Rheinisch-Westfälische Technische Hochschule Aachen
Institut für Mathematik

nach Vorlesungen im Wintersemester 2002/2003 an der Universität Bonn und in den Wintersemestern 2007/2008, 2009/2010, 2011/2012, 2017/2018, 2021/2022 an der RWTH Aachen

Variationsrechnung I

Prof. Dr. Heiko von der Mosel

Letzte Änderung: 24. Februar 2022

Prof. Dr. H. von der Mosel

Korrekturen bitte an
heiko@instmath.rwth-aachen.de

Erstellt und ausgearbeitet im WS02-03 von:

Nils Carqueville
Kai Kaminski
Felix Plöger
Allan Zulficar

Bearbeitet im WS02-03 von:

Philipp Reiter

Überarbeitet in den Wintersemestern 07-08, 09-10, 11-12, 17-18, 21-22 von:

Heiko von der Mosel

Dank an die Hörer der Vorlesungen in Bonn und Aachen für zahlreiche Hinweise und Korrekturvorschläge. Mein spezieller Dank geht an die Herren Ulrich Menne, Henryk Gerlach, Philipp Reiter, Armin Schikorra, Michael Dahmen, Tobias Hermes und Matthias Schlottbom, sowie an Anne Faber, Angela Klewinghaus, Nicola Rieke, Andreas Platen, Felix Voigtländer, Alexandra Gilsbach, Christopher Arter, Jonas Ingmanns, Oleg Leitner, Anna Lagemann, Kristin Lüke, Jannik Henkes.

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Indirekte Methoden: Variationsgleichungen

1.1 Erste Variation, EULER-LAGRANGE-Gleichungen

Wir betrachten Variationsintegrale der Form

$$\mathcal{F}(u) := \int_I F(x, u(x), u'(x))\,\mathrm{d}x. \tag{1.1}$$

Dabei sei $I = (a,b) \subset \mathbb{R}$, $-\infty < a < b < \infty$, $u \in C^1(\overline{I}, \mathbb{R}^N)$ und $F = F(x,z,p) \in C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N)$ mit $N \in \mathbb{N}$. Wir nennen F eine LAGRANGE-*Funktion*.

Sei $U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$ eine offene Umgebung von $G := \{(x, u(x), u'(x)) : x \in \overline{I}\}$. Diese Menge G wird als *1-Graph* der Funktion u bezeichnet. Es reicht oft, wenn $F \in C^1(U)$.

Wenn nun $F \in C^1(U)$ und $u \in C^1(\overline{I}, \mathbb{R}^N)$, dann ist $\mathcal{F}(v)$ wohldefiniert für alle $v \in C^1(\overline{I}, \mathbb{R}^N)$ mit $\|u - v\|_{C^1(\overline{I},\mathbb{R}^N)} \ll 1$. Genauer gesagt, es existiert eine Zahl $\delta = \delta(u, U)$ abhängig von der Funktion u und der Umgebung U des 1-Graphen von u, so dass $\mathcal{F}(v)$ wohldefiniert und endlich ist für alle $v \in C^1(\overline{I}, \mathbb{R}^N)$ mit $\|u - v\|_{C^1(\overline{I},\mathbb{R}^N)} < \delta$. Die Norm $\|v\|_{C^k(\overline{I},\mathbb{R}^N)}$ für ein $k \in \mathbb{N}$ ist dabei folgendermaßsen definiert:

$$\|v\|_{C^k(\overline{I},\mathbb{R}^N)} := \|v\|_{C^0(\overline{I},\mathbb{R}^N)} + \|v'\|_{C^0(\overline{I},\mathbb{R}^N)} + \ldots + \|v^{(k)}\|_{C^0(\overline{I},\mathbb{R}^N)}$$

und

$$\|v\|_{C^0(\overline{I},\mathbb{R}^N)} := \sup_{x \in \overline{I}} |v(x)|.$$

Folglich ist auch $\mathcal{F}(u + \varepsilon\varphi)$ wohldefiniert für $\varphi \in C^1(\overline{I}, \mathbb{R}^N)$ und alle $|\varepsilon| \ll 1$. Für ein hinreichend klein gewähltes $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(\varphi) > 0$ und $|\varepsilon| \le \varepsilon_0(\varphi)$ hat $u + \varepsilon\varphi$ nämlich einen 1-Graphen, der vollständig in U liegt.

Betrachten wir nun den Fall, dass u das Funktional $\mathcal{F}$ lokal minimiert, d.h, wir nehmen an, dass

$$\mathcal{F}(u) \le \mathcal{F}(v) \text{ für alle } v \in C^1(\overline{I}, \mathbb{R}^N) \text{ mit } \|u - v\|_{C^1(\overline{I},\mathbb{R}^N)} \ll 1.$$

Dann ist auch $\mathcal{F}(u) \le \mathcal{F}(u + \varepsilon\varphi)$ für gegebenes $\varphi \in C^1(\overline{I}, \mathbb{R}^N)$ und alle $|\varepsilon| \le \varepsilon_0 \ll 1$. Definiert man nun die Funktion $\Phi : (-\varepsilon_0, \varepsilon_0) \to \mathbb{R}$ durch

$$\Phi(\varepsilon) := \mathcal{F}(u + \varepsilon\varphi),$$

erhält man

$$\Phi(0) \leq \Phi(\varepsilon) \text{ für alle } \varepsilon \in \ (-\varepsilon_0, +\varepsilon_0). \tag{1.2}$$

Nun ist die Funktion Φ aber differenzierbar (siehe z.B. [4]), wenn $u, \varphi \in C^1(\overline{I}, \mathbb{R}^N)$, und es folgt aus (1.2)

$$\begin{aligned} 0 &= \Phi'(0) \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon}\bigg|_{\varepsilon=0} \left(\int_I F(x, u(x) + \varepsilon\varphi(x), u'(x) + \varepsilon\varphi'(x))\,\mathrm{d}x \right) \\ &= \int_I \Big(F_z(x, u(x), u'(x)) \cdot \varphi(x) + F_p(x, u(x), u'(x)) \cdot \varphi'(x) \Big)\,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Definition 1.1 [ERSTE (ÄUSSERE) VARIATION]
$\delta\mathcal{F}(u, \varphi) := \Phi'(0)$ *heißt die* erste (äußere) Variation *von $\mathcal{F}$ an der Stelle u in Richtung φ.*

Bemerkung:
Auch wenn $\Phi'(0)$ unter schwächeren Voraussetzungen an F, u und φ existiert, nennen wir diesen Ausdruck zukünftig erste (äußere) Variation.

Das Funktional $\delta\mathcal{F}(u, \cdot) : C^1(\overline{I}, \mathbb{R}^N) \to \mathbb{R}$ ist linear und stetig, es genügt folgender Abschätzung:

$$|\delta\mathcal{F}(u, \varphi)| \leq c(F, u)\|\varphi\|_{C^1(\overline{I}, \mathbb{R}^N)}.$$

Definition 1.2 [SCHWACHER KRITISCHER PUNKT]
Sei $F \in C^1(I \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N)$. Eine Funktion $u \in C^1(I, \mathbb{R}^N)$ mit

$$\int_I \Big(F_z(x, u(x), u'(x)) \cdot \varphi(x) + F_p(x, u(x), u'(x)) \cdot \varphi'(x) \Big)\,\mathrm{d}x = 0 \tag{1.3}$$

für alle $\varphi \in C_0^\infty(I, \mathbb{R}^N)$ heißt schwacher kritischer Punkt von $\mathcal{F}$ *oder kurz:* schwach $\mathcal{F}$-kritisch. *Hierbei bezeichnet $C_0^\infty(I, \mathbb{R}^N)$ die Klasse der unendlich oft differenzierbaren Funktionen $f : I \to \mathbb{R}^N$ mit kompaktem Träger in I. Der* Träger *einer beliebigen Funktion f auf I ist gegeben durch*

$$\operatorname{supp} f := \overline{\{x \in I : f(x) \neq 0\}}.$$

Falls $u \in C^1(\overline{I}, \mathbb{R}^N)$ schwach $\mathcal{F}$-kritisch ist, so gilt $\delta\mathcal{F}(u, \varphi) = 0$ für alle $\varphi \in C_0^\infty(I, \mathbb{R}^N)$.

Statt $C_0^\infty(I, \mathbb{R}^N)$ könnte man auch einfach $C_0^1(I, \mathbb{R}^N)$ verlangen, vgl. Satz A.21 (ii).

Proposition 1.3
Sei $F \in C^1(\overline{I} \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N)$. Falls $u \in C^1(\overline{I}, \mathbb{R}^N)$ mit $\mathcal{F}(u) \leq \mathcal{F}(u+\varphi)$ für alle $\varphi \in C_0^\infty(I, \mathbb{R}^N)$ mit $\|\varphi\|_{C^1(\overline{I}, \mathbb{R}^N)} \ll 1$ (d.h. u ist lokaler Minimierer von $\mathcal{F}$), dann ist $\delta\mathcal{F}(u, \psi) = 0$ für alle $\psi \in C_0^\infty(I, \mathbb{R}^N)$, d.h. u ist schwacher kritischer Punkt von $\mathcal{F}$.

Aber Vorsicht: Nicht jeder schwache kritische Punkt in $C^1(\overline{I}, \mathbb{R}^N)$ ist lokaler Minimierer oder Maximierer; es könnten durchaus auch Sattelpunkte von Funktionalen auftreten, die weder lokale Minimierer noch Maximierer sind.

Als Motivation für die nächsten Sätze berechnen wir für $F \in C^2(I \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N)$ und

$u \in C^2(I, \mathbb{R}^N)$:

$$\begin{aligned} 0 &= \delta\mathcal{F}(u,\varphi) \\ &= \int_I (F_z(\cdot,u,u')\cdot\varphi + F_p(\cdot,u,u')\cdot\varphi')\,\mathrm{d}x \\ &= \int_I (F_z(\cdot,u,u') - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_p(\cdot,u,u'))\cdot\varphi\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

für alle $\varphi \in C_0^\infty(I, \mathbb{R}^N)$. Dann folgt mit dem noch zu formulierenden Fundamentallemma, Lemma 1.4:

$$F_z(\cdot,u,u') - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_p(\cdot,u,u') = 0 \;\text{ auf }\; I.$$

Lemma 1.4 [Fundamentallemma]
Sei $f \in C^0(I)$ und es gelte

$$\int_I f(x)\,\eta(x)\,\mathrm{d}x = 0 \tag{1.4}$$

für alle $\eta \in C_0^\infty(I)$. Dann ist $f \equiv 0$ auf I.

Beweis. Nehmen wir an, es gäbe einen Punkt $x_0 \in I$ mit $f(x_0) \neq 0$. Ohne Einschränkung nehmen wir $f(x_0) > 0$ an, sonst mache das folgende Argument für $-f$ statt f. Dann wähle ein $\delta = \delta(x_0)$ so klein, dass einerseits

$$\overline{B_{2\delta}(x_0)} := [x_0 - 2\delta, x_0 + 2\delta] \subset I,$$

und andererseits $f(x) > 0$ für alle $x \in B_{2\delta}(x_0)$, was wegen der Stetigkeit von f möglich ist. Die Stetigkeit von f impliziert auch, dass eine Konstante $c > 0$ existiert, so dass $f(x) \geq c$ für alle $x \in \overline{B_\delta(x_0)}$. Dann wähle eine Abschneidefunktion $\eta \in C_0^\infty(B_{2\delta}(x_0))$ mit der Eigenschaft, dass $\eta(x) \geq 1$ für alle $x \in \overline{B_\delta(x_0)}$. Dann gilt

$$\int_I f(x)\eta(x)\,dx = \int_{B_{2\delta}(x_0)} f(x)\eta(x)\,dx \geq \int_{B_\delta(x_0)} f(x)\eta(x)\,dx \geq 2c\delta > 0,$$

was (1.4) widerspricht. □

Lemma 1.5 [erweitertes Fundamentallemma]
Sei $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(I)$ mit

$$\int_I f(x)\,\eta(x)\,\mathrm{d}x = 0 \qquad \forall\, \eta \in C_0^\infty(I). \tag{1.5}$$

Dann ist $f(x) = 0$ für $\mathscr{L}^1$-fast alle $x \in I$.

