Rheinisch-Westfälische Technische Hochschule Aachen
Institut für Mathematik
Prof. Dr. Heiko von der Mosel
Till Knoke

Übungen zur Vorlesung Variationsrechnung I Serie 6 vom 17.11.2011 Abgabedatum: 28.11.2011

Aufgabe 21

[Stetige Fortsetzung]

Seien X ein normierter Vektorraum, Y ein Banachraum und $Z \subset X$ eine dichte Teilmenge.

(i) Zeigen Sie, dass jede gleichmäßig stetige Funktion $f : Z \to Y$ genau eine (gleichmäßig) stetige Fortsetzung $\tilde{f} : X \to Y$ besitzt.

(ii) Sei Z zusätzlich ein Unterraum von X. Beweisen Sie, dass es zu $T \in L(Z,Y)$ genau eine stetige Fortsetzung $\tilde{T} \in L(X,Y)$ gibt, wobei $L(Z,Y)$ den Raum der stetigen linearen Abbildungen von Z nach Y bezeichnet.

Hinweis: Das *Prinzip der eindeutigen stetigen Fortsetzung* wird wiederholt in der Vorlesung benutzt, siehe z.B. den Beweis von Lemma 2.7.

Aufgabe 22

[Beispiele zu den Einbettungssätzen]

(i) Zeigen Sie, dass keine stetige Einbettung des Raumes $W^{1,n}(\Omega)$ in $L^\infty(\Omega)$ existiert (vgl. mit dem Sobolevschen Einbettungssatz, Satz 2.8 (i) der Vorlesung).

Hinweis: Betrachten Sie dazu z.B. die Funktion

$$u(x) := \log(1 + |\log|x||) \quad \text{für } x \in B_1(0).$$

(ii) Zeigen Sie, dass die Funktion $u : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $u(x,y) := x \log|\log r|$ mit $r := \sqrt{x^2+y^2}$ von der Klasse $W^{2,2}(B_{1/2}(0))$ ist, dass aber der Gradient ∇u auf $B_{1/2}$ unbeschränkt ist, und vergleichen Sie mit dem Morrey-Sobolevschen Einbettungssatz, Satz 2.8 der Vorlesung. Zeigen Sie darüberhinaus, dass der Einheitsnormalenvektor ν_u des Graphen von u im $\mathbb{R}^3$,

$$\nu_u := \frac{1}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}} \begin{pmatrix} -\nabla u \\ 1 \end{pmatrix},$$

andererseits einen wohldefinierten Limes besitzt, wenn $r \to 0$.

Aufgabe 23

[Nichtkompakte Einbettung] Zeigen Sie an einem Beispiel, dass die Einbettung $W^{1,2}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^n)$ für $1 \leq q < 2n/(n-2)$ nicht kompakt ist.

Aufgabe 24 **[Punktweise Konvergenz (fast überall)]**

(i) Sei $\{v_k\} \subset W^{1,\infty}(\mathbb{R}^n)$ eine beschränkte Folge. Beweisen Sie die Existenz einer Teilfolge $\{v_{k_i}\} \subset \{v_k\}$, die für $i \to \infty$ lokal gleichmäßig gegen eine Grenzfunktion $u \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^n)$ konvergiert.

(ii)* Sei $\{v_k\} \subset W^{1,q}(\mathbb{R}^n)$, $q \in (1,\infty]$ eine beschränkte Folge. Beweisen Sie die Existenz einer Teilfolge $\{v_{k_i}\} \subset \{v_k\}$, die für $i \to \infty$ $\mathscr{L}^n$-fast überall gegen eine Grenzfunktion $u \in W^{1,q}_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n) \cap L^q(\mathbb{R}^n)$ konvergiert.

Hinweis zu (ii): Benutzen Sie auf Bällen $B_j(0) \subset \mathbb{R}^n$, $j \in \mathbb{N}$, die Kompaktheit der Sobolevschen (Satz 2.8 in Variationsrechnung I) Einbettung $W^{1,q}(B_j(0)) \hookrightarrow L^q(B_j(0))$.*
