

Übungen zur Vorlesung
Variationsrechnung I
Serie 5 vom 6.11.2017
Abgabedatum: 15.11.2017

Aufgabe 17 [Legendre-Transformation]

Die zu einer Funktion $F : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ Legendre Transformierte $F^* : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ ist definiert durch

$$F^*(\zeta) := \sup_{p \in \mathbb{R}^N} \{\zeta \cdot p - F(p)\}.$$

Zeigen Sie für $N = 1$:

- (i) Für $q \in (1, \infty)$ und $F(p) := |p|^q/q$ ist $F^*(\zeta) = |\zeta|^{q'}/q'$, wobei $1/q + 1/q' = 1$.
- (ii) Berechnen Sie für $F(p) = \sqrt{1+p^2}$ die Legendre Transformierte F^* .
- (iii) Berechnen Sie F^* und $(F^*)^*$ zu der Indikator-Funktion des Intervalls $(0, 1)$, d.h. zu

$$F(p) := \begin{cases} 0 & \text{für } p \in (0, 1) \\ +\infty & \text{für } p \in \mathbb{R} \setminus (0, 1). \end{cases}$$

- (iv) Für $P \in \mathbb{R}^{2 \times 2} \simeq \mathbb{R}^4$ sei $F_1(P) := \det P$ und $F_2(P) := (\det P)^2$. Berechnen Sie F_i^* und $(F_i^*)^*$ für $i = 1, 2$.

Aufgabe 18

[Stetige Fortsetzung]

Seien X ein normierter Vektorraum, Y ein Banachraum und $Z \subset X$ eine dichte Teilmenge, d.h. der Abschluss \overline{Z} ist identisch mit X .

- (i) Zeigen Sie, dass jede gleichmäßig stetige Funktion $f : Z \rightarrow Y$ genau eine (gleichmäßig) stetige Fortsetzung $\tilde{f} : X \rightarrow Y$ besitzt.
- (ii) Sei Z zusätzlich ein Unterraum von X . Beweisen Sie, dass es zu $T \in L(Z, Y)$ genau eine stetige Fortsetzung $\tilde{T} \in L(X, Y)$ gibt, wobei $L(Z, Y)$ den Raum der stetigen linearen Abbildungen von Z nach Y bezeichnet. (Die Stetigkeit einer solchen linearen Abbildung $T : Z \rightarrow Y$ ist äquivalent zu ihrer Beschränktheit, d.h. T ist stetig genau dann, wenn es eine Konstante $C \geq 0$ gibt, so dass $\|T(z)\|_Y \leq C\|z\|_Z$ für alle $z \in Z$, wobei man für die Norm $\|\cdot\|_Z$ auf dem Teilraum $Z \subset X$ die Norm $\|\cdot\|_X$ des umgebenden Raumes X wählen kann.)

Hinweis: Das *Prinzip der eindeutigen stetigen Fortsetzung* wird wiederholt in der Vorlesung benutzt werden, siehe z.B. den Beweis von Lemma 2.7.

Zur Erinnerung: Ein *metrischer Raum* ist ein Paar (\mathcal{M}, d) , wobei \mathcal{M} eine Menge ist und $d: \mathcal{M} \times \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Abbildung mit folgenden Eigenschaften für alle $x, y, z \in \mathcal{M}$:

- (i) $d(x, y) \geq 0$ und $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$,
- (ii) $d(x, y) = d(y, x)$ (Symmetrie),
- (iii) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ (Dreiecksungleichung).

(\mathcal{M}, d) heißt *vollständiger metrischer Raum*, falls jede Cauchy-Folge in \mathcal{M} einen Grenzwert in \mathcal{M} besitzt. Ein normierter Vektorraum $(Y, \|\cdot\|_Y)$ heißt *Banachraum*, falls Y ein vollständiger metrischer Raum bezüglich der induzierten Metrik $d(x, y) := \|x - y\|_Y$ ist.

Aufgabe 19

$[(C^1(\bar{I}), \|\cdot\|_{1,2})$ nicht vollständig]

Zeigen Sie, dass $(C^1(\bar{I}), \|\cdot\|_{1,2})$, $I = (a, b) \subset \mathbb{R}$ mit $-\infty < a < b < \infty$, nicht vollständig ist, wobei $\|u\|_{1,2} := \|u\|_{L^2(I)} + \|u'\|_{L^2(I)}$ ist.

Hinweis: Geben Sie ein Beispiel einer Cauchy-Folge in $C^1(\bar{I})$ an, deren Grenzwert (bezüglich $\|\cdot\|_{1,2}$) nicht überall differenzierbar ist.

Aufgabe 20

[Eigenschaften von Differenzenquotienten]

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge. Beweisen Sie für $u \in L^p(\Omega)$, $v \in L^q(\Omega)$, $1 \leq p \leq \infty$ mit $p^{-1} + q^{-1} = 1$ die folgenden Eigenschaften von Differenzenquotienten $\Delta_h^{e_l} \equiv \Delta_h$, $e_l \in S^{n-1}$, $l \in \{1, \dots, n\}$, $h \neq 0$ (definiert durch $\Delta_h^{e_l} f(x) := (f(x + he_l) - f(x))/h$):

(i)

$$\Delta_h(uv)(x) = (\Delta_h u)(x)v(x) + u_h(x)\Delta_h v(x) = (\Delta_h u)(x)v_h(x) + u(x)\Delta_h v(x)$$

für fast alle $x \in \Omega$, $|h| < \text{dist}(x, \partial\Omega)$, wobei für eine Funktion $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$

$$f_h(x) := f(x + he_l)$$

gesetzt wurde.

(ii) Falls u oder v kompakten Träger in Ω haben, dann gilt für $|h| \ll 1$

$$\int_{\Omega} u(x)\Delta_h v(x) dx = - \int_{\Omega} \Delta_{-h} u(x)v(x) dx.$$