Beweis. Zu einem gegebenen Punkt $x_0 \in I$ sei $0 < \delta = \delta(x_0) \ll 1$ so klein gewählt, dass

$$\overline{B_{3\delta}(x_0)} = [x_0 - 3\delta, x_0 + 3\delta] \subset I.$$

Dann definieren wir zu $0 < \varepsilon < \delta$ die stückweise lineare Funktion $\eta_\varepsilon \in C_0^0(I)$ durch

$$\eta_\varepsilon(x) := \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \\ 0 & \text{falls } x \in I \setminus (x_0 - \delta - \varepsilon, x_0 + \delta + \varepsilon) \\ \text{linear fortgesetzt} & \text{sonst} \end{cases}$$

und bemerken, dass mit $\varepsilon \to 0$

$$\eta_\varepsilon(x) \to \chi_0(x) = \chi_{[x_0-\delta, x_0+\delta]} \text{ für alle } x \in I. \tag{1.6}$$

Nach Satz A.21 im Anhang gibt es nun für alle $\sigma > 0$ ein $\eta_\varepsilon^\sigma \in C_0^\infty(I)$ mit $\|\eta_\varepsilon - \eta_\varepsilon^\sigma\|_{C^0(\bar{I})} < \sigma$ und

$$\operatorname{supp} \eta_\varepsilon^\sigma \subset B_{3\delta}(x_0) = (x_0 - 3\delta, x_0 + 3\delta),$$

und wir schreiben

$$\int_I f(x)\eta_\varepsilon(x)\,\mathrm{d}x = \int_{B_{3\delta}(x_0)} f(x)\eta_\varepsilon(x)\,\mathrm{d}x = \int_{B_{3\delta}(x_0)} f(x)[\eta_\varepsilon(x) - \eta_\varepsilon^\sigma(x)]\,\mathrm{d}x + \int_I f(x)\eta_\varepsilon^\sigma(x)\,\mathrm{d}x.$$

Das zweite Integral auf der rechten Seite verschwindet nach Voraussetzung, und für das erste gilt

$$\left| \int_{B_{3\delta}(x_0)} f(x)[\eta_\varepsilon(x) - \eta_\varepsilon^\sigma(x)]\,\mathrm{d}x \right| \le \|\eta_\varepsilon - \eta_\varepsilon^\sigma\|_{C^0(\bar{I})} \int_{B_{3\delta}(x_0)} |f(x)|\,\mathrm{d}x < \sigma \int_{B_{3\delta}(x_0)} |f(x)|\,\mathrm{d}x \overset{\sigma\to 0}{\longrightarrow} 0.$$

Es ist also $\int_I f(x)\eta_\varepsilon(x)\,\mathrm{d}x = 0$ für alle $0 < \varepsilon < \delta$, und im Grenzwert $\varepsilon \to 0$ folgt mit (1.6) und der Abschätzung

$$|f(x)\eta_\varepsilon(x)| \le |f(x)\chi_{B_{2\delta}}(x_0)(x)| \quad \text{für } \mathscr{L}^1\text{-fast alle } x \in I$$

aus dem LEBESGUEschen Satz über dominierte Konvergenz

$$0 \;=\; \frac{1}{2\delta}\int_I f(x)\eta_\varepsilon(x)\,\mathrm{d}x \quad \overset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} \quad \frac{1}{2\delta}\int_I f(x)\chi_0(x)\,\mathrm{d}x \;=\; \fint_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Mit dem Grenzübergang $\delta \to 0$ folgt

$$f(x_0) = 0,$$

falls x_0 ein LEBESGUE-Punkt von f ist. Da $\mathscr{L}^1$-fast alle Punkte in I LEBESGUE-Punkte von f sind, ist die Behauptung gezeigt, vgl. A.14. □

Proposition 1.6 [EULER-LAGRANGE-GLEICHUNG]
Sei $u \in C^2(I, \mathbb{R}^N)$ ein schwacher kritischer Punkt von $\mathcal{F}$ und $F \in C^2(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^N)$. Dann gilt:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_p(x, u(x), u'(x)) - F_z(x, u(x), u'(x)) = 0 \qquad \textit{für alle } x \in I. \tag{ELG}$$

Gleichung (ELG) ist ein System von N Gleichungen. Diese werden als EULER-LAGRANGE-*Gleichungen* bezeichnet.

Beweis. Die Funktion u ist schwach $\mathcal{F}$-kritisch, es gilt also

$$\int_I [F_p(x, u(x), u'(x)) \cdot \varphi'(x) + F_z(x, u(x), u'(x)) \cdot \varphi(x)]\,\mathrm{d}x = 0 \quad \forall\, \varphi \in C_0^\infty(I, \mathbb{R}^N),$$

und nach einer partiellen Integration

$$\int_I \left[-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_p(x, u(x), u'(x)) + F_z(x, u(x), u'(x))\right] \cdot \varphi(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

Wählt man nun $\varphi = (0, \dots, 0, \eta, 0, \dots, 0)$, wobei $\eta \in C_0^\infty(I)$ an der i-ten Stelle steht, so lässt sich das Fundamentallemma der Variationsrechnung, Lemma 1.4, anwenden, und es ergibt sich das System der EULER-LAGRANGE-Gleichungen

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F_{p^i}(x, u(x), u'(x)) + F_{z^i}(x, u(x), u'(x)) = 0, \quad i = 1, \dots, N \text{ für alle } x \in I.$$

□

Definition 1.7 [$\mathcal{F}$-KRITISCH]
Sei $F \in C^2(I \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N)$. Jede Lösung $u \in C^2(I, \mathbb{R}^N)$ der EULER-LAGRANGE-*Gleichungen* (ELG) *heißt* kritischer Punkt von $\mathcal{F}$ *oder kurz:* $\mathcal{F}$-kritisch.

Bemerkung:
Es handelt sich bei den EULER-LAGRANGE-Gleichungen um ein System von *quasilinearen gewöhnlichen Differentialgleichungen zweiter Ordnung*, d.h. die höchsten auftretenden Ableitungen sind von zweiter Ordnung, und diese treten nur linear auf, während die Koeffizienten Ableitungen bis zur ersten Ordnung einschließlich enthalten können. Offensichtlich lassen sich mit Hilfe des erweiterten Fundamentallemmas, Lemma 1.5, die Voraussetzungen an die Regularität von F und u in Proposition 1.6 und Definition 1.7 abschwächen.

Beispiel $\boxed{1.1}$
Sei $N = 1$ und das Funktional $\mathcal{F}$ definiert durch

$$\mathcal{F}(u) := \int_I \Big(u'^2(x) + c(x)\, u^2(x) \Big)\, \mathrm{d}x.$$

In diesem Fall ist also $F(x, z, p) = p^2 + c(x)z^2$ mit $F_z(x, z, p) = 2c(x)z$ und $F_p(x, z, p) = 2p$. Die zugehörige EULER-LAGRANGE-Gleichung lautet dann:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} 2u'(x) - 2c(x)\, u(x) = 0 \quad &\iff \\ -u''(x) + c(x)\, u(x) = 0, \quad x \in I. & \end{aligned} \tag{ELG$_{1.1}$}$$

Eine solche Gleichung ist eine *Differentialgleichung vom* STURM-LIOUVILLE-*Typ*, die bereits intensiv untersucht ist; siehe z.B. in dem Buch von PROTTER und WEINBERGER [85].

Beispiel $\boxed{1.2}$
Wir betrachten für $N = 3$ das Funktional

$$\mathcal{F}(u) = \int_I \left(\frac{m}{2} |u'(x)|^2 - V(u(x)) \right) \mathrm{d}x.$$

Dann ist $F(x, z, p) = \frac{m}{2}|p|^2 - V(z)$ mit $F_z(x, z, p) = -V_z(z)$ und $F_p(x, z, p) = mp$. Die EULER-LAGRANGE-Gleichung lautet

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} mu'(x) + V_z(u(x)) = 0, \quad x \in I. \tag{ELG$_{1.2}$}$$

Nach Umbenennung der Variablen ($x \mapsto t$ und $u \mapsto x$) erhält man

$$m\ddot{x}(t) = -V_x(x(t)), \quad t \in I. \tag{BWGl$_{1.2}$}$$

In dieser Formulierung entspricht $\mathcal{F}$ dem *Wirkungsfunktional* der Bewegung $x = x(t), t \in I$, einer Punktmasse m in einem konservativen Kraftfeld mit dem Potential $V(x)$, und die EULER-LAGRANGE-Gleichung ist die NEWTONsche Bewegungsgleichung.

Beispiel $\boxed{1.3}$
Für $N = 1$ sei

$$\mathcal{F}(u) := \int_I \omega(x, u(x)) \sqrt{1 + u'^2(x)}\, \mathrm{d}x, \qquad \omega > 0.$$

Dies ist ein *gewichtetes Längenfunktional* in *nicht-parametrischer* Form, also für Kurven, die als Graphen

$$\{(x, u(x)) : x \in I\}$$

parametrisiert sind. Entsprechende Funktionale in *parametrischer* Form , also Funktionale für allgemeinere parametrisierte Raumkurven, und ihre geometrische und physikalische Bedeutung werden in Abschnitt 5.1 beschrieben. Hier ist $F(x, z, p) = \omega(x, z)\sqrt{1 + p^2}$ mit $F_z(x, z, p) = \omega_z(x, z)\sqrt{1 + p^2}$ und $F_p(x, z, p) = \omega(x, z)\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}$. Die Euler-Lagrange-Gleichung lautet also:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\omega(x, u(x))\frac{u'(x)}{\sqrt{1 + u'^2(x)}}\right) - \omega_z(x, u(x))\sqrt{1 + u'^2(x)} = 0.$$

Dies lässt sich weiter umformen zu

$$\begin{aligned} 0 =&\omega(x, u(x))\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{u'(x)}{\sqrt{1 + u'^2(x)}}\right) + (\omega_x(x, u(x)) + \omega_z(x, u(x))u'(x))\frac{u'(x)}{\sqrt{1 + u'^2(x)}} \\ &- \omega_z(x, u(x))\sqrt{1 + u'^2(x)}, \end{aligned}$$

so dass

$$\begin{aligned} 0 =&\omega(x, u(x))\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{u'(x)}{\sqrt{1 + u'^2(x)}}\right)\sqrt{1 + u'^2(x)} + (\omega_x(x, u(x)) + \omega_z(x, u(x))u'(x))u'(x) \\ &- \omega_z(x, u(x))(1 + u'^2(x)) \\ =&\omega(x, u(x))\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{u'(x)}{\sqrt{1 + u'^2(x)}}\right)\sqrt{1 + u'^2(x)} + \omega_x(x, u(x))u'(x) - \omega_z(x, u(x)). \end{aligned}$$

Wir behaupten nun, dass

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{u'}{\sqrt{1 + u'^2}}\right) = \kappa, \tag{1.7}$$

wobei κ die Krümmung des Graphen $\{(x, u(x)) : x \in I\}$ ist. Dann ergibt sich unter der Voraussetzung $\omega > 0$ für die Lösungen der Euler-Lagrange-Gleichung die *Krümmungsgleichung*

$$\kappa(x) = \frac{\omega_z(x, u(x)) - \omega_x(x, u(x))u'(x)}{\omega(x, u(x))\sqrt{1 + u'^2(x)}}. \tag{ELG$_{1.3}$}$$

Tatsächlich ist für die Kurve $\gamma(x) := (x, u(x))$ die erste Ableitung $\gamma'(x) = (1, u'(x))$ und

$$\frac{\gamma'(x)}{|\gamma'(x)|} = T(x) = \left(\frac{1}{\sqrt{1 + u'^2(x)}}\right)(1, u'(x))$$

die *Einheitstangente* an γ. Der *Einheitsnormalenvektor* von γ an der Stelle $x \in I$, der zusammen mit $T(x)$ ein positiv orientiertes Orthonormalsystem im $\mathbb{R}^2$ bildet, ist

$$N(x) = -\left(\frac{1}{\sqrt{1+u'^2(x)}}\right)(u'(x), -1).$$

Nun ordnet $s(x) := \int_a^x |\gamma'(t)|\,\mathrm{d}t$ jedem $x \in [a,b]$ die *Bogenlänge* der Kurve $\gamma|_{[a,x]}$ zu, wobei

$$s(a) = 0 \;\text{ und }\; s(b) = \int_a^b |\gamma'(t)|\,dt = \mathscr{L}(\gamma) \quad = \text{Länge von } \gamma.$$

Wegen $\frac{d}{dx}s(x) = |\gamma'(x)| > 0$ existiert $s^{-1} : [0, \mathscr{L}(\gamma)] \to [a,b]$, und wir nennen $\Gamma := \gamma \circ s^{-1}$ die *Bogenlängenparametrisierung* mit

$$|\Gamma'(s)| = |\frac{d}{ds}\Gamma(s)| = |\frac{d}{dx}\gamma(x(s))\frac{d}{ds}x(s)| = |\gamma'(x(s))| \cdot \frac{1}{|\gamma'(x(s))|} = 1.$$

Benutzt man die Frenet-Gleichungen (siehe z.B. [41, S. 421ff] oder [29, S. 16])

$$\begin{aligned} T_s &= \kappa N \\ N_s &= -\kappa T, \end{aligned}$$

wobei κ die Krümmung der Kurve γ bezeichnet, so erhält man $T_s = T_x \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} = T_x(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}x})^{-1}$, wobei $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}x} = |\gamma'| = \sqrt{1+u'^2}$. Also ist

$$\begin{pmatrix} \left[(\sqrt{1+u'^2})^{-1}\right]_x \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{u'}{\sqrt{1+u'^2}}\right) \end{pmatrix} = T_x = \sqrt{1+u'^2}T_s = \sqrt{1+u'^2}\kappa N = \kappa \begin{pmatrix} -u' \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Aus der zweiten Komponente dieser Vektorgleichung liest man die behauptete Identität (1.7) für die Krümmung κ ab.

Proposition 1.8 [„Lokales Minimum erfüllt Euler-Lagrange-Gleichung“]
Sei $u \in C^2(I, \mathbb{R}^N) \cap C^1(\overline{I}, \mathbb{R}^N)$, $F \in C^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N)$, $\mathcal{F}(u) \le \mathcal{F}(w)$ für alle $w \in C^1(\overline{I}, \mathbb{R}^N)$ mit $\|u - w\|_{C^1(\overline{I}, \mathbb{R}^N)} \le \delta \ll 1$ und $u = w$ auf ∂I. Dann erfüllt u die Euler-Lagrange-*Gleichung* (ELG).

Beweis. Für alle $\varphi \in C_0^\infty(I, \mathbb{R}^N)$ mit $\|\varphi\|_{C^1(\overline{I}, \mathbb{R}^N)} \le \delta$ gilt $\mathcal{F}(u) \le \mathcal{F}(u + \varphi)$. Nach Proposition 1.3 ist u dann ein schwacher kritischer Punkt von $\mathcal{F}$, und da $u \in C^2(I, \mathbb{R}^N)$, erfüllt u wegen Proposition 1.6 die Euler-Lagrange-Gleichungen. □

Bemerkung:
Nicht jeder Minimierer ist in $C^2(I, \mathbb{R}^N)$.

Beispiel $\boxed{1.4}$
Sei $N = 1$ und $I = (-1, +1)$. Wir betrachten die Klasse

$$\mathcal{C} := \{v \in C^1(\overline{I}) : v(-1) = 0,\, v(+1) = 1\}$$

und stellen fest, dass die Werte der Funktionals

$$\mathcal{F}(u) := \int_{-1}^{+1} u^2(x)(2x - u'(x))^2 \, \mathrm{d}x$$

nichtnegativ sind. Daher ist auch $\inf_{\mathcal{C}} \mathcal{F}(\cdot) \geq 0$. Für die $C^1(\overline{I})$-Funktion u^*, definiert durch

$$u^*(x) := \begin{cases} 0 & \text{für } x \in [-1, 0) \\ x^2 & \text{für } x \in [0, 1], \end{cases}$$

gilt $u^* \in \mathcal{C}$ und $\mathcal{F}(u^*) = 0$, und damit $\mathcal{F}(u^*) = \inf_{\mathcal{C}} \mathcal{F}(\cdot)$, doch $u^* \notin C^2(I)$. Man kann zeigen, dass u^* der eindeutige Minimierer von $\mathcal{F}$ in $\mathcal{C}$ ist.

