Rheinisch-Westfälische Technische Hochschule Aachen
Institut für Mathematik
Prof. Dr. Heiko von der Mosel
Alexandra Gilsbach

Übungen zur Vorlesung Variationsrechnung I Serie 10 vom 12.12.2017 Abgabedatum: 12.1.2018

Aufgabe 37

Sei $I = (0,1)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\mathscr{G}(v) := \int_I [\varphi(v'(x)) + v(x)]\,dx$, wobei

$$\varphi(p) := \begin{cases} (1-p^2)^2 & \text{für } |p| > 1, \\ 0 & \text{für } |p| \leq 1, \end{cases}$$

und es gelte $\mathscr{G}(u) = \inf_{\mathscr{C}(\alpha,\beta)} \mathscr{G}(.)$ für

$$u \in \mathscr{C}(\alpha,\beta) := \{v \in W^{1,4}(I) : v(0) = \alpha, v(1) = \beta\}.$$

Zeigen Sie:

$$0 = \int_I [\varphi'(u'(x)) - x]\eta'(x)\,dx \text{ für alle } \eta \in C_0^\infty(I).$$

Hinweis: Machen Sie sich klar, dass die erste Variation $\delta\mathscr{G}(u,\eta)$ auch in diesem Setting mit nicht klassisch differenzierbaren Funktionen existiert.

Definition: Ein Banachraum X heißt *uniform konvex*, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta(\varepsilon) > 0$ gibt, so dass gilt: Für $u, v \in X$ mit $\|u\|_X = \|v\|_X = 1$ und mit $\|u-v\|_X \geq \varepsilon$ gilt $\|u+v\|_X \leq 2(1-\delta)$. (Gleichbedeutend ist: Aus $\|u_k\|_X = \|v_k\|_X = 1$ und $\|u_k + v_k\|_X \to 2$ folgt $\|u_k - v_k\|_X \to 0$.)

Aufgabe 38

[Normkonvergenz & schwache Konvergenz $\Rightarrow$ starke Konvergenz]

Sei X ein uniform konvexer Banachraum. Zeigen Sie: Aus $u_k \rightharpoonup u$ in X und $\|u_k\|_X \to \|u\|_X$ folgt $\|u_k - u\|_X \to 0$.

Hinweis: Machen Sie sich klar, dass Sie ohne Einschränkung annehmen dürfen, dass $\|u_k\|_X = \|u\|_X = 1$, und nutzen Sie dann die schwache Unterhalbstetigkeit der Norm (vgl. Aufgabe 27 (ii)).

Aufgabe 39

[Clarkson für $q \in [2,\infty)$]

Die Banachräume $L^q(I)$, $1 < q < \infty$, sind uniform konvex. Zeigen Sie das für $q \in [2,\infty)$.

Hinweis: Beweisen Sie

$$|x+y|^q + |x-y|^q \leq 2^{q-1}(|x|^q + |y|^q) \textit{ für alle } x, y \in \mathbb{R},\ q \geq 2.$$

Aufgabe 39*

[Clarkson für $q \in (1,2)$]

Beweisen Sie die Aussage aus Aufgabe 39 für $q \in (1,2)$.

Hinweis: Sie dürfen benutzen, dass es in einem normierten, uniform konvexen Raum X mit $p \in (1,\infty)$ zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta_p(\varepsilon)$ mit der Eigenschaft

$$|\|x\|, \|y\| \leq 1, \|x-y\|| \geq \varepsilon \qquad \Longrightarrow \qquad \|\frac{1}{2}(x+y)\|^p \leq (1-\delta_p)\frac{\|x\|^p + \|y\|^p}{2}$$

gibt. (Beweis?) Obige Gleichung gilt dann auch für beliebige $x, y \in X$, wobei $\delta_p = \delta_p(\frac{\|x-y\|}{\max(\|x\|,\|y\|)})$. Betrachten Sie nun für $f, g \in L^p(I)$ die Mengen

$$M = \left\{ t \in I \middle| |f(t)-g(t)|^p \geq \frac{\varepsilon^p}{4}(|f(t)|^p + |g(t)|^p) \left(\geq \frac{\varepsilon^p}{4} \max(|f(t)|^p, |g(t)|^p) \right) \right\}$$

und $N := I \setminus M$.

Aufgabe 40

[Existenz unter Nebenbedingung]

Sei $G \in C^1(\mathbb{R})$, und es gebe eine Konstante $C \geq 0$, so dass $|G'(z)| \leq C(1+|z|)$ für alle $z \in \mathbb{R}$. Beweisen Sie die Existenz einer Funktion

$$u \in \mathscr{C}_0 := \{w \in W_0^{1,2}((0,1)) : \int_0^1 G(w(x))\,dx = 0\},$$

so dass $\mathscr{D}(u) = \inf_{\mathscr{C}_0} \mathscr{D}$, wobei

$$\mathscr{D}(w) := \frac{1}{2}\int_0^1 |u'(x)|^2\,dx$$

das Dirichlet-Integral bezeichnet. Hierbei nehmen wir an, dass die Klasse $\mathscr{C}_0$ zulässiger Funktionen nicht leer ist.
