3, c_4 \geq 0$ existieren, so dass

$$c_1 |p|^2 - c_2 \leq F(x,z,p) \leq c_3 |p|^2 + c_4 \qquad \text{für alle } \ (x,z,p) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N.$$

(ii) Falls zusätzlich $F(x,z,0) = 0$ und $F_p(x,z,0) = 0$, dann gilt sogar

$$\frac{\lambda_1}{2} |p|^2 \leq F(x,z,p) \leq \frac{\lambda_2}{2} |p|^2 \ \text{für alle } \ (x,z,p) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N.$$

(iii) Zeigen Sie für $\Phi(x,z,p) := p \cdot F_p(x,z,p) - F(x,z,p)$, dass

$$\frac{\lambda_1}{2} |p|^2 \leq \Phi(x,z,p) + F(x,z,0) \leq \frac{\lambda_2}{2} |p|^2 \qquad \text{für alle } \ (x,z,p) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N.$$

Aufgabe 48

[Hindernisproblem für quadratische Integranden]

Sei $F = F(z,p)$ mit $F, F_{p_i} \in C^1(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N)$ für alle $i = 1,\dots,N$, so dass $F(\cdot,0) = 0$ und $F_p(\cdot,0)$ beschränkt auf $\mathbb{R}^N$. Weiterhin gebe es Konstanten $\lambda_2 \geq \lambda_1 > 0$, so dass

$$\lambda_1 |\xi|^2 \leq \xi \cdot F_{pp}(z,p)\xi \leq \lambda_2 |\xi|^2 \qquad \text{für alle } \ \xi \in \mathbb{R}^N,\, (z,p) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N.$$

Weiterhin sei $I = (a,b) \subset \mathbb{R}$ ein beschränktes Intervall und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^N$ seien gegebene konstante Vektoren, sowie $K \subset \mathbb{R}^N$ eine abgeschlossene Menge.

(i) Zeigen Sie die Existenz einer Funktion $u \in \mathscr{C}(\alpha,\beta,K)$ mit

$$\int_I F(u(x), u'(x))\, dx =: \mathscr{F}(u) = \inf_{\mathscr{C}(\alpha,\beta,K)} \mathscr{F}(\cdot),$$

wobei die Klasse

$$\mathscr{C}(\alpha,\beta,K) := \{v \in W^{1,2}(I,\mathbb{R}^N) : v(a) = \alpha,\, v(b) = \beta, v(\bar{I}) \subset K\}$$

als nichtleer angenommen wird.

(ii) Zeigen Sie, dass die Lösung u aus Teil (i) LIPSCHITZstetig auf $\bar{I}$ ist.

Hinweis: Benutzen Sie die Ergebnisse aus Aufgabe 47. Bedenken Sie für Teil (ii), dass Sie hier ohne weitere Informationen über die Lösung keine *äußeren Variationen zur Verfügung haben, also keine Euler-Lagrange Gleichung herleiten können, da solche Variationen die Hindernisbedingung verletzen könnten. Betrachten Sie deshalb innere Variationen und nutzen Sie speziell den dritten Teil von Aufgabe 47.*