Das Hauptziel des verbleibenden Teils dieses Abschnitts ist es nun, die Euler-Lagrange-Gleichungen (ELG) auch für Funktionen $u \in C^1(I, \mathbb{R}^N)$ zu beweisen. Entscheidend ist dabei die

Proposition 1.9 [DuBois-Reymond-Gleichung]
Sei $I = (a, b) \subset \mathbb{R}$, $u \in C^1(I, \mathbb{R}^N)$ ein schwacher kritischer Punkt von $\mathcal{F}$ und $F \in C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N)$. Dann existiert für jedes $d \in (a, b)$ ein Vektor $c_d \in \mathbb{R}^N$, so dass

$$F_p(x, u(x), u'(x)) = c_d + \int_d^x F_z(y, u(y), u'(y)) \, \mathrm{d}y \quad \forall x \in I. \tag{DBR}$$

Gilt zusätzlich $u \in C^1(\overline{I}, \mathbb{R}^N)$, so gilt (DBR) *sogar auf $\overline{I}$. Weiterhin könnte man dann in* (DBR) *auch a anstelle von d wählen, so dass in dem Fall ein Vektor $c_a \in \mathbb{R}^N$ anstelle von c_d in* (DBR) *aufträte.*

Beweis. Nach Voraussetzung ist u ein schwacher kritscher Punkt von $\mathcal{F}$, also gilt für alle $\varphi \in C_0^\infty(I, \mathbb{R}^N)$

$$\int_I [F_p(x, u(x), u'(x)) \cdot \varphi'(x) + F_z(x, u(x), u'(x)) \cdot \varphi(x)] \, \mathrm{d}x = 0,$$

und nach einer partiellen Integration

$$\int_I \left[F_p(x, u(x), u'(x)) - \left(\int_d^x F_z(y, u(y), u'(y)) \, \mathrm{d}y \right) \right] \cdot \varphi'(x) \, \mathrm{d}x = 0.$$

Aufgrund des im Anschluss bewiesenen Fundamentallemmas 1.10 von DuBois-Reymond gibt es deshalb einen Vektor $c_d \in \mathbb{R}^N$, so dass

$$F_p(x, u(x), u'(x)) - \int_d^x F_z(y, u(y), u'(y)) \, \mathrm{d}y = c_d \quad \text{für } \mathscr{L}^1\text{-fast alle } x \in I,$$

und wegen der Stetigkeit aller Ausdrücke als Funktion von x auf I gilt diese Identität dann auch für alle $x \in I$.

Falls $u \in C^1(\overline{I}, \mathbb{R}^N)$, dann erhält man durch die stetige Fortsetzbarkeit aller auftretenden Ausdrücke die Identität (DBR) auf ganz $\overline{I}$. Weiterhin kann man in dem Fall anstelle von d die linke Intervallgrenze a wählen und dieselbe Argumentation wie oben verwenden. Dann erhält man (DBR) (mit a anstelle von d und einem Vektor c_a anstelle von c_d) zunächst auf I, kann aber erneut wegen der stetigen Fortsetzbarkeit aller auftretenden Ausdrücke diese Relation auch auf $\overline{I}$ fortsetzen. □

Lemma 1.10 [Fundamentallemma von DuBois-Reymond]
Sei $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(I)$ und erfülle die Gleichung

$$\int_I f(x)\eta'(x)\,\mathrm{d}x = 0 \quad \forall \eta \in C_0^\infty(I). \tag{1.8}$$

Dann existiert eine Konstante $f_0 \in \mathbb{R}$, so dass $f(x) = f_0$ für $\mathscr{L}^1$-fast alle $x \in I$ gilt.

Beweis. Für zwei beliebige Lebesgue-Punkte $x_0, \xi_0 \in I, x_0 < \xi_0$, von f wählen wir $\delta > 0$ so klein, dass $[x_0 - 3\delta, \xi_0 + 3\delta] \subset I$. Dann definieren wir für $0 < \varepsilon < \delta$ die Funktionen $\zeta_\varepsilon \in C_0^{0,1}((x_0 - \delta, \xi_0 + \delta))$ durch

$$\zeta_\varepsilon(x) := \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in [x_0, \xi_0] \\ 0 & \text{falls } x \in I \setminus [x_0 - \varepsilon, \xi_0 + \varepsilon] \\ \text{linear fortgesetzt} & \text{sonst.} \end{cases}$$

Nun gibt es nach Satz A.21 im Anhang zu jedem $0 < \sigma < \varepsilon$ approximierende Funktionen $\zeta_\varepsilon^\sigma \in C_0^\infty((x_0 - 2\delta, \xi_0 + 2\delta))$ mit

$$\|\zeta_\varepsilon^\sigma\|_{C^{0,1}(\overline{I})} = \|\zeta_\varepsilon^\sigma\|_{C^{0,1}([x_0-2\delta,\xi_0+2\delta])} \le \|\zeta_\varepsilon\|_{C^{0,1}([x_0-3\delta,\xi_0+3\delta])} = \|\zeta_\varepsilon\|_{C^{0,1}(\overline{I})} = 1 + \frac{1}{\varepsilon}, \tag{1.9}$$

so dass darüberhinaus

$$\zeta_\varepsilon^{\sigma\prime}(x) \xrightarrow{\sigma\to 0} \zeta_\varepsilon'(x) \quad \text{für } \mathscr{L}^1\text{-fast alle } x \in I, \tag{1.10}$$

siehe Anhang, Satz A.21 und Teil (ii) der Proposition 2.5. Wir schreiben

$$\int_I f(x)\zeta_\varepsilon'(x)\,\mathrm{d}x = \int_I f(x)\zeta_\varepsilon^{\sigma\prime}(x)\,\mathrm{d}x + \int_I f(x)\Big(\zeta_\varepsilon'(x) - \zeta_\varepsilon^{\sigma\prime}(x)\Big)\,\mathrm{d}x,$$

und bemerken, dass das erste Integral nach Voraussetzung verschwindet. Das zweite Integral konvergiert wegen (1.9) und (1.10) für $\sigma \to 0$ gegen 0 nach dem Satz über dominierte Konvergenz von Lebesgue. Es ist also

$$0 = \int_I f(x)\zeta_\varepsilon'(x)\,\mathrm{d}x = \int_{x_0-\varepsilon}^{x_0} f(x)\frac{1}{\varepsilon}\,\mathrm{d}x - \int_{\xi_0}^{\xi_0+\varepsilon} f(x)\frac{1}{\varepsilon}\,\mathrm{d}x \qquad \forall \varepsilon > 0,$$

und im Grenzwert $\varepsilon \to 0$ folgt $f(x_0) - f(\xi_0) = 0$, also $f(x_0) = f(\xi_0) =: c_1$. Da x_0 und ξ_0 beliebig gewählte Lebesgue-Punkte sind, folgt die Behauptung.[1] □

Korollar 1.11
Jeder schwache kritische Punkt $u \in C^1(I, \mathbb{R}^N)$ von $\mathcal{F}$ mit $F \in C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N)$ erfüllt die Euler-Lagrange-*Gleichung* (ELG). *Ist darüberhinaus $u \in C^1(\overline{I}, \mathbb{R}^N)$, dann gilt* (ELG) *für alle $x \in \overline{I}$.*

[1] Alternativ kann man Lemma 1.10 auch beweisen, indem man die in Kapitel 2 behandelte Definition 2.1 der Sobolevfunktionen benutzt, um einzusehen, dass die Voraussetzung (1.8) impliziert, dass die Funktion $f \in W^{1,1}_{\mathrm{loc}}(I)$ ist und eine verschwindende schwache Ableitung besitzt, was dann nach Lemma 2.4 die Konstanz von f fast überall in I impliziert.

Beweis. Seien $x_0, d \in I$ beliebig gewählt. Dann gilt die DuBois-Reymond-Gleichung (DBR) für alle $x \in I$ mit einem konstanten Vektor $c_d \in \mathbb{R}^N$. Für $0 < \varepsilon < \min\{x_0 - a, b - x_0\}$ ist die rechte Seite und damit auch die linke Seite von (DBR) in $C^1(B_\varepsilon(x_0), \mathbb{R}^N)$, und wir können nach x differenzieren, um die Euler-Lagrange-Gleichung (ELG) in $B_\varepsilon(x_0)$, also insbesondere in x_0 zu erhalten. Da $x_0 \in I$ beliebig gewählt war, folgt die Behauptung. Ist $u \in C^1(\overline{I}, \mathbb{R}^N)$, dann ist die Funktion $x \mapsto F_z(x, u(x), u'(x))$ stetig auf $\overline{I}$ fortsetzbar. Nach der gerade bewiesenen Euler-Lagrange-Gleichung (ELG) stimmt aber dieser Term auf dem offenen Intervall I mit $\frac{d}{dx}(F_p(\cdot, u(\cdot), u'(\cdot))$ überein, so dass auch dieser Term und damit die gesamte Euler-Lagrange-Gleichung auf ganz $\overline{I}$ fortsetzbar ist. □

Bemerkung:
Das Anwenden der Kettenregel auf die Euler-Lagrange-Gleichung ist hier im Allgemeinen nicht erlaubt, da weder $u \in C^2(I, \mathbb{R}^N)$ noch $F_p \in C^1$ vorausgesetzt war. Andererseits kann man die Gültigkeit der Euler-Lagrange-Gleichungen $\mathscr{L}^1$-fast überall auch für schwach $\mathcal{F}$-kritische Punkte der Klasse $C^{0,1}(I, \mathbb{R}^N)$ nachweisen.

Proposition 1.12 [Natürliche Randbedingungen]
Sei $F \in C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N)$ und $u \in C^1(\overline{I}, \mathbb{R}^N)$ erfülle

$$\delta\mathcal{F}(u, \varphi) = 0 \quad \forall \varphi \in C^\infty(\overline{I}, \mathbb{R}^N).$$

Dann gelten die natürlichen Randbedingungen

$$F_p(a, u(a), u'(a)) = 0 = F_p(b, u(b), u'(b)).$$

Beweis. Nach Korollar 1.11 löst u die Euler-Langrange-Gleichung

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F_p(x, u(x), u'(x)) + F_z(x, u(x), u'(x)) = 0 \qquad \forall x \in \overline{I}. \tag{1.11}$$

Wir nutzen nun die stärkere Information, dass $\delta\mathcal{F}(u, \varphi) = 0$ für alle φ aus dem „größeren" Raum $C^\infty(\overline{I}, \mathbb{R}^N)$, was dazu führt, dass beim partiellen Integrieren für $\varphi \in C^\infty(\overline{I}, \mathbb{R}^N)$ im Allgemeinen Randterme auftreten:

$$\begin{aligned}
0 &= \delta\mathcal{F}(u, \varphi) \\
&= \int_I \Big(F_p(x, u(x), u'(x)) \cdot \varphi'(x) + F_z(x, u(x), u'(x)) \cdot \varphi(x) \Big) \,\mathrm{d}x \\
&= \int_I \left(-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F_p(x, u(x), u'(x)) + F_z(x, u(x), u'(x)) \right) \cdot \varphi(x) \,\mathrm{d}x \\
&\quad + \Big[F_p(x, u(x), u'(x)) \cdot \varphi(x) \Big]_{x=a}^{x=b} \\
&\underset{(1.11)}{=} \Big[F_p(x, u(x), u'(x)) \cdot \varphi(x) \Big]_{x=a}^{x=b}.
\end{aligned}$$

Zu einem beliebigen Vektor $c \in \mathbb{R}^N$ wähle die lineare Funktion

$$\varphi_c(x) := \frac{x - b}{a - b} c, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Offensichtlich ist $\varphi_c \in C^\infty(\overline{I}, \mathbb{R}^N)$ mit $\varphi_c(a) = c$ und $\varphi_c(b) = 0$, so dass

$$F_p(a, u(a), u'(a)) \cdot c = 0$$

folgt. Setzen wir $c := F_p(a, u(a), u'(a))$, erhalten wir $F_p(a, u(a), u'(a)) = 0$. Analog folgt $F_p(b, u(b), u'(b)) = 0$. □

Bemerkung:
Natürliche Randbedingungen stellen sich automatisch bei Lösungen von sogenannten *freien Randwertproblemen* ein, bei denen man beispielsweise lediglich vorschreibt, dass die Lösungen am Rand auf einer vorgegebenen *Stützmannigfaltigkeit* liegen. Insbesondere in der Theorie der Minimalflächen gibt es dazu zahlreiche interessante Untersuchungen, siehe z.B. [24, Chapter 5].

Beispiel $\boxed{1.5}$ [Freie Randwertprobleme für das DIRICHLET-Integral und das Längenfunktional]
Wir betrachten mit $D(x, z, p) = D(p) = \frac{1}{2}|p|^2 = \frac{1}{2}p \cdot p$ für $p \in \mathbb{R}^N$, das Variationsproblem für das DIRICHLET-Integral

$$\mathscr{D}(u) := \frac{1}{2}\int_I |u'(x)|^2 \,\mathrm{d}x \longrightarrow \text{ min! } \quad \text{in der Klasse} \quad C^1(\overline{I}, \mathbb{R}^N).$$

Für einen Minimierer $u \in C^1(\overline{I}, \mathbb{R}^N)$ erhält man aus den DUBOIS-REYMOND-Gleichungen, Proposition 1.9, $u' \equiv \textit{konst.}$ auf $\overline{I}$ und damit[2] $u(x) = \alpha x + \beta$ für alle $x \in \overline{I}$. Da für den Minimierer u die Ungleichung $\mathcal{F}(u) \leq \mathcal{F}(u + \varepsilon\varphi)$ für alle $\varphi \in C^1(\overline{I}, \mathbb{R}^N)$ gilt, folgen mit $\delta\mathcal{F}(u, \varphi) = 0$ für alle $\varphi \in C^1(\overline{I}, \mathbb{R}^N)$ nach Proposition 1.12 die natürlichen Randbedingungen

$$u'(a) = F_p(a, u(a), u'(a)) = 0 = F_p(b, u(b), u'(b)) = u'(b),$$

so dass die Lösung $u \equiv \textit{konst.}$ lautet. Diese Beobachtung liefert aber keine eindeutigen Lösungen, weil sich die Konstante ohne weitere Informationen nicht weiter bestimmen lässt. Im Fall $N = 1$ bildet der Graph der minimierenden Funktion u aber in jedem Fall an seinen Endpunkten mit den Wänden $\{(a, z) : z \in \mathbb{R}\}$ und $\{(b, z) : z \in \mathbb{R}\}$ einen rechten Winkel.

