Rheinisch-Westfälische Technische Hochschule Aachen
Institut für Mathematik
Prof. Dr. Heiko von der Mosel
Alexandra Gilsbach

Übungen zur Vorlesung
Variationsrechnung I
Serie 4 vom 30.10.2017
Abgabedatum: 8.11.2017

Aufgabe 13 **[Lagrange Multiplikatorregel mit mehreren Nebenbedingungen]**

Beweisen Sie (in Verallgemeinerung von Prop. 1.19) die *Lagrange Multiplikatorregel mit mehreren Nebenbedingungen:*

VOR.: Seien $F, G_1, G_2, \dots, G_m \in C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N)$, $\delta > 0$ und $c_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, m$, gegebene Konstanten. Die Funktion $u \in \mathscr{C}(c_1, \dots, c_m)$ erfülle die Beziehung

$$\mathscr{F}(u) \le \mathscr{F}(v) \quad \text{für alle } v \in \mathscr{C}(c_1, \dots, c_m) \quad \text{mit } \|u - v\|_{C^1(\bar{I}, \mathbb{R}^N)} < \delta,$$

wobei

$$\mathscr{C}(c_1, \dots, c_m) := \{v \in C^1(\bar{I}, \mathbb{R}^N) : v(a) = \alpha, v(b) = \beta, \mathscr{G}_i(v) = c_i, i = 1, \dots, m\},$$

und wobei

$$\mathscr{G}_i(v) := \int_I G_i(x, v(x), v'(x))\, dx, \quad i = 1, \dots, m.$$

Weiterhin gebe es $\bar{\psi}_1, \dots, \bar{\psi}_m \in C_0^\infty(I, \mathbb{R}^N)$, so dass die $(m \times m)$-Matrix $(\delta\mathscr{G}_i(u, \bar{\psi}_j))_{ij}$ invertierbar ist.

BEH.: Es gibt $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$, so dass

$$\delta\mathscr{F}(u, \phi) + \lambda_1 \delta\mathscr{G}_1(u, \phi) + \dots + \lambda_m \delta\mathscr{G}_m(u, \phi) = 0 \quad \text{für alle } \phi \in C_0^\infty(I, \mathbb{R}^N).$$

Aufgabe 14 **[Schwingende Saite]**

Leiten Sie für die Lösung $u \in C^2([a,b])$ des Variationsproblems der schwingenden Saite

$$\mathscr{F}(v) := \int_a^b (v'(x))^2\, dx \quad \to \min!$$

in der Klasse

$$C := \{v \in C^1([a,b]) : v(a) = 0 = v(b), \int_a^b v^2(x)\, dx = 1\}$$

die EULER-LAGRANGE-Gleichungen her und bestimmten Sie den als Eigenwert auftretenden Lagrange-Parameter explizit in Abhängigkeit von der Lösung u.

Aufgabe 15 **[Nichtlösbares Variationsproblem I]**

(i) Zeigen Sie, dass das Variationsintegral

$$\mathscr{F}(v) := \int_0^1 (v'^2(x) - 1)^2 \, dx$$

in der Klasse

$$C := \{v \in C^1([0,1]) : v(0) = v(1) = 0\}$$

keinen Minimierer besitzt.

(ii) Zeigen Sie, dass $\mathscr{F}$ in

$$D := \{v \in C^{0,1}([0,1]) : v(0) = v(1) = 0\}$$

unendlich viele Minimierer besitzt.

(iii)* Zeigen Sie, dass das Funktional

$$\mathscr{G}(v) := \int_0^1 (1 + v^2(x))[1 + (v'^2(x) - 1)^2] \, dx$$

in der Klasse D keine Minimierer besitzt.

Aufgabe 16 **[Nichtlösbares Variationsproblem II]**

Sei $h(x) := 1 - |x|$ für $x \in [-2,2]$ eine Funktion, die das folgende Hindernisproblem determiniert: Gesucht ist ein Minimierer des Längenfunktionals

$$\mathscr{L}(v) := \int_{-2}^2 \sqrt{1 + v'^2(x)} \, dx$$

in der Klasse

$$C_h := \{v \in C^1([-2,2]) : v(-2) = 0 = v(2),\, v(x) \geq h(x) \; \forall x \in [-2,2]\}.$$

Zeigen Sie, dass dieses Problem keine Lösung besitzt.

Hinweis: Der Polygonzug, der die vorgegebenen Randpunkte über die Spitze des Hindernisses verbindet, liefert offensichtlich die kürzeste Verbindung der Randpunkte unter Berücksichtigung der Hindernisbedingung. Vergleichen Sie dessen Länge mit der eines beliebigen Minimierers $u \in C_h$; setzen Sie dazu an einer Maximalstelle von u an.
