Rheinisch-Westfälische Technische Hochschule Aachen
Institut für Mathematik
Prof. Dr. Heiko von der Mosel
Till Knoke

Übungen zur Vorlesung
Variationsrechnung I
Serie 9 vom 8.12.2011
Abgabedatum: 19.12.2011

Aufgabe 33

[Gegenbeispiel zur Unterhalbstetigkeit]

Tonelli's Unterhalbstetigkeitssatz (Satz 3.5) wird für $N > 1$ falsch, wenn man die schwache Konvergenz in $W^{1,p}(I,\mathbb{R}^N)$, $p \in [1,\infty)$, durch die Bedingungen

$$u_k, u \in W^{1,1}(I,\mathbb{R}^N), \quad u_k \to u \text{ in } L^1(I,\mathbb{R}^N) \tag{*}$$

ersetzt.

Zeigen Sie für $N = 2$, $I = (0,1)$, dass die Funktion

$$F(x,z,p) := (z_1 \cdot p_2)^2 \text{ für } z = (z_1,z_2) \in \mathbb{R}^2, p = (p_1,p_2) \in \mathbb{R}^2,$$

ein Gegenbeispiel liefert, d.h., dass zwar F die Voraussetzungen (i)–(iii) aus Satz 3.5 erfüllt, dass aber das Funktional $\mathscr{F}(u) := \int_0^1 F(x,u(x),u'(x))\,dx$ nicht unterhalbstetig ist bezüglich der Konvergenz in (*).

Hinweis: Konstruieren Sie eine Funktionenfolge

$$\{u_k\}_k = \{(u_{1k},u_{2k})\}_k \subset C^{0,1}([0,1],\mathbb{R}^2) \subset W^{1,1}((0,1),\mathbb{R}^2),$$

so dass $u_{1k} \to u_1(x) \equiv 1$ *und* $u_{2k} \to u_2(x) = x$ *in* $L^1((0,1))$ *konvergieren, und so dass* $u'_{2k}(x) \cdot u_{1k}(x) = 0$ *für alle* $x \in (0,1)$.

Aufgabe 34

[Superlinearer Integrand]

Sei $I = (a,b), -\infty < a < b < +\infty$, $\alpha,\beta \in \mathbb{R}^N$, $F \in C^0(\bar{I} \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N)$, $\mathscr{F}(u) := \int_I F(x,u(x),u'(x))\,dx$, und es gebe eine Funktion $\theta : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, so dass

$$\begin{aligned} F(x,z,p) &\geq \theta(p) \geq 0 \text{ für alle } (x,z,p) \in \bar{I} \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \\ \frac{\theta(p)}{|p|} &\to \infty \text{ für } |p| \to \infty. \end{aligned}$$

Zeigen Sie: Falls für die Folge $\{u_k\}_k \subset \{v \in W^{1,1}(I,\mathbb{R}^N) : v(a) = \alpha, v(b) = \beta\}$ die Zahlenfolge $\{\mathscr{F}(u_k)\}_k$ beschränkt ist, dann ist auch die Zahlenfolge $\{\|u_k\|_{W^{1,1}(I,\mathbb{R}^N)}\}_k$ beschränkt.

Aufgabe 35

Sei $I = (0,1)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\mathscr{G}(v) := \int_I [\varphi(v'(x)) + v(x)]\,dx$, wobei

$$\varphi(p) := \begin{cases} (1-p^2)^2 & \text{für } |p| > 1, \\ 0 & \text{für } |p| \le 1, \end{cases}$$

und es gelte $\mathscr{G}(u) = \inf_{\mathscr{C}(\alpha,\beta)} \mathscr{G}(.)$ für

$$u \in \mathscr{C}(\alpha,\beta) := \{v \in W^{1,4}(I) : v(0) = \alpha, v(1) = \beta\}.$$

Zeigen Sie:

$$0 = \int_I [\varphi'(u'(x)) - x]\eta'(x)\,dx \text{ für alle } \eta \in C_0^\infty(I).$$

Hinweis: Machen Sie sich klar, dass die erste Variation $\delta\mathscr{G}(u,\eta)$ auch in diesem Setting mit nicht klassisch differenzierbaren Funktionen existiert.

Aufgabe 36

[Lagrange Multiplikatorregel mit mehreren Nebenbedingungen]

VOR.: Seien $F, G_1, G_2, \ldots, G_m \in C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N)$, mit

$$|F| + |F_z| + |F_p| + \sum_{i=1}^m [\,|G_i| + |(G_i)_z| + |(G_i)_p|\,] \le C(1+|p|^2) \text{ auf } \bar{I} \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N,$$

und $u \in W^{1,2}(I, \mathbb{R}^N)$ erfülle

$$\mathscr{F}(u) = \inf_{\mathscr{C}} \mathscr{F}(.),$$

wobei

$$\mathscr{C} := \{v \in W^{1,2}(I, \mathbb{R}^N) : \mathscr{G}_i(v) = c_i, i = 1, \ldots, m\},$$

$c_i \in \mathbb{R}$, $\mathscr{G}_i(v) := \int_I G_i(x, v(x), v'(x))\,dx$, $i = 1, \ldots, m$. Weiterhin gebe es $\psi_1, \ldots, \psi_m \in C^\infty(\bar{I}, \mathbb{R}^N)$, so dass die $(m \times m)$-Matrix $(\delta\mathscr{G}_i(u, \psi_j))_{ij}$ invertierbar ist.

BEH.: Es gibt $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{R}$, so dass

$$\delta\mathscr{F}(u,\varphi) + \sum_{i=1}^m \lambda_i \delta\mathscr{G}_i(u,\varphi) = 0 \text{ für alle } \varphi \in C^\infty(\bar{I}, \mathbb{R}^N).$$

Hinweis: Leiten Sie mit Sorgfalt die Formeln für die erste Variation der auftretenden Funktionale her, da man es hier nicht mit klassisch differenzierbaren Funktionen zu tun hat.