Eine analoge Rechnung führt im Fall $N = 1$ für den Integranden $L(x, z, p) = L(p) := \sqrt{1 + p^2}$ des Längenfunktionals für eindimensionale Graphen auf

$$L_p(u'(a)) = u'(a)/\sqrt{1 + (u'(a))^2} = 0 = L_p(u'(b)) = u'(b)/\sqrt{1 + (u'(b))^2} = 0,$$

woraus ebenfalls $u'(a) = 0 = u'(b)$ und damit rechte Winkel an den begrenzenden Wänden $\{(a, z) : z \in \mathbb{R}\}$ und $\{(b, z) : z \in \mathbb{R}\}$ als natürliche Randbedingungen folgen.

Bei höherdimensionalen freien Randwertproblemen aus der Kapillaritätstheorie [37] bilden sich sogenannte *Kontaktwinkel*, die je nach Wahl der Energiedichte, also nach Wahl des Integranden des Variationsproblems, verschieden von $\pi/2$ sein können. Bei Minimalflächen ist ein Randwinkel von $\pi/2$ an den freien Rändern charakteristisch, was man in der Natur bei in Hohlkörpern eingespannten Seifenhäuten beobachten kann, siehe [15], [24], [25], [26, 28, 27].

1.2 Innere Variation, NOETHER-Gleichungen

Proposition 1.13 [ERHALTUNGSSATZ]
Sei $F = F(z, p) \in C^2(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N)$, $E := p \cdot F_p - F$, und $u \in C^2(I, \mathbb{R}^N)$ sei eine Lösung der

[2] Dies würde man auch bekommen, wenn man nur wüsste, dass $u \in C^1(I, \mathbb{R}^N)$ schwach $\mathcal{F}$-kritisch ist, da sich u' als konstanter Vektor stetig auf $\overline{I}$ fortsetzen lässt.

EULER-LAGRANGE-*Gleichung* (ELG). *Dann gilt*

$$E(u(\cdot), u'(\cdot)) \equiv \textit{konst. auf } I. \tag{1.12}$$

Beweis.

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big(E(u(x), u'(x))\Big) &= u''(x) \cdot F_p(u(x), u'(x)) + u'(x) \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big(F_p(u(x), u'(x))\Big) \\ &\quad - F_z(u(x), u'(x)) \cdot u'(x) - F_p(u(x), u'(x)) \cdot u''(x) \\ &= u'(x) \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big(F_p(u(x), u'(x))\Big) - F_z(u(x), u'(x)) \cdot u'(x) \\ &= 0.\end{aligned}$$

□

Beispiel $\boxed{1.6}$ [Energieerhaltung in der klassischen Punktmechanik]
Für

$$F(z,p) := \frac{m}{2}|p|^2 - V(z), \quad z, p \in \mathbb{R}^3,$$

erhält man

$$\begin{aligned}E(z,p) &= p \cdot F_p(z,p) - F(z,p) \\ &= p \cdot mp - \frac{m}{2}|p|^2 + V(z) \\ &= \frac{m}{2}|p|^2 + V(z).\end{aligned}$$

Mit der physikalischen Interpretation von $E(z,p)$ als Gesamtenergie und der Variablenumbenennung $x \mapsto t$ (Zeit), $z \mapsto x = x(t)$ (Bahnkurve) ergibt sich

$$E(x, \dot{x}) = \frac{m}{2}\dot{x}^2 + V(x),$$

und mit Proposition 1.13 erhält man den Energieerhaltungssatz

$$E(x(t), \dot{x}(t)) \equiv konst.$$

für alle Lösungen $x = x(t)$ der NEWTONschen Bewegungsgleichung

$$m\ddot{x} = -V_x(x), \tag{BWGl$_{1.6}$}$$

welche die EULER-LAGRANGE-Gleichung des zu F gehörigen Variationsintegrals ist; vgl. mit Beispiel $\boxed{1.2}$.

Bemerkung:
Häufig werden Lösungen der EULER-LAGRANGE-Gleichung gesucht, indem man die zugehörigen Erhaltungssätze analysiert. Es müssen aber im Allgemeinen *nicht* alle u, die dem Erhaltungssatz genügen, auch Lösungen der EULER-LAGRANGE-Gleichung sein, wie das folgende Beispiel zeigt.

Beispiel $\boxed{1.7}$
Sei $u(\cdot) \equiv konst. =: c$ auf dem offenen Intervall $I \subset \mathbb{R}$ und $F = F(z,p) \in C^2(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N)$ mit $F(c,0) = -h \in \mathbb{R}$ und $F_z(c,0) \neq 0$. Dann ist

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} E(u(x), u'(x)) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big[u'(x) \cdot F_p(u(x), u'(x)) - F(u(x), u'(x))\Big] = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F(c,0) = 0,$$

und es folgt $E(u(\cdot), u'(\cdot)) \equiv konst.$ auf I, woraus

$$E(u(x), u'(x)) = E(c,0) = 0 \cdot F_p(c,0) - F(c,0) = h$$

folgt. Es ist aber

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[F_p(c,0)\right] - F_z(c,0) = -F_z(c,0) \neq 0,$$

also ist u keine Lösung der Euler-Lagrange-Gleichung.

Bis zu diesem Punkt geschah die Variation durch eine Störung der Funktionswerte u und u' um φ beziehungsweise φ', und das Funktional $\mathcal{F}$ wurde an der Stelle $u + \varepsilon\varphi$ betrachtet. Stattdessen kann u auch gestört werden, indem man im Definitionsbereich einen von ε abhängigen Diffeomorphismus $\xi(\cdot,\varepsilon)$ vor das u schaltet, um damit eine Vergleichsfunktion $v(\cdot,\varepsilon) := u \circ \xi(\cdot,\varepsilon)$ zu erhalten. Wenn nun ε eine ganze Familie von Diffeomorphismen mit $(t,\varepsilon) \mapsto \xi(t,\varepsilon) \in C^2(\overline{I} \times (-\varepsilon_0, \varepsilon_0))$ von $\overline{I}$ auf $\overline{I}$ parametrisiert, kann man so für einen Minimierer $u = v(\cdot, 0)$ das Verschwinden der Ableitung $\frac{d}{d\varepsilon}|_{\varepsilon=0}\mathcal{F}(v(\cdot,\varepsilon))$ ausnutzen, um eine neue Variationsformel herzuleiten. Dazu stellen wir an die Diffeomorphismen-Schar die folgenden Forderungen:

$$\begin{aligned} \xi(a,\varepsilon) &= a \quad \forall \varepsilon \in (-\varepsilon_0, +\varepsilon_0), \\ \xi(b,\varepsilon) &= b \quad \forall \varepsilon \in (-\varepsilon_0, +\varepsilon_0), \\ \xi(t,0) &= t \quad \forall t \in I, \end{aligned}$$

und die Umkehrfunktionen

$$\tau(\cdot,\varepsilon) = (\xi(\cdot,\varepsilon))^{-1} : \overline{I} \to \overline{I}$$

sollen genügend glatt sein, d.h. die Zuordnung $(x,\varepsilon) \mapsto \tau(x,\varepsilon)$ soll von der Klasse C^2 auf $\overline{I} \times (-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$ sein.

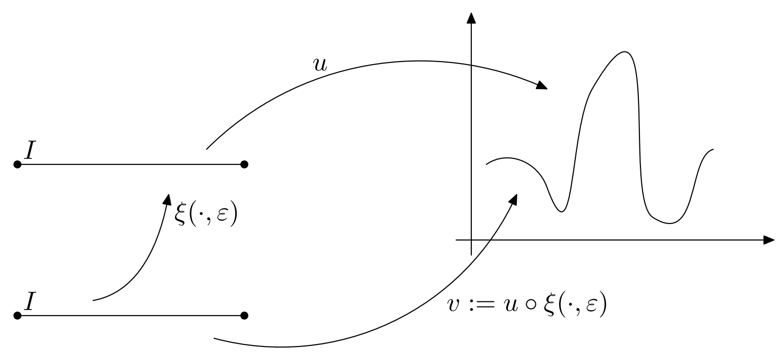

Abbildung 1.1: Zulässige Parametervariation.

Definition 1.14
$\{\xi(\cdot,\varepsilon)\}_\varepsilon$ *mit diesen Eigenschaften heißt* zulässige Parametervariation[3]. *Die Funktionenschar* $v(t,\varepsilon) := u(\xi(t,\varepsilon))$ *heißt* zulässige innere Variation. *Die Funktion*

$$\lambda(t) := \frac{\partial \xi}{\partial \varepsilon}(t,0)$$

heißt das zugehörige Variationsvektorfeld[4] .

Bemerkung:
Es gilt

$$\begin{aligned} v(a,\varepsilon) &= u(\xi(a,\varepsilon)) = u(a)\,, \\ v(b,\varepsilon) &= u(\xi(b,\varepsilon)) = u(b)\,, \\ v(t,0) &= u(\xi(t,0)) = u(t)\,. \end{aligned}$$

Für das Folgende definieren wir noch die Funktion

$$\begin{aligned} \Psi(\varepsilon) &:= \mathcal{F}(v(\cdot,\varepsilon)) \\ &= \mathcal{F}\left(u(\xi(\cdot,\varepsilon))\right) \\ &= \int_I F(t, v(t,\varepsilon), v_t(t,\varepsilon))\,\mathrm{d}t, \end{aligned}$$

und lassen uns von der Idee leiten, dass im Fall $\mathcal{F}(u) \le \mathcal{F}(v(\cdot,\varepsilon))$ für alle $\varepsilon \in (-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$ und $\Psi \in C^1((-\varepsilon_0,\varepsilon_0))$ die Ableitung von Ψ an der Stelle Null verschwinden wird: $\Psi'(0) = 0$.

Definition 1.15 [Erste innere Variation]
$\partial\mathcal{F}(u,\lambda) := \Psi'(0)$ *heißt die* erste innere Variation *von $\mathcal{F}$ an der Stelle u in Richtung des* Variationsvektorfeldes λ.

Bemerkung:
Auch wenn $\Psi'(0)$ unter schwächeren Voraussetzungen an F, u und λ existiert, nennen wir diesen Ausdruck zukünftig erste innere Variation.

Proposition 1.16 [Innere Variation von $\mathcal{F}$]
Sei $F \in C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N)$, $u \in C^1(\overline{I}, \mathbb{R}^N)$ und $\lambda = \frac{\partial \xi}{\partial \varepsilon}(\cdot, 0)$ das Variationsvektorfeld einer zulässigen Parametervariation $\{\xi(\cdot,\varepsilon)\}_\varepsilon$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \partial\mathcal{F}(u,\lambda) = \int_I \Big[&\big[u'(x)\cdot F_p(x,u(x),u'(x)) - F(x,u(x),u'(x))\big]\,\lambda'(x) \\ &- F_x(x,u(x),u'(x))\lambda(x)\Big]\,\mathrm{d}x. \end{aligned} \tag{1.13}$$

Die Formel (1.13) gilt auch dann, wenn $u \in C^1(I,\mathbb{R}^N)$ ist und das Variationsvektorfeld λ kompakten Träger in I hat.

[3] Man beachte, dass die Forderungen an die Erhaltung der Randwerte impliziert, dass es sich automatisch um eine Schar *orientierungserhaltender* Diffeomorphismen handelt.

[4] Der Name Variationsvektorfeld ist bei eindimensionalen Defintionsbereichen etwas irreführend, da es sich bei λ umd ein skalares Feld handelt. Bei Variationsintegralen auf Gebieten $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ allerdings haben wir es tatsächlich mit Vektorfeldern (mit n Komponenten) zu tun.

Beweis. Sei $\tau(\cdot,\varepsilon)$ die Umkehrfunktion zu $\xi(\cdot,\varepsilon)$, d.h. $t=\tau(\xi(t,\varepsilon),\varepsilon)$ für alle $t\in\overline{I}$ und alle $\varepsilon\in(-\varepsilon_0,\varepsilon_0)$. Partielles Ableiten nach t beziehungsweise nach ε führt dann auf

$$1 = \tau_x(\xi(t,\varepsilon),\varepsilon)\xi_t(t,\varepsilon) \tag{1.14}$$
$$0 = \tau_x(\xi(t,\varepsilon),\varepsilon)\xi_\varepsilon(t,\varepsilon)+\tau_\varepsilon(\xi(t,\varepsilon),\varepsilon). \tag{1.15}$$

