

Übungen zur Vorlesung
Variationsrechnung I
Serie 6 vom 13.11.2017
Abgabedatum: 24.11.2017

Aufgabe 21

[*N*-Teilchensystem]

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein endliches offenes Intervall. Betrachte ein N -Teilchensystem mit positiven Punktmassen m_i für $i = 1, \dots, N$ im \mathbb{R}^3 , wobei die Positionsvektoren durch $u_i(t) \in C^2(\bar{I}, \mathbb{R}^3)$, $i = 1, \dots, N$, als Vektorfunktionen der Zeit beschrieben werden. Die zugehörige kinetische Energie des Teilchensystems $u := (u_1, \dots, u_N)$ zur Zeit t ist

$$T(u'(t)) := \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i |u_i'(t)|^2,$$

während die potentielle Energie des Systems durch eine Funktion $V = V(t, z) \in C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{3N})$ beschrieben wird, so dass das Wirkungsfunktional den Integranden $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{3N} \times \mathbb{R}^{3N} \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch $F(t, z, p) := T(p) - V(t, z)$ besitzt.

- (i) Leiten Sie die Euler-Lagrange Gleichungen des Wirkungsfunktionals her und bestimmen Sie die zugehörige Hamiltonfunktion.
- (ii) Zeigen Sie, dass die Hamiltonfunktion entlang der Lösung der Euler-Lagrange Gleichungen, d.h. für $v := F_p(t, u, u')$ als *Gesamtenergie*

$$H(t, u, v) = T(u') + V(t, u)$$

geschrieben werden kann.

Aufgabe 22 Sei $f \in C^1(\mathbb{R}^N)$, $q > 1$, und es gebe $c_0 > 0$, so dass

$$c_0 |p|^q \leq f(p) \text{ für alle } p \in \mathbb{R}^N.$$

Zeigen Sie:

- (i) $\nabla f(\cdot) : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ surjektiv.
- (ii) Falls f zusätzlich konvex ist, dann gilt $|\nabla f(p)| \rightarrow \infty$ für $|p| \rightarrow \infty$.

Hinweis: Betrachten Sie für Teil (i) zu beliebig vorgegebenem $v \in \mathbb{R}^N$ die Funktion $g_v : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ mit $g_v(x) := f(x) - x \cdot v$. Nutzen Sie für Teil (ii) die wegen der Konvexität gültige Beziehung

$$f(0) \geq f(p) + (0 - p) \nabla f(p) \quad \text{für alle } p \in \mathbb{R}^N.$$

Aufgabe 23

[Stetigkeit von Infima]

- (i) Sei $f = f(\eta, \xi) \in C^0(\mathbb{R}^M \times \mathbb{R}^N)$ für $N, M \in \mathbb{N}$, und $T \subset \mathbb{R}^M$ eine beschränkte nichtleere Teilmenge. Zeigen Sie, dass dann die Funktion

$$F(\xi) := \inf_{\eta \in T} f(\eta, \xi)$$

stetig ist.

- (ii) Sei $A = A(\xi) \in C^0(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^{l \times l})$ für $N, l \in \mathbb{N}$, so dass $A(\xi)$ symmetrisch ist für alle $\xi \in \mathbb{R}^N$. Zeigen Sie, dass der kleinste Eigenwert $\lambda = \lambda(\xi)$ von $A(\xi)$ aufgefasst als Funktion von $\xi \in \mathbb{R}^N$ stetig ist.
- (iii)* Versuchen Sie, die Stetigkeitsaussage aus Teil (i) auf eine möglichst allgemeine Situation zu generalisieren.

Aufgabe 24

[Unterhalbstetigkeit]

Sei (\mathcal{M}, d) ein metrischer Raum mit Metrik d , dann heißt eine Funktion $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ *folgenunterhalbstetig*, genau dann wenn für alle Folgen $\{x_n\}_n \in \mathbb{N} \subset \mathcal{M}$ und $x \in \mathcal{M}$ mit $d(x_n, x) \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$ die Ungleichung

$$f(x) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} f(x_n)$$

gilt. Andererseits heißt f *folgenoberhalbstetig*, wenn für alle solche Folgen gilt

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} f(x_n) \leq f(x).$$

- (i) Zeigen Sie: Eine auf dem \mathbb{R}^n unterhalbstetige Funktion f nimmt auf jeder nichtleeren kompakten Menge $K \subset \mathbb{R}^n$ ihr Infimum an, d.h. es gibt ein $x \in K$, so dass

$$f(x) = \inf_K f(\cdot).$$

- (ii) Sei (\mathcal{M}, d) ein metrischer Raum mit Metrik d . Zeigen Sie: $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ ist folgenunterhalbstetig (bzw. folgenoberhalbstetig) genau dann, wenn $f^{-1}[(a, \infty)]$ (bzw. $f^{-1}[(-\infty, a)]$) offen ist für alle $a \in \mathbb{R}$.