

Übungen zur Vorlesung
Variationsrechnung I
Serie 3 vom 27.10.2011
Abgabedatum: 3.11.2011

Aufgabe 9 [Lagrange Multiplikatorregel mit mehreren Nebenbedingungen]

Beweisen Sie (in Verallgemeinerung von Prop. 1.19) die *Lagrange Multiplikatorregel mit mehreren Nebenbedingungen*:

VOR.: Seien $F, G_1, G_2, \dots, G_m \in C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N)$, $\delta > 0$ und $c_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, m$, gegebene Konstanten. Die Funktion $u \in \mathcal{C}(c_1, \dots, c_m)$ erfülle die Beziehung

$$\mathcal{F}(u) \leq \mathcal{F}(v) \quad \text{für alle } v \in \mathcal{C}(c_1, \dots, c_m) \quad \text{mit } \|u - v\|_{C^1(\bar{I}, \mathbb{R}^N)} < \delta,$$

wobei

$$\mathcal{C}(c_1, \dots, c_m) := \{v \in C^1(\bar{I}, \mathbb{R}^N) : v(a) = \alpha, v(b) = \beta, \mathcal{G}_i(v) = c_i, i = 1, \dots, m\},$$

und wobei

$$\mathcal{G}_i(v) := \int_I G_i(x, v(x), v'(x)) dx, \quad i = 1, \dots, m.$$

Weiterhin gebe es $\bar{\psi}_1, \dots, \bar{\psi}_m \in C_0^\infty(I, \mathbb{R}^N)$, so dass die $(m \times m)$ -Matrix $(\delta \mathcal{G}_i(u, \bar{\psi}_j))_{ij}$ invertierbar ist.

BEH.: Es gibt $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$, so dass

$$\delta \mathcal{F}(u, \phi) + \lambda_1 \delta \mathcal{G}_1(u, \phi) + \dots + \lambda_m \delta \mathcal{G}_m(u, \phi) = 0 \quad \text{für alle } \phi \in C_0^\infty(I, \mathbb{R}^N).$$

Aufgabe 10 [Euler-Lagrange-Gleichung höherer Ordnung]

Sei $u \in C^{2m}(I, \mathbb{R}^N)$, $m \geq 1$ eine schwache Extremale von

$$\mathcal{F}(v) := \int_I F(x, v(x), v'(x), \dots, v^{(m)}(x)) dx,$$

wobei $F = F(x, z, p_1, \dots, p_m) \in C^{m+1}(I \times \mathbb{R}^N \times \dots \times \mathbb{R}^N)$.

Beweisen Sie: Für alle $x \in I$ gilt

$$F_z(x, u(x), u'(x), \dots, u^{(m)}(x)) + \sum_{i=1}^m (-1)^i \frac{d^i}{dx^i} \left[F_{p_i}(x, u(x), u'(x), \dots, u^{(m)}(x)) \right] = 0.$$

Aufgabe 11 [Natürliche Randbedingungen in zwei Dimensionen]

Betrachte Variationsintegrale der Form

$$\mathcal{F}(u) := \int_{B^+} F(x, u(x), Du(x)) dx, \quad (1)$$

wobei $B^+ := \{x = (x^1, x^2) \in \mathbb{R}^2 : |x| < 1, x^2 > 0\}$. Sei $u \in C^2(\overline{B^+}, \mathbb{R}^N)$, $F \in C^2(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^{2N})$, $I = (-1, 1) \times \{0\}$, und $Du(x)$ bezeichne die Jakobische von u .

- (a) Beweisen Sie: Falls $\delta \mathcal{F}(u, \phi) = 0$ für alle $\phi \in C_0^\infty(B^+ \cup I, \mathbb{R}^N)$, dann gelten die natürlichen Randbedingungen

$$F_{p_2^i}(x, u(x), Du(x)) = 0 \text{ für alle } x \in I, i = 1, \dots, N.$$

Hinweis: Gehen Sie wie im Beweis von Proposition 1.12 vor und nutzen Sie Aufgabe 2 von Serie 1.

- (b) Geben Sie für die Funktionale

$$\mathcal{D}(u) := \frac{1}{2} \int_{B^+} |Du(x)|^2 dx \quad (\text{Dirichlet Integral}), \quad (2)$$

$$\mathcal{A}(u) := \int_{B^+} \{\sqrt{1 + |Du(x)|^2} + g(x, u)\} dx \quad (3)$$

(Flächenfunktional mit äußerem Potential)

die natürlichen Randbedingungen konkret an, wobei $g \in C^2(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^N)$ ist.

Aufgabe 12

Beweisen Sie: Für $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\mathcal{F}(v) := \int_I v(x) \sqrt{1 + (v'(x))^2} dx, \quad \mathcal{L}(v) := \int_I \sqrt{1 + (v'(x))^2} dx$$

gilt die Aussage:

u ist schwache Extremale von $\mathcal{F} + \lambda \mathcal{L}$ genau dann, wenn $u + \lambda$ eine schwache Extremale von \mathcal{F} ist.