Aus $\xi(t,0)=t$ folgt $\tau(x,0)=x$ und damit durch Differentiation nach x (oder direkt aus (1.14) durch Einsetzen von $\varepsilon=0$)

$$\tau_x(x,0)=1,$$

und (1.15) schreibt sich für $\varepsilon=0$

$$0=\underbrace{\tau_x(t,0)}_{=1}\underbrace{\xi_\varepsilon(t,0)}_{=\lambda(t)}+\tau_\varepsilon(t,0)\ \text{ für alle }\ t\in\overline{I}\quad\Rightarrow\quad\tau_\varepsilon(x,0)=-\lambda(x)\ \text{ für alle }\ x\in\overline{I}, \tag{1.16}$$

wobei wir für die letzte Folgerung einfach die t-Variable in x umbenannt haben. Mit der Forderung $\tau\in C^2$ folgt aus der letzten Identität

$$\tau_{x\varepsilon}(x,0)=\tau_{\varepsilon x}(x,0)=-\lambda'(x).$$

Es ist

$$\Psi(\varepsilon)=\int_I F(t,v(t,\varepsilon),v_t(t,\varepsilon))\,\mathrm{d}t=\int_I F\Big(\tau(\xi(t,\varepsilon),\varepsilon),u(\xi(t,\varepsilon)),u'(\xi(t,\varepsilon))\xi_t(t,\varepsilon)\Big)\,\mathrm{d}t,$$

und für die Substitution $x=\xi(t,\varepsilon)$ gilt $\mathrm{d}x=\xi_t(t,\varepsilon)\,\mathrm{d}t=\mathrm{d}t/\tau_x(\xi(t,\varepsilon),\varepsilon)$, $x(a)=a$ und $x(b)=b$, so dass nach dem Transformationssatz

$$\Psi(\varepsilon)=\int_I F\left(\tau(x,\varepsilon),u(x),u'(x)\frac{1}{\tau_x(x,\varepsilon)}\right)\tau_x(x,\varepsilon)\,\mathrm{d}x$$

folgt. Die Ableitung nach ε und Auswertung an der Stelle $\varepsilon=0$ führen auf

$$\begin{aligned}\Psi'(0)=&\int_I\left[F_x(x,u(x),u'(x))\tau_\varepsilon(x,0)+F_p(x,u(x),u'(x))\cdot u'(x)\left(-\frac{\tau_{x\varepsilon}(x,0)}{\tau_x^2(x,0)}\right)\right]\tau_x(x,0)\,\mathrm{d}x\\&+\int_I F(x,u(x),u'(x))\tau_{x\varepsilon}(x,0)\,\mathrm{d}x\\=&\int_I\Big(\left[F_p(x,u(x),u'(x))\cdot u'(x)-F(x,u(x),u'(x))\right]\lambda'(x)-F_x(x,u(x),u'(x))\lambda(x)\Big)\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Falls u nur von der Klasse $C^1(I,\mathbb{R}^N)$ ist und λ kompakten Träger in I hat, dann existiert ein Teilintervall $J:=(c,d)\subset\subset I$, $-\infty<c<d<\infty$, (d.h. der Abschluss $\overline{J}=[c,d]$ ist ein endliches Teilintervall von I), so dass $u\in C^1(\overline{J},\mathbb{R}^N)$, und so dass der Träger $\operatorname{supp}\lambda$ in J enthalten ist. Definiere die Fortsetzung

$$U(x):=\begin{cases}u(x) & \text{für }\ x\in\overline{J}\\ u(c)+u'(c)(x-c) & \text{für }\ x<c\\ u(b)+u'(b)(x-b) & \text{für }\ x>b,\end{cases}$$

von $u|_{[c,d]}$ auf ganz $\mathbb{R}$. Dann ist $U\in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R}^N)\subset C^1(\overline{I},\mathbb{R}^N)$ und man beweist die Formel (1.13) zunächst für U. Da aber der Träger von λ in J enthalten ist, wo U mit u übereinstimmt, hat man (1.13) auch für u. $\square$

Lemma 1.17
Für eine beliebige Funktion $\lambda \in C_0^\infty(I)$ existiert eine zulässige Parametervariation $\{\xi(\cdot,\varepsilon)\}_\varepsilon$, deren Variationsvektorfeld mit λ übereinstimmt, d.h. mit

$$\lambda(t) = \frac{\partial \xi}{\partial \varepsilon}(t,0).$$

Beweis. Für ein beliebiges $\lambda \in C_0^\infty(I)$ setze $\tau(x,\varepsilon) := x - \varepsilon\lambda(x)$, wobei $|\varepsilon| < \varepsilon_0(\lambda) \ll 1$. Wir werden beweisen, dass dann die Schar $\{\xi(\cdot,\varepsilon)\}_\varepsilon := \{(\tau(\cdot,\varepsilon))^{-1}\}_\varepsilon$ eine zulässige Parametervariation mit λ als Variationsvektorfeld ist. Tatsächlich ist $\tau(\cdot,\varepsilon)$ eine bijektive Abbildung für ε hinreichend klein und damit global umkehrbar auf $\bar{I}$. Die Differenzierbarkeit der eindeutigen Umkehrabbildung $\xi(\cdot,\varepsilon) := (\tau(\cdot,\varepsilon))^{-1}$ folgt dann aus dem Umkehrsatz (siehe z.B. [4], wenn man $\tau \in C^\infty(\overline{I} \times (-\varepsilon_0,\varepsilon_0))$ mit $\tau_x(x,\varepsilon) = 1 - \varepsilon\lambda'(x) \neq 0$ für alle $\varepsilon < 1/\|\lambda'\|_{C^0(\bar{I})}$ berücksichtigt. Tatsächlich ist wegen $\operatorname{supp} \lambda \subset I$

$$\begin{aligned}
&\tau(a,\varepsilon) = a\,, \quad \tau(b,\varepsilon) = b \quad \Rightarrow \xi(a,\varepsilon) = \xi(\tau(a,\varepsilon),\varepsilon) = a\,, \quad \xi(b,\varepsilon) = b,\\
&\tau(x,0) = x, \quad \Rightarrow \tau_x(x,0) = 1 \quad \text{ und } \ \xi(t,0) = t,
\end{aligned}$$

womit die Schar $\{\xi(\cdot,\varepsilon)\}_\varepsilon$ nach Definition 1.14 eine zulässige Parametervariation ist, sobald man sich davon überzeugt hat, dass $\xi(\cdot,\cdot) \in C^2(\overline{I} \times (-\varepsilon_0,\varepsilon_0))$, was wir weiter unten tun. Zunächst folgt aus der Differentiation der Identität

$$\xi(\tau(t,\varepsilon),\varepsilon) = t \qquad \text{für alle } \ \varepsilon \in (-\varepsilon_0,\varepsilon_0), t \in I,$$

nach ε

$$\xi_t(\tau(t,\varepsilon),\varepsilon)\tau_\varepsilon(t,\varepsilon) = -\xi_\varepsilon(\tau(t,\varepsilon),\varepsilon),$$

was mit Hilfe von $\tau_\varepsilon(t,0) = -\lambda(t)$ und $\xi_t(t,0) = 1$ zu $\lambda(t) = \xi_\varepsilon(t,0)$ führt, so dass λ tatsächlich das Variationsvektorfeld von $\{\xi(\cdot,\varepsilon)\}_\varepsilon$ ist. Nun kommen wir zu dem Beweis der Regularität $\xi(\cdot,\cdot) \in C^2(\overline{I} \times (-\varepsilon_0,\varepsilon_0))$. Dazu fassen wir τ als Abbildung

$$\tau(\cdot,\cdot) : \mathbb{R} \times (-\varepsilon_0,\varepsilon_0) \to \mathbb{R} \times (-\varepsilon_0,\varepsilon_0)$$

auf, was möglich ist, indem man $\lambda \in C_0^\infty(I)$ durch Null auf ganz $\mathbb{R}$ fortsetzt. Dann gilt für die C^∞-glatte Abbildung

$$T : \mathbb{R} \times (-\varepsilon_0,\varepsilon_0) \to \mathbb{R} \times (-\varepsilon_0,\varepsilon_0)$$

definiert durch $T(x,\varepsilon) := (\tau(x,\varepsilon),\varepsilon)$, dass $\det DT(x,\varepsilon) = 1 - \varepsilon\lambda'(x) > 0$ für alle $|\varepsilon| < 1/\|\lambda\|_{C^1(\mathbb{R})}$, so dass für alle $(x_1,\varepsilon_1) \in \mathbb{R} \times (-\varepsilon_0,\varepsilon_0)$ die (eindeutig bestimmte) Umkehrabbildung $S = T^{-1}$ auf einer offenen Umgebung von $(\tau(x_1,\varepsilon_1),\varepsilon_1)$ existiert. Das bedeutet

$$S(T(x,\varepsilon)) = (x,\varepsilon) \qquad \text{für alle } \ (x,\varepsilon) \in B_\delta(x_1,\varepsilon_1) \subset \mathbb{R} \times (-\varepsilon_0,\varepsilon_0)$$

und $S \in C^\infty(B_\delta(x_1,\varepsilon_1), \mathbb{R} \times \mathbb{R})$ für ein hinreichend kleines $\delta > 0$. Insbesondere gilt für die erste Komponente

$$S^1(T(x,\varepsilon)) = S^1(\tau(x,\varepsilon),\varepsilon) = x \qquad \text{für alle } \ |\varepsilon - \varepsilon_1| \ll 1.$$

Wegen der Eindeutigkeit der Umkehrabbildung ist aber $S^1(t,\varepsilon) = \xi(t,\varepsilon)$ für alle $(t,\varepsilon) \in \overline{I} \times (-\varepsilon_0,\varepsilon_0)$ mit $|t - \tau(x_1,\varepsilon_1)| + |\varepsilon - \varepsilon_1| \ll 1$, so dass $\xi \in C^\infty(B_\sigma(\tau(x_1,\varepsilon_1),\varepsilon_1))$ für $0 < \sigma \ll 1$. Da (x_1,ε_1) beliebig in $\mathbb{R} \times (-\varepsilon_0,\varepsilon_0)$ gewählt waren, also speziell beliebig in $\overline{I} \times (-\varepsilon_0,\varepsilon_0)$, folgt $\xi \in C^\infty(\overline{I} \times (-\varepsilon_0,\varepsilon_0))$ wie gewünscht.

□

Korollar 1.18
Sei $F \in C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N)$. Falls für $u \in C^1(\overline{I}, \mathbb{R}^N)$ die Ungleichung $\mathcal{F}(u) \le \mathcal{F}(u(\xi(\cdot,\varepsilon)))$ für alle zulässigen Parametervariationen $\{\xi(\cdot,\varepsilon)\}_\varepsilon$ erfüllt ist, oder falls für $u \in C^1(I, \mathbb{R}^N)$ auch nur die Identität

$$\frac{d}{d\varepsilon}\bigg|_{\varepsilon=0} \mathcal{F}(u(\xi(\cdot,\varepsilon))) = 0 \tag{1.17}$$

für alle zulässigen Parametervariationen $\xi(\cdot,\varepsilon)$ mit Variationsvektorfeldern mit kompakten Trägern in I gilt, dann ist

$$\int_I \Big(\big[u' \cdot F_p(\cdot,u,u') - F(\cdot,u,u')\big]\, \lambda' - F_x(\cdot,u,u')\lambda \Big)\, \mathrm{d}x = 0 \quad \forall\ \lambda \in C_0^\infty(I).$$

Beweis. Zu $\lambda \in C_0^\infty(I)$ existiert nach Lemma 1.17 eine zulässige Parametervariation $\{\xi(\cdot,\varepsilon)\}_\varepsilon$ mit λ als Variationsvektorfeld. Wenden wir Proposition 1.16 nun auf diese zulässige Parametervariation an, dann erhalten wir aus (1.13) die Form für die erste innere Variation in Richtung von λ. Das Verschwinden dieser ersten inneren Variation folgt aus der angenommenen Minimalität von u, oder aus der alternativ in (1.17) angenommenen Kritikalität von u bezüglich innerer Variationen mit Variationsvektorfeldern mit kompakten Trägern in I. □

Proposition 1.19 [Erdmann- und Noether-Gleichung]
Seien $F \in C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N)$ und $u \in C^1(I, \mathbb{R}^N)$. Falls $\frac{d}{d\varepsilon}|_{\varepsilon=0}\mathcal{F}(u(\xi(\cdot,\varepsilon))) = 0$ für alle zulässigen Parametervariationen ξ, deren Variationsvektorfelder kompakten Träger in I haben, dann existiert für jede Zahl $d \in (a,b) = I$ eine Konstante $c_d \in \mathbb{R}$, so dass

$$E(x,u(x),u'(x)) = c_d - \int_d^x F_x(y,u(y),u'(y))\,\mathrm{d}y \qquad \text{für alle } \ x \in I \quad (\text{Erdmann-Gleichung}), \tag{1.18}$$

wobei $E(x,z,p) := p \cdot F_p(x,z,p) - F(x,z,p)$. Weiterhin gilt

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big(E(x,u(x),u'(x))\Big) + F_x(x,u(x),u'(x)) = 0 \qquad \text{für alle } \ x \in I \quad (\text{Noether-Gleichung}). \tag{1.19}$$

Falls zusätzlich $u \in C^1(\overline{I}, \mathbb{R}^N)$, dann gelten die Gleichungen (1.18) und (1.19) sogar auf $\overline{I}$. Weiterhin könnte man dann in (1.18) auch a anstelle von d wählen, so dass in dem Fall eine Zahl $c_a \in \mathbb{R}$ anstelle von c_d in (1.18) aufträte.

Bemerkung:
Im Spezialfall $F = F(z,p) \in C^2(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N)$ und $u \in C^2(I, \mathbb{R}^N)$ folgt (1.18) direkt aus Gleichung (1.12) in Proposition 1.13.

Beweis. Nach Korollar 1.18 gilt

$$\int_I \Big(\big(u' \cdot F_p(\cdot,u,u') - F(\cdot,u,u')\big)\, \lambda' - F_x(\cdot,u,u')\lambda \Big)\, \mathrm{d}x = 0 \qquad \text{für alle } \ \lambda \in C_0^\infty(I).$$

Für $d \in (a,b)$ ergibt sich nach einer partiellen Integration

$$\int_I \left(u'(x) \cdot F_p(x,u(x),u'(x)) - F(x,u(x),u'(x)) + \int_d^x F_x(y,u(y),u'(y))\,\mathrm{d}y \right) \lambda'(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

Nach dem Fundamentallemma von DuBois-Reymond, Lemma 1.10, gibt es ein $c_d \in \mathbb{R}$, so dass

$$u'(x) \cdot F_p(x, u(x), u'(x)) - F(x, u(x), u'(x)) + \int_d^x F_x(y, u(y), u'(y))\,\mathrm{d}y = c_d \quad \forall\, x \in I,$$

womit (1.18) bewiesen ist.

