Rheinisch-Westfälische Technische Hochschule Aachen
Institut für Mathematik
Prof. Dr. Heiko von der Mosel
Till Knoke

Übungen zur Vorlesung Variationsrechnung I Serie 8 vom 1.12.2011 Abgabedatum: 12.12.2011

Aufgabe 29

[Absolutstetige Funktionen]

Sei $I = (a,b) \subset \mathbb{R}$, $-\infty < a < b < \infty$. Zeigen Sie: Gilt für $u, v \in L^1(I)$ die Identität

$$u(x) - u(y) = \int_y^x v(t)\,dt \quad \text{für } \mathscr{L}^1\text{-fast alle } x, y \in \bar{I},$$

dann ist $u \in W^{1,1}(I)$ mit schwacher Ableitung $u' = v$. *Hinweis: Wählen Sie ein Teilintervall (a_1, b_1), außerhalb dessen eine gegebene Testfunktion $\phi \in C_0^\infty(I)$ verschwindet, und so dass für a_1, b_1 die vorausgesetzte Identität gilt.*

Aufgabe 30

[Unterhalbstetigkeit im $\mathbb{R}^n$]

Zeigen Sie: Eine auf dem $\mathbb{R}^n$ unterhalbstetige Funktion f nimmt auf jeder nichtleeren kompakten Menge $K \subset \mathbb{R}^n$ ihr Infimum an, d.h. es gibt ein $x \in K$, so dass

$$f(x) = \inf_K f(.).$$

Aufgabe 31

[Charakterisierung der Unterhalbstetigkeit]

Sei X ein topologischer Raum, so dass jeder Punkt $x \in X$ eine abzählbare Umgebungsbasis besitzt. Dann gilt: $f : X \to \mathbb{R}$ ist folgenunterhalbstetig (bzw. folgenoberhalbstetig) genau dann, wenn $f^{-1}[(a,\infty)]$ (bzw. $f^{-1}[(-\infty,a)]$) offen ist für alle $a \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 32

[Unterhalbstetigkeit des Längenfunktionals]

Zeigen Sie, dass das Längenfunktional $\mathscr{L}(u) := \int_0^1 \sqrt{1+(u'(x))^2}\,dx$ unterhalbstetig ist bezüglich der schwachen Konvergenz in $W^{1,q}(I)$, $q \in (1,\infty)$, nicht aber stetig bezüglich dieser Konvergenz.

Hinweis: Für ein Gegenbeispiel gegen die schwache Stetigkeit approximieren Sie eine konstante Funktion geeignet durch Zackenfunktionen.
