Rheinisch-Westfälische Technische Hochschule Aachen
Institut für Mathematik
Prof. Dr. Heiko von der Mosel
Till Knoke

Übungen zur Vorlesung Variationsrechnung I Serie 7 vom 28.11.2011 Abgabedatum: 5.12.2011

Aufgabe 25

[Eine Kettenregel für Sobolevfunktionen]

Beweisen Sie: Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und nichtleer. Dann ist für $u \in W^{1,q}(\Omega)$, $1 \leq q \leq \infty$, und $f \in C^1(\mathbb{R})$ mit $f(0) = 0$ und $f' \in L^\infty(\mathbb{R})$, die Komposition $f \circ u \in W^{1,q}(\Omega)$, und es gilt

$$D(f \circ u) = f'(u)Du.$$

Hinweis: Approximieren Sie u zunächst mit glatten Funktionen u_m.

Aufgabe 26

[Poincaré Ungleichungen]

Sei $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^n$ offen und $1 \leq q < \infty$. Beweisen Sie:

(i) Falls Ω zusammenhängend ist und $\partial\Omega \in C^{0,1}$, dann gibt es eine Konstante $C = C(n,q,\Omega)$, so dass

$$\int_\Omega |u - \bar{u}_\Omega|^q \, dx \leq C(n,q,\Omega) \int_\Omega |\nabla u|^q \, dx \quad \text{für alle } u \in W^{1,q}(\Omega),$$

wobei wir

$$\bar{u}_\Omega := \fint_\Omega u(x)\, dx = \frac{1}{\mathscr{L}^n(\Omega)} \int_\Omega u(x)\, dx$$

gesetzt haben.

(ii) Sei $\alpha \in (0,1]$, Ω zusammenhängend und $\partial\Omega \in C^{0,1}$, dann gibt es eine Konstante $C = C(n,q,\Omega,\alpha)$, so dass

$$\int_\Omega |u|^q \, dx \leq C(n,q,\Omega,\alpha) \int_\Omega |\nabla u|^q \, dx \text{ für alle } u \in W^{1,q}(\Omega) \text{ mit } \mathscr{L}^n(\{u=0\}) \geq \alpha \mathscr{L}^n(\Omega).$$

(iii) Es gibt eine Konstante $C = C(n,q,\Omega)$, so dass

$$\int_\Omega |u|^q \, dx \leq C(n,q,\Omega) \int_\Omega |\nabla u|^q \, dx \quad \text{für alle } u \in W_0^{1,q}(\Omega).$$

Zeigen Sie abschließend, dass man für $\Omega = B_R(x_0) \subset \mathbb{R}^n$ die Konstanten $C = C(n,q)R^q$ in (i) und (iii), bzw. $C = C(n,q,\alpha)R^q$ in (ii) wählen kann.

Aufgabe 27

[Schwache Konvergenz]

Sei X ein Banachraum mit seinem Dualraum X^*, dann heißt eine Folge $(x_k) \subset X$ *schwach konvergent* gegen $x \in X$ ("$x_k \rightharpoonup x$ in X für $k \to \infty$"), wenn

$$\langle l, x_k \rangle_{X^* \times X} := l(x_k) \to l(x) = \langle l, x \rangle_{X^* \times X} \qquad \text{für alle } \; l \in X^*.$$

Die Konvergenz $x_k \to x$ bezüglich der Norm in X nennen wir im Folgenden auch *starke Konvergenz* – sie wird oft auch als *Normkonvergenz* bezeichnet.

Zeigen Sie:

(i) Starke Konvergenz impliziert schwache Konvergenz.

(ii) Die Norm in X ist *schwach unterhalbstetig*, d.h. es gilt

$$x_k \rightharpoonup x \quad \Rightarrow \|x\|_X \leq \liminf_{k \to \infty} \|x_k\|_X .$$

(iii) Sei $B : X \times X \to \mathbb{R}$ eine symmetrische, positiv-semidefinite und stetige Bilinearform. Zeigen Sie: Falls $x_k \rightharpoonup x$ in X, dann gilt

$$B(x,x) \leq \liminf_{k \to \infty} B(x_k, x_k).$$

Hinweis: Für den Beweis der Aussage (ii) *können Sie (ohne Beweis) eine Folgerung aus dem Satz von Hahn-Banach benutzen: Zu jedem Element x in einem normierten linearen Raum X gibt es ein lineares stetiges Funktional l aus dem Dualraum X^* von X, so dass $\|l\|_{X^*} = 1$ und $l(x) = \|x\|_X$.*

Aufgabe 28

[Klassische Nullrandwerte]

Sei $1 \leq q < \infty$ und $I = (a,b) \subset \mathbb{R}$, $-\infty < a < b < \infty$.

Zeigen Sie: Für $u \in W^{1,q}(I)$ mit $u(a) = u(b) = 0$ gilt $u \in W_0^{1,q}(I)$.