Für $x_0 \in I$ wähle nun $\delta > 0$, so dass $B_\delta(x_0) \subset I$. Dann ist die Funktion

$$f(x) := \int_d^x F_x(y, u(y), u'(y))\,\mathrm{d}y, \quad x \in B_\delta(x_0),$$

in der Klasse $C^1(B_\delta(x_0))$, und wir können die Erdmann-Gleichung (1.18) in $B_\delta(x_0)$ differenzieren und erhalten so die Noether-Gleichung (1.19) für alle $x \in B_\delta(x_0)$, speziell also in x_0 selbst. Da $x_0 \in I$ beliebig gewählt war, folgt die Behauptung. Falls $u \in C^1(\overline{I}, \mathbb{R}^N)$, dann sind alle Ausdrücke in (1.18) und (1.19) stetig auf $\overline{I}$ fortsetzbar. Zusätzlich könnte man in (1.18) dann auch a als Anfangspunkt der Integration wählen, so dass diese Gleichung (mit einem möglicherweise anderen Vektor c_a anstelle von c_d) auf ganz $\overline{I}$ gilt. □

Beispiel $\boxed{1.8}$
Für eine Zahl $\alpha > 1$ sei die Funktion $H = H(z,p) \in C^1(\mathbb{R}^N \times (\mathbb{R}^N \setminus \{0\}))$ positiv α-homogen in p, d.h.

$$H(z, tp) = t^\alpha H(z,p) \text{ für alle } t > 0. \tag{H}$$

Zunächst folgt aus dieser Homogenitätsrelation durch den Grenzübergang $t \downarrow 0$, dass sich die Funktion H durch den Wert $H(z,0) := 0$ für jedes $z \in \mathbb{R}^N$ stetig auf den Ganzraum $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$ fortsetzen lässt. Differentiation von (H) nach der p-Variablen liefert $tH_p(z,tp) = t^\alpha H_p(z,p)$ und damit die positive $(\alpha-1)$-Homogenität des Gradienten H_p in der p-Variablen. Da nach Voraussetzung $\alpha - 1 > 0$, liefert dasselbe Fortsetzungsargument, dass wir ohne Einschränkung $H \in C^1(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N)$ annehmen dürfen. Durch Differentiation nach t folgt nun

$$\begin{aligned}
& H_p(z,tp)\cdot p = \alpha t^{\alpha-1} H(z,p) \quad \forall t > 0 \\
\Rightarrow\quad & H_p(z,p)\cdot p = \alpha H(z,p) \\
\Rightarrow\quad & E := p\cdot H_p - H = (\alpha-1)H \\
\overset{(1.19)}{\Rightarrow}\quad & H(u(.), u'(.)) = \mathit{konst.} \text{ auf } \overline{I} \quad \forall u \in C^1(\overline{I}, \mathbb{R}^N) \text{ mit } \partial\mathcal{H}(u,\lambda) = 0\ \forall \lambda \in C_0^\infty(I),
\end{aligned}$$

wobei

$$\mathcal{H}(u) := \int_I H(u(x), u'(x))\,\mathrm{d}x.$$

Sei nun speziell $H(z,p) > 0$ für alle $z \in \mathbb{R}^N$ und für $|p| \neq 0$ und außerdem $u(a) \neq u(b)$. Dann existiert ein $\xi \in (a,b)$ mit $u'(\xi) \neq 0$, und es folgt

$$\begin{aligned}
& 0 < H(u(\xi), u'(\xi)) = H(u(x), u'(x)) \\
\Rightarrow\quad & u'(x) \neq 0 \quad \forall x \in \overline{I},
\end{aligned}$$

denn wir hatten (nach Fortsetzung) $H(z,0) = 0$. Damit ist $u \in C^1(\overline{I}, \mathbb{R}^N)$ eine *reguläre Kurve*. Schwache kritische Punkte bezüglich innerer Variationen für Variationsintegrale mit derart homogenen Integranden sind also automatisch regulär parametrisiert. Diese Beobachtung lässt sich beispielsweise bei der Regularitätstheorie für Hindernisprobleme solcher Variationsintegrale ausnutzen. Tatsächlich kann man a priori mitunter nicht feststellen, ob und wo die Lösung das Hindernis berührt. Abhängig von der jeweiligen Berührsituation kann es schwierig oder gar unmöglich sein, zulässige *äußere* Variationen $u + \varepsilon\varphi$ zu finden. Innere Variationen hingegen führen zu keiner Änderung im Bildbereich der Lösung, so dass solche Variationen eine Hindernisbedingung automatisch respektieren und damit zulässig sind, siehe auch Kapitel 5, Abschnitt 5.1. Für ähnliche Schlüsse bei Variationsproblemen für parametrische Flächen siehe z.B. [54], [55], [57]; dort liefert das Verschwinden der ersten inneren Variation des Funktionals die *konforme Parametrisierung* der Lösungen.

1.3 Variationsprobleme mit Nebenbedingungen, Lagrange-Multiplikatorregel

In diesem Abschnitt werden Variationsprobleme der Art

$$\mathcal{F}(v) := \int_I F(x, v(x), v'(x))\,\mathrm{d}x \longrightarrow \min!$$

in bestimmten Funktionenklassen vom Typ

$$\mathcal{C} := \{v \in C^1(\overline{I}, \mathbb{R}^N) : \textbf{ Randdaten für } v \textbf{ auf } \partial I, \textbf{ Nebenbedingungen für } v\}$$

betrachtet. Hierbei gibt es unterschiedliche Arten von Nebenbedingungen, von denen wir einige im Folgenden nennen, und nur die erste Art dieser Nebenbedingungen soll hier anschließend näher betrachtet werden.

A. Isoperimetrische Nebenbedingungen

$$\mathcal{G}(v) := \int_I G(x, v(x), v'(x))\,\mathrm{d}x \overset{!}{=} \omega\,, \quad \omega \in \mathbb{R}.$$

Beispiel

Betrachte für $N = 1$ das Variationsintegral

$$\mathcal{F}(v) := \int_I \Big(v'^2(x) + c(x)v^2(x)\Big)\,\mathrm{d}x \;\longrightarrow\; \min!$$

in der Klasse

$$\mathcal{C}(\alpha, \beta, \omega) := \{v \in C^1(\overline{I}) : v(a) = \alpha,\ v(b) = \beta,\ \int_I v^2(x)\,\mathrm{d}x = \omega\}$$

für gegebene Randwerte $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, was auf Eigenwertprobleme für einen speziellen Sturm-Liouville-*Operator* führt, vgl. Beispiel 1.1.

B. Holonome Nebenbedingungen

$$G(x, v(x)) = 0 \quad \forall x \in I.$$

$\boxed{\text{Beispiel}}$

Zu untersuchen ist für $N = 3$

$$\mathcal{L}(v) := \int_I |v'(x)| \, \mathrm{d}x \longrightarrow \text{ min!}$$

in der Klasse

$$\mathcal{C}(P_1, P_2, \mathbb{S}^2) := \{v \in C^1(\overline{I}, \mathbb{R}^3) : v(a) = P_1, \ v(b) = P_2, \ |v(x)|^2 = 1 \ \forall x \in I\}.$$

Man minimiert also die Länge von Kurven auf der Einheitssphäre $\mathbb{S}^2$ mit fixierten Endpunkten $P_1, P_2 \in \mathbb{S}^2$. Im Gegensatz zu dem gewichteten Längenfunktional in Beispiel 1.3 für Graphen im $\mathbb{R}^2$ betrachten wir hier das ungewichtete *parametrische Längenfunktional* (mit Gewicht $\omega(x, z) \equiv 1$).

C. Nichtholonome Nebenbedingungen

$$G(x, v(x), v'(x)) = 0 \quad \forall x \in I.$$

$\boxed{\text{Beispiel}}$

Gegeben sei für $N = 3$ das Minimierungsproblem

$$\mathcal{F}(v) := \int_I v^3(x) \, \mathrm{d}x \longrightarrow \text{ min!}$$

(wobei v^3 die dritte Komponente bezeichnet) in der Klasse

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{C}}(P_1, P_2) := \{v = (v^1, v^2, v^3) \in C^1(\overline{I}, \mathbb{R}^3) : v(a) = P_1, \ v(b) = P_2, \\ |v(x)|^2 = 1, \ |v'(x)| = 1 \ \text{ für alle } \ x \in I\}. \end{aligned}$$

Dieses Variationsproblem stellt ein einfaches Modell für einen nicht dehnbaren Faden auf der Einheitssphäre $\mathbb{S}^2$ mit Endpunkten $P_1, P_2 \in \mathbb{S}^2$ dar, auf den die Gewichtskraft in die dritte Koordinatenrichtung wirkt.

D. Ungleichungsnebenbedingungen

$$G(x, v(x), v'(x)) \geq 0 \quad \forall x \in I.$$

$\boxed{\text{Beispiel}}$

Sei $N = 1$ und $I = (a, b)$ mit $-\infty < a \leq -1 < 1 \leq b < \infty$. Man betrachtet das Längenfunktional für Graphen

$$\mathcal{L}(v) := \int_I \sqrt{1 + v'^2(x)} \, \mathrm{d}x \longrightarrow \text{ min!}$$

in der Klasse

$$\mathcal{C}(h) := \{v \in C^1(\overline{I}) : v(a) = 0, \ v(b) = 0, \ \ v(x) \geq h(x) := 1 - |x|\}.$$

Dies entspricht dem in Abbildung 1.2 dargestellten Hindernisproblem.

Dieses Beispiel macht insbesondere deutlich, welche Schwierigkeiten mit der Wahl der betrachteten Klasse zusammenhängen: So ist etwa für $a = -1, b = 1$ die kürzeste Verbindung der beiden Punkte, die der Ungleichung genügt, nämlich die Funktion $u(x) = 1 - |x| = h(x)$, keine C^1-Funktion.

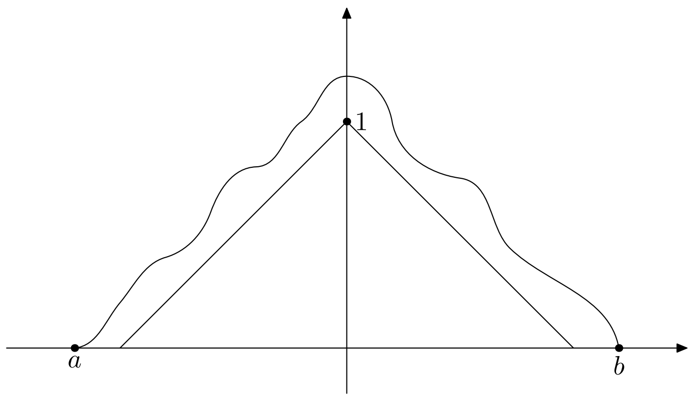

Abbildung 1.2: $v(x)$ soll für alle $v \in \mathcal{C}(h)$ größer oder gleich als $h(x) = 1 - |x|$ sein.

Für isoperimetrische Nebenbedingungen ergibt sich die für die klassische Variationsrechnung zentrale

Proposition 1.20 [Lagrange-Multiplikator-Regel]
Seien $F, G \in C^1(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^N)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^N$, $\omega \in \mathbb{R}$ und $\delta > 0$. Es gelte für ein $u \in \mathcal{C}(\alpha,\beta,\omega)$

$$\mathcal{F}(u) \leq \mathcal{F}(v) \quad \textit{für alle} \;\; v \in \mathcal{C}(\alpha,\beta,\omega) \quad \text{mit } \|u-v\|_{C^1(\bar{I},\mathbb{R}^N)} < \delta,$$

wobei

$$\mathcal{C}(\alpha,\beta,\omega) := \{v \in C^1(\overline{I},\mathbb{R}^N) : v(a) = \alpha,\, v(b) = \beta,\, \mathcal{G}(v) := \int_I G(x, v(x), v'(x))\,\mathrm{d}x = \omega\}.$$

Weiterhin existiere ein $\tilde{\psi} \in C_0^\infty(I,\mathbb{R}^N)$, so dass $\delta\mathcal{G}(u,\tilde{\psi}) \neq 0$. Dann gibt es ein $\lambda \in \mathbb{R}$, so dass u ein schwacher kritischer Punkt von $\mathcal{F} + \lambda\mathcal{G}$ ist, d.h.

$$\delta\mathcal{F}(u,\varphi) + \lambda\delta\mathcal{G}(u,\varphi) = 0 \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(I,\mathbb{R}^N), \tag{1.20}$$

und es gilt

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[F_p(\cdot,u,u') + \lambda G_p(\cdot,u,u')\right] - \left[F_z(\cdot,u,u') + \lambda G_z(\cdot,u,u')\right] = 0 \qquad \textit{auf } \overline{I}. \tag{1.21}$$

Beweis. Wir definieren $\psi := \frac{\tilde{\psi}}{\delta\mathcal{G}(u,\tilde{\psi})}$, so dass $\delta\mathcal{G}(u,\psi) = 1$ wegen der Linearität des Funktionals $\delta\mathcal{G}(u,.)$. Desweiteren setzen wir für eine gegebene Funktion $\varphi \in C_0^\infty(I,\mathbb{R}^N)$

$$\begin{aligned}\Phi(\varepsilon,t) &:= \mathcal{F}(u+\varepsilon\varphi+t\psi),\\ \Gamma(\varepsilon,t) &:= \mathcal{G}(u+\varepsilon\varphi+t\psi)\end{aligned}$$

für $\varepsilon \in (-\varepsilon_0,\varepsilon_0)$ und $t \in (-t_0,t_0)$, wobei

$$0 < \varepsilon_0 = \varepsilon_0(\varphi) := \frac{\delta}{2\|\varphi\|_{C^1(\bar{I},\mathbb{R}^N)}+1}, \qquad 0 < t_0 = t_0(\psi) := \frac{\delta}{2\|\psi\|_{C^1(\bar{I},\mathbb{R}^N)}}.$$

Dann gilt $\Gamma(0,0) = \omega$ und $\Gamma_t(0,0) = \delta\mathcal{G}(u,\psi) = 1$. Um Γ nur noch als Funktion von ε auffassen zu können, verwenden wir den Satz über implizite Funktionen: Danach gibt es $\varepsilon_1 \in (0,\varepsilon_0]$, so dass eine Funktion $\tau = \tau(\varepsilon) \in C^1((-\varepsilon_1,+\varepsilon_1))$ mit $\tau(0) = 0$ existiert, so dass

$$\Gamma(\varepsilon,\tau(\varepsilon)) = \omega \qquad \text{für alle } \; \varepsilon \in (-\varepsilon_1,+\varepsilon_1). \tag{1.22}$$

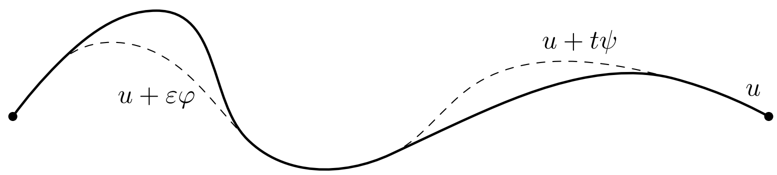

Abbildung 1.3: u wird durch φ und ψ gestört.

