

Übungen zur Vorlesung
Variationsrechnung I
Serie 9 vom 4.12.2017
Abgabedatum: 21.12.2017

Aufgabe 33

[Absolutstetige Funktionen]

Sei $I = (a, b) \subset \mathbb{R}$, $-\infty < a < b < \infty$. Zeigen Sie: Gilt für $u, v \in L^1(I)$ die Identität

$$u(x) - u(y) = \int_y^x v(t) dt \quad \text{für } \mathcal{L}^1\text{-fast alle } x, y \in \bar{I},$$

dann ist $u \in W^{1,1}(I)$ mit schwacher Ableitung $u' = v$. *Hinweis: Wählen Sie ein Teilintervall (a_1, b_1) , außerhalb dessen eine gegebene Testfunktion $\phi \in C_0^\infty(I)$ verschwindet, und so dass für a_1, b_1 die vorausgesetzte Identität gilt.*

Aufgabe 34

[Unterhalbstetigkeit des Längenfunctionals]

Zeigen Sie, dass das Längenfunctional $\mathcal{L}(u) := \int_0^1 \sqrt{1 + (u'(x))^2} dx$ unterhalbstetig ist bezüglich der schwachen Konvergenz in $W^{1,q}(I)$, $q \in (1, \infty)$, nicht aber stetig bezüglich dieser Konvergenz.

Hinweis: Für ein Gegenbeispiel gegen die schwache Stetigkeit approximieren Sie eine konstante Funktion geeignet durch Zackenfunktionen.

Aufgabe 35

[Gegenbeispiel zur Unterhalbstetigkeit]

Tonelli's Unterhalbstetigkeitssatz (Satz 3.5) wird für $N > 1$ falsch, wenn man die schwache Konvergenz in $W^{1,p}(I, \mathbb{R}^N)$, $p \in [1, \infty)$, durch die Bedingungen

$$u_k, u \in W^{1,1}(I, \mathbb{R}^N), \quad u_k \rightarrow u \text{ in } L^1(I, \mathbb{R}^N) \quad (*)$$

ersetzt.

Zeigen Sie für $N = 2$, $I = (0, 1)$, dass die Funktion

$$F(x, z, p) := (z_1 \cdot p_2)^2 \text{ für } z = (z_1, z_2) \in \mathbb{R}^2, p = (p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2,$$

ein Gegenbeispiel liefert, d.h., dass zwar F die Voraussetzungen (i)–(iii) aus Satz 3.5 erfüllt, dass aber das Funktional $\mathcal{F}(u) := \int_0^1 F(x, u(x), u'(x)) dx$ nicht unterhalbstetig ist bezüglich der Konvergenz in (*).

Hinweis: Konstruieren Sie eine Funktionenfolge

$$\{u_k\}_k = \{(u_{1k}, u_{2k})\}_k \subset C^{0,1}([0, 1], \mathbb{R}^2) \subset W^{1,1}((0, 1), \mathbb{R}^2),$$

so dass $u_{1k} \rightarrow u_1(x) \equiv 1$ und $u_{2k} \rightarrow u_2(x) = x$ in $L^1((0, 1))$ konvergieren, und so dass $u'_{2k}(x) \cdot u_{1k}(x) = 0$ für alle $x \in (0, 1)$.

Aufgabe 36

[Superlinearer Integrand]

Sei $I = (a, b)$, $-\infty < a < b < +\infty$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^N$, $F \in C^0(\bar{I} \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N)$, $\mathcal{F}(u) := \int_I F(x, u(x), u'(x)) dx$, und es gebe eine Funktion $\theta : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$, so dass

$$\begin{aligned} F(x, z, p) &\geq \theta(p) \geq 0 \text{ für alle } (x, z, p) \in \bar{I} \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \\ \frac{\theta(p)}{|p|} &\rightarrow \infty \text{ für } |p| \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Zeigen Sie: Falls für die Folge $\{u_k\}_k \subset \{v \in W^{1,1}(I, \mathbb{R}^N) : v(a) = \alpha, v(b) = \beta\}$ die Zahlenfolge $\{\mathcal{F}(u_k)\}_k$ beschränkt ist, dann ist auch die Zahlenfolge $\{\|u_k\|_{W^{1,1}(I, \mathbb{R}^N)}\}_k$ beschränkt.