Einerseits folgt daraus durch Differentiation nach ε

$$\Gamma_\varepsilon(0,0) + \underbrace{\Gamma_t(0,0)}_{=1}\tau_\varepsilon(0) = 0\,, \quad \text{also} \quad \tau_\varepsilon(0) = -\Gamma_\varepsilon(0,0) = -\delta\mathcal{G}(u,\varphi).$$

Andererseits gilt wegen (1.22)

$$u + \varepsilon\varphi + \tau(\varepsilon)\psi \in \mathcal{C}(\alpha,\beta,\omega) \text{ für alle } \varepsilon \in (-\varepsilon_1, \varepsilon_1).$$

Wegen der Stetigkeit von τ findet man mit $\tau(0) = 0$ darüberhinaus ein $\varepsilon_2 \in (0, \varepsilon_1]$, so dass

$$\|u - (u + \varepsilon\varphi + \tau(\varepsilon)\psi)\|_{C^1(\overline{I},\mathbb{R}^N)} < \delta \qquad \text{für alle } \varepsilon \in (-\varepsilon_2, \varepsilon_2).$$

Wegen der Minimaleigenschaft von u gilt deshalb $\Phi(0,0) \le \Phi(\varepsilon, \tau(\varepsilon))$ für alle $\varepsilon \in (-\varepsilon_2, \varepsilon_2)$, und damit

$$\begin{aligned} 0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} \Phi(\varepsilon,\tau(\varepsilon)) &= \Phi_\varepsilon(0,0) + \Phi_t(0,0)\tau_\varepsilon(0) \\ &= \delta\mathcal{F}(u,\varphi) + \delta\mathcal{F}(u,\psi)\,(-\delta\mathcal{G}(u,\varphi)), \end{aligned}$$

womit die Behauptung für $\lambda := -\delta\mathcal{F}(u,\psi)$ bewiesen ist. Nach Korollar 1.11 folgt auch (1.21). □

Beispiel $\boxed{1.9}$ [Sturm-Liouvillesches Eigenwertproblem]
Wir betrachten für $N = 1$ das Variationsproblem

$$\mathcal{F}(v) := \int_I \Big(v'^2(x) + c(x)v^2(x)\Big)\,\mathrm{d}x \longrightarrow \min!$$

(vgl. Beispiel 1.1) mit den Neben- und Randbedingungen

$$\mathcal{G}(v) := \int_I v^2(x)\,\mathrm{d}x \equiv \omega \neq 0, \qquad v(a) = 0 = v(b). \tag{1.23}$$

Wir haben also für den Integranden $G(x,z,p) = z^2$ der isoperimetrischen Nebenbedingung mit $G_p(x,z,p) = 0$ und $G_z(x,z,p) = 2z$

$$\delta\mathcal{G}(u,\tilde\psi) = \int_I G_z(x,u(x),u'(x))\tilde\psi(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_I u(x)\tilde\psi(x)\,\mathrm{d}x.$$

Wäre dieser Ausdruck gleich Null für alle $\tilde\psi \in C_0^\infty(I)$, dann erhielte man $u \equiv 0$ nach dem Fundamentallemma der Variationsrechnung, Lemma 1.4, woraus aber sofort $\mathcal{G}(u) = 0 \neq \omega$ im Widerspruch zu (1.23) folgen würde. Damit ist die Nichtentartungsbedingung aus Proposition 1.20 für dieses Beispiel verifiziert. Die LAGRANGE-Multiplikatorregel mit Gleichung (1.21) ergibt für die Lösung $u \in C^2(I) \cap C^1(\overline{I})$ die EULER-LAGRANGE-Gleichung

$$\exists \lambda \in \mathbb{R}: \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[2u'(x)] - [2c(x)u(x) + \lambda 2u(x)] = 0. \tag{ELG$_{1.9}$}$$

Die Lösung u ist also eine *Eigenfunktion* des STURM-LIOUVILLE-Operators

$$-\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + c$$

zum reellen EIGENWERT $-\lambda$.

Beispiel $\boxed{1.10}$ [Klassisches isoperimetrisches Problem]
Wir untersuchen das Problem, diejenige einfache geschlossene Kurve $\gamma \subset \mathbb{R}^2$ mit vorgegebener Länge zu finden, welche den maximalen Flächeninhalt einschließt. Wir gehen dabei von der Annahme aus, dass eine C^2-Kurve γ als Lösung existiert. Außerdem begnügen wir uns mit dem anschaulich leicht verständlichen graphischen Argument, dass die gesuchte Kurve konvex sein muss, da sonst der Flächeninhalt nicht maximal sein kann. Tatsächlich kann man im Falle einer nicht konvexen Kurve "Einbuchtungen" an einer zugehörigen *Stützgeraden* nach außen reflektieren und erhält somit eine Kurve gleicher Länge, die einen strikt größeren Flächeninhalt einschließt, siehe Abbildung 1.4. Zur Vereinfachung der folgenden Argumentation gehen wir davon aus, dass das von γ eingeschlossene Gebiet sogar strikt konvex ist.

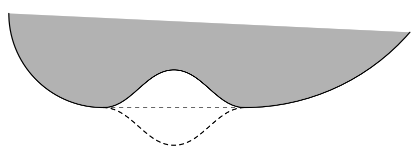

Abbildung 1.4: Die Kurve muss konvex sein.

In Vorwegnahme des Ergebnisses gilt es nun zu beweisen, dass jedes Teilstück von γ ein Kreisbogen ist; daraus folgt dann auch sofort, dass die Kurve insgesamt eine Kreislinie ist, da vorausgesetzt war, dass γ von der Klasse C^2 ist.

Sei ein Teilstück von γ nun als Graph einer Funktion $u \in C^2([a,b])$ parametrisiert. Dann löst u zu gegebenem $w \in C^2([a,b])$ das folgende Variationsproblem:

$$\mathcal{A}(v) := \int_a^b (v(x) - w(x))\,\mathrm{d}x \longrightarrow \max!$$

in der Klasse

$$\begin{aligned} \mathcal{C}(P_1, P_2, \ell) \quad := \quad & \{v \in C^2([a,b]) : (a, v(a)) = P_1,\ (b, v(b)) = P_2,\ v > w, \\ & \mathcal{L}(v) := \int_a^b \sqrt{1 + v'^2(x)}\,\mathrm{d}x \stackrel{!}{=} \ell\}, \end{aligned}$$

wobei wegen der strikten Konvexität des von γ eingeschlossenen Gebietes eine Gerade ausgeschlossen wird, also $\ell > |P_1 - P_2|$. Die Lösung u erfüllt folglich

$$\mathcal{A}(u) = \sup_{\mathcal{C}(P_1, P_2, \ell)} \mathcal{A}(.),$$

und wir bemerken, dass die Herleitung der LAGRANGE-Multiplikatorregel in Proposition 1.20 vollkommen analog verläuft, wenn man einen lokalen Maximierer in der zulässigen Menge anstelle eines lokalen Minimierers annimmt.

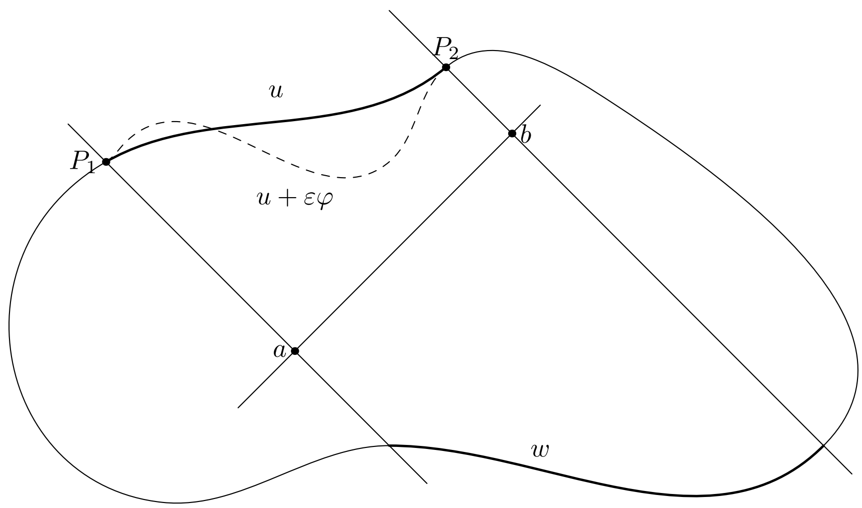

Abbildung 1.5: Zur Berechnung des Flächeninhalts.

Um nun die LAGRANGE-Multiplikator-Regel aus Proposition 1.20 tatsächlich anwenden zu können, muss noch nachgeprüft werden, ob ein $\tilde{\psi} \in C_0^\infty((a,b))$ existiert, so dass $\delta\mathcal{L}(u,\tilde{\psi}) \neq 0$. Da nun $\mathcal{L}(u) = \ell > |P_1 - P_2|$ gilt, ist mit Sicherheit $u' \neq konst.$, und damit verschwindet auch die Krümmung κ von u nicht identisch. Nach der Rechnung in Beispiel 1.3 wissen wir, dass

$$\delta\mathcal{L}(u,\tilde{\psi}) = \int_a^b \frac{u'(x)}{\sqrt{1+u'^2(x)}}\tilde{\psi}'(x)\,\mathrm{d}x = -\int_a^b \kappa(x)\tilde{\psi}(x)\,\mathrm{d}x.$$

Wäre nun dieser Ausdruck gleich Null für alle $\tilde{\psi} \in C_0^\infty((a,b))$, dann hätten wir nach dem Fundamentallemma, Lemma 1.4, für dieses Teilstück von γ eine verschwindende Krümmung im Widerspruch zur Annahme der strikten Konvexität.

Auch ohne die geometrische Deutung als Krümmung kann man mit Lemma 1.4 aus der Widerspruchsannahme $\delta\mathcal{L}(u,\tilde{\psi}) = 0$ für alle $\tilde{\psi} \in C_0^\infty((a,b))$ schließen

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{u'}{\sqrt{1+u'^2}}\right) = 0 \quad \text{auf } (a,b),$$

woraus folgt, dass

$$\frac{u'}{\sqrt{1+u'^2}} \equiv konst. =: c \quad \text{auf } (a,b).$$

Falls $c = 0$ folgt sofort $u' \equiv 0$ im Widerspruch zur Annahme, dass u keine Gerade beschreibt. Da $u' \not\equiv 0$ gilt $c \in (-1,1)$, und damit wird folgende Umformung nach Quadrierung möglich:

$$\begin{aligned} u'^2 &= (1+u'^2)c^2 \\ \Rightarrow \quad u'^2(1-c^2) &= c^2 \\ \Rightarrow \quad u'^2 &= \frac{c^2}{1-c^2}, \end{aligned}$$

was aber wieder bedeuten würde, dass $u' \equiv konst.$ wiederum im Widerspruch zur Annahme.

Da $u \in C^2([a,b])$, gibt es nach Proposition 1.20 einen LAGRANGE-Multiplikator $\lambda \in \mathbb{R}$ so dass die EULER-LAGRANGE-Gleichung

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[A_p(x,u(x),u'(x)) + \lambda L_p(x,u(x),u'(x))] - [A_z(x,u(x),u'(x)) + \lambda L_z(x,u(x),u'(x))] = 0$$

erfüllt ist, wobei

$$A(x,z,p) = z - w(x) \quad \text{und} \quad L(x,z,p) = \sqrt{1+p^2}.$$

Es ist

$$\begin{aligned}
A_z(x,u(x),u'(x)) &= 1,\\
A_p(x,u(x),u'(x)) &= 0,\\
L_z(x,u(x),u'(x)) &= 0,\\
L_p(x,u(x),u'(x)) &= \frac{u'(x)}{\sqrt{1+u'^2(x)}},
\end{aligned}$$

also

$$\lambda\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{u'(x)}{\sqrt{1+u'^2(x)}}\right) - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \kappa = \frac{1}{\lambda} = konst., \tag{ELG$_{1.10}$}$$

und da ein Geradenstück ausgeschlossen wurde, erlaubt die konstante Krümmung nur noch den Schluss auf einen Kreisbogen[5].

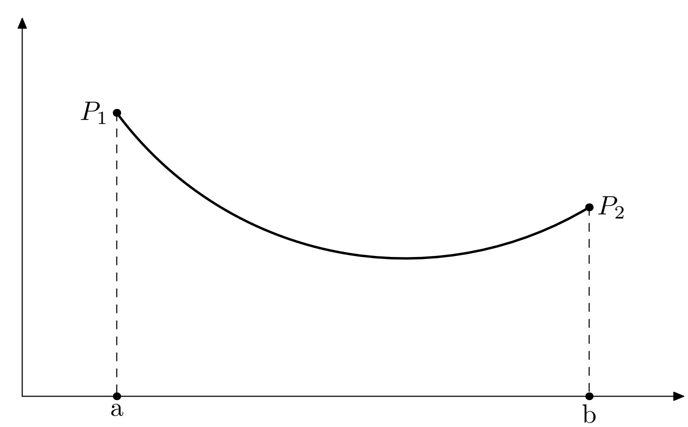

Abbildung 1.6: Die hängende Kette.

Beispiel $\boxed{1.11}$ **[Die hängende Kette]**
Eine idealisierte Kette fester Länge wird an ihren Enden in einem homogenen Schwerefeld an zwei Punkten P_1 und P_2 aufgehängt. Dabei krümmt sie sich derart, dass ihre potentielle Energie minimiert wird. Die potentielle Energie ist direkt proportional zur Höhe des

[5]Im $\mathbb{R}^3$ hingegen könnte man auch noch Spiralen konstanter Krümmung erhalten, vgl. z.B. [29, Übung 1, S. 19].

Schwerpunktes. Der Schwerpunkt einer parametrisierten Kurve $t \mapsto \gamma(t) \in \mathbb{R}^N$, $t \in [t_1, t_2]$, wird durch den Vektor

$$\frac{\int_\gamma \gamma(s)\, ds}{\int_\gamma ds} := \frac{\int_{t_1}^{t_2} \gamma(t)|\dot\gamma(t)|\, \mathrm{d}t}{\int_{t_1}^{t_2} |\dot\gamma(t)|\, \mathrm{d}t}$$

beschrieben. Es ist vernünftig anzunehmen, dass die Lösungskurve als Graph einer skalaren Funktion $v : [a,b] \to \mathbb{R}$ darstellbar ist. Für eine solche Kurve hat der Ortsvektor des Schwerpunktes die folgende Form:

$$\frac{\int_a^b \begin{pmatrix} x \\ v(x) \end{pmatrix} \sqrt{1+v'^2(x)}\, \mathrm{d}x}{\int_a^b \sqrt{1+v'^2(x)}\, \mathrm{d}x}.$$

Da die hängende Kette mit gegebener Länge sich so ausrichtet, dass ihr Schwerpunkt möglichst tief liegt, lautet das zugehörige Minimierungsproblem (vgl. Beispiel $\boxed{1.3}$ für $\omega(x,z) := z$)

$$\mathcal{F}(v) := \int_I v(x)\sqrt{1+v'^2(x)}\, \mathrm{d}x \longrightarrow \min!$$

in der Klasse

$$\mathcal{C}(P_1,P_2,\omega) := \{v \in C^1(\bar I) : (a,v(a)) = P_1,\ (b,v(b)) = P_2,\ \mathcal{L}(v) = \omega\} \qquad \text{mit } \omega > |P_1 - P_2|.$$

Wie im vorherigen Beispiel gibt es wegen $\mathcal{L}(v) > |P_1 - P_2|$ eine Funktion $\tilde\psi \in C_0^\infty(I)$ mit $\delta\mathcal{L}(u,\tilde\psi) \neq 0$ für einen Minimierer $u \in \mathcal{C}(P_1,P_2,\omega)$, so dass nach Proposition 1.20 ein $\lambda \in \mathbb{R}$ existiert mit

$$\delta\mathcal{F}(u,\varphi) + \lambda\delta\mathcal{L}(u,\varphi) = 0 \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(I).$$

Für einen Minimierer $u \in C^2(\bar I)$ lautet dann die Euler-Lagrange-Gleichung

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{u(x)u'(x)}{\sqrt{1+u'^2(x)}} + \lambda\frac{u'(x)}{\sqrt{1+u'^2(x)}}\right] - \sqrt{1+u'^2(x)} = 0. \qquad (\mathrm{ELG}_{1.11})$$

Aus der Gestalt dieser Differentialgleichung liest man ab, dass $\tilde u := u + \lambda$ ein schwacher kritischer Punkt des Funktionals $\mathcal{F}$ ist, also gilt[6]

$$\begin{aligned}
& \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{\tilde u(x)\tilde u'(x)}{\sqrt{1+\tilde u'^2(x)}}\right] - \sqrt{1+\tilde u'^2(x)} = 0 \\
\Rightarrow\quad & \frac{\tilde u'^2(x)}{\sqrt{1+\tilde u'^2(x)}} + \tilde u(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{\tilde u'(x)}{\sqrt{1+\tilde u'^2(x)}}\right] - \sqrt{1+\tilde u'^2(x)} = 0 \\
\Rightarrow\quad & \tilde u(x)\kappa(x)\sqrt{1+\tilde u'^2(x)} = 1 \\
\Rightarrow\quad & \kappa(x) \neq 0 \quad \forall x \in I.
\end{aligned}$$

Letzteres impliziert, dass $\tilde u$ und damit auch u selbst entweder strikt konvex oder strikt konkav ist.

[6] Anstelle der expliziten Rechnung könnte man hier auch die Krümmungsgleichung ($\mathrm{ELG}_{1.3}$) aus Beispiel $\boxed{1.3}$ für das Gewicht $\omega(x,z) := z$ zitieren, aus der das Nichtverschwinden der Krümmung κ von $\tilde u$ folgt.

Anstatt diese Differentialgleichung zu lösen, machen wir mit Proposition 1.13 von der Erhaltungsgröße $E(z,p) = pF_p(z,p) - F(z,p) \equiv h \in \mathbb{R}$ Gebrauch:

$$E(\tilde{u}(x), \tilde{u}'(x)) = \frac{\tilde{u}(x)\tilde{u}'^2(x)}{\sqrt{1+\tilde{u}'^2(x)}} - \tilde{u}(x)\sqrt{1+\tilde{u}'^2(x)} = h.$$

Dies können wir umformen zu

$$\tilde{u}\tilde{u}'^2 - \tilde{u}(1+\tilde{u}'^2) = h\sqrt{1+\tilde{u}'^2},$$

oder

$$\frac{\tilde{u}^2}{h^2} = 1 + \left(\frac{d\tilde{u}}{dx}\right)^2,$$

woraus

$$\frac{\mathrm{d}\tilde{u}(x)}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{h}\sqrt{\tilde{u}^2(x) - h^2}$$

folgt, was wir nach Separation der Variablen integrieren können:

$$x - a = \int_a^x \mathrm{d}y = h\int_{\tilde{u}(a)}^{\tilde{u}(x)} \frac{\mathrm{d}\tilde{u}}{\sqrt{\tilde{u}^2 - h^2}} = h \operatorname{arcosh}\left(\frac{\tilde{u}}{h}\right)\Big|_{\tilde{u}(a)}^{\tilde{u}(x)}.$$

Die hängende Kette wird also durch einen hyperbolischen Cosinus beschrieben, wobei die Integrationskonstanten noch aus den Randdaten zu bestimmen sind; denn direktes Nachrechnen ergibt, dass diese Lösung des Erhaltungssatzes auch Lösung der Euler-Lagrange-Gleichung ist.

Beispiel $\boxed{1.12}$ **[Rotationssymmetrische Minimalflächen]**
Wie im vorigen Beispiel betrachten wir eine Kurve, die als Graph über der x-Achse zwei Punkte P_1 und P_2 miteinander verbindet. Durch Drehung um die x-Achse erzeugt diese Kurve als *Profilkurve* eine zweidimensionale Rotationsfläche Σ im $\mathbb{R}^3$. Nun suchen wir Rotationsflächen mit minimalem Flächeninhalt, d.h. wir betrachten das Variationsproblem[7]

$$\mathcal{A}(\Sigma) := 2\pi \int_I |v(x)|\sqrt{1+v'^2(x)}\,\mathrm{d}x \longrightarrow \min! \tag{1.24}$$

in der Klasse

$$\mathcal{C}(P_1, P_2, +) := \{v \in C^1(\overline{I}) : (a, v(a)) = P_1,\ (b, v(b)) = P_2,\ v > 0\}.$$

Es handelt sich also um ein Variationsproblem ohne isoperimetrische Nebenbedingung; die strikte Ungleichungsnebenbedingung ist automatisch für genügend kleine Variationen erfüllt, wenn man annimmt, dass eine minimierende Funktion $u \in \mathcal{C}(P_1, P_2, +)$ existiert. Die Berechnung der Lösung erfolgt wie im Beispiel 1.11 und führt zu der Kettenlinie als Profilkurve. Die durch sie aufgespannte Fläche heißt *Katenoid*. Ob das Katenoid tatsächlich die flächenminimierende Lösung liefert, hängt wesentlich vom Abstand der Randkurven, also der Kreislinien zentriert in a und b ab, siehe Bild 1.7. Tatsächlich hat die zweikomponentige

[7] Diese Formel für den Flächeninhalt ergibt sich aus der Aufintegration von Mantellinienlängen der erzeugenden Kreislinien mit Umfang $2\pi|\gamma^2(s)|$ entlang der zweidimensionale Profilkurve $\gamma = (\gamma^1, \gamma^2) \in C^1$, so dass $\mathcal{A}(\Sigma) = \int_\gamma 2\pi|\gamma^2(s)|\,ds$, was man dann in die Form (1.24) umschreiben kann, wenn die Profilkurve γ als Graph einer skalaren Funktion $v \in C^1(I)$ gegeben ist.

(und damit gewissermaßen entartete) Lösung bestehend aus den beiden durch die Randkreise berandeten Kreisscheiben oberhalb eines bestimmten Abstands $|a-b|$ einen geringeren Flächeninhalt[8]. Unter der Voraussetzung, dass das Infimum über alle zusammenhängenden Lösungen strikt kleiner ist als das Infimum über die mehrkomponentigen (entarteten) Flächen (DOUGLAS-Bedingung), kann man die Existenz mehrfach zusammenhängender flächenminimierender Lösungen beweisen, und damit das DOUGLAS-*Problem* oder verallgemeinerte PLATEAU-*Problem* lösen; siehe z.B. COURANT'S Buch [15, Ch. IV], NITSCHE [83, S. 520ff], oder [25, Ch. 11]. Für allgemeinere parametrische Variationsprobleme (vgl. Kapitel 7.3) ist das DOUGLAS-Problem in [64] und [58] behandelt worden, und für ähnliche geometrische Variationsprobleme höherer Ordnung, also mit Krümmungstermen im Integranden verweisen wir z.B. auf [20, 21], [94], [45], [18], [32, 33] [22].

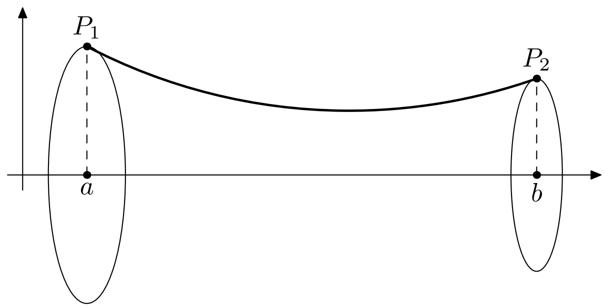

Abbildung 1.7: u erzeugt die Rotationsfläche.

Beispiel $\boxed{1.13}$ [Elastischer Faden]
Wir betrachten einen Faden, der an den Stellen $x=-1$ und $x=+1$ festgehalten wird. Seine elastische Energie wächst in einer ersten groben Näherung proportional zu seiner Längenänderung relativ zur geraden Ruhelage und wird beschrieben durch[9]

$$\mathcal{E}_1(v) := k\int_{-1}^{+1} v'^2(x)\,\mathrm{d}x,$$

wobei k eine positive (Material-)Konstante ist. Unter Berücksichtigung eines homogenen Gravitationsfeldes mit der ebenfalls positiven Konstanten g lautet nun das Variationsproblem zur Beschreibung des Fadens:

$$\mathcal{E}_1(v) + g\int_{-1}^{+1} v(x)\,\mathrm{d}x \longrightarrow \min!$$

in der Klasse

$$\mathcal{C} := \{v \in C^1([-1,+1]) : v(-1) = 0 = v(+1)\}.$$

Zur Lösung machen wir die Annahme, dass ein $u \in C^2([-1,+1])$ existiert, welches das Funktional in der gegebenen Klasse minimiert. Die EULER-LAGRANGE-Gleichung lautet dann

$$-2ku''(x) + g = 0, \qquad (\mathrm{ELG}_{1.13})$$

[8]Fügt man dem Flächenfunktional allerdings noch einen Term höherer Ordnung zur Modellierung von elastischen Membraneigenschaften hinzu, etwa das WILLMOREfunktional , dann gibt es über einen weit größeren Bereich zusammenhängende Energieminimierer, siehe [94]

[9]Diese erste Näherung ergibt sich aus der Taylorentwicklung $\sqrt{1+u'^2}-1 = (1/2)u'^2 + O(|u'|^3)$ des Integranden des nichtparametrischen Längenfunktionals.

was sofort integriert werden kann:

$$-2ku(x) = -\frac{1}{2}gx^2 + c_1x + c_2.$$

Um die Integrationskonstanten zu bestimmen, verwendet man die Randbedingungen,

$$\begin{aligned} 0 &= -2ku(+1) = -\frac{g}{2} + c_1 + c_2 \\ 0 &= -2ku(-1) = -\frac{g}{2} - c_1 + c_2, \end{aligned}$$

so dass sich durch Addition und Subtraktion dieser Identitäten die Konstanten $c_2 = \frac{g}{2}$ und $c_1 = 0$ ergeben. Die Lösung lautet schließlich

$$u(x) = \frac{g}{4k}(x^2 - 1).$$

Abschließend sei bemerkt, dass sich das Variationsproblem

$$\mathcal{E}_1(u) + gu(0) \longrightarrow \min!$$

mit den bisher entwickelten Methoden *nicht* lösen läßt. Es beschreibt einen Faden, der nicht in einem Schwerefeld hängt, sondern punktförmig in seiner Mitte belastet wird. Die (nichtglatte) Lösung lautet $u(x) = \frac{g}{4k}(|x| - 1)$.

Beispiel $\boxed{1.14}$ **[Elastischer Balken]**
Als letztes klassisches Beispiel betrachten wir einen Balken, der an seinen beiden Enden bei $x = -1$ und $x = +1$ eingespannt ist. In erster Näherung läßt sich die elastische Energie des Balkens durch folgendes Funktional beschreiben[10]:

$$\mathcal{E}_2(v) := H \int_{-1}^{+1} (v''(x))^2 \, \mathrm{d}x,$$

wobei H wieder eine positive (Material-)Konstante ist. Im homogenen Schwerefeld haben wir also das Variationsproblem

$$\mathcal{E}_2(v) + g \int_{-1}^{+1} v(x) \, \mathrm{d}x \longrightarrow \min!$$

in der Klasse

$$\tilde{\mathcal{C}} := \{v \in C^4([-1, +1]) : v(-1) = 0 = v(+1),\ v'(-1) = 0 = v'(+1)\};$$

die zweite Randbedingung bedeutet dabei, dass die Enden des Balkens auch in ihrer Richtung fixiert sind.

[10]Hier ergibt sich die Näherung aus der Linearisierung der Krümmung unter der gleichzeitigen Annahme, dass sich die Länge bei Auslenkung des Balkens nur geringfügig ändert, also

$$\kappa = \left(\frac{u'}{\sqrt{1 + u'^2}}\right)' = \frac{u''}{\sqrt{1 + u'^2}^3} \cong u''$$

für $|u'|$ genügend klein.

Zur Lösung nehmen wir nun an, dass das Funktional einen Minimierer $u \in C^4([-1,+1])$ hat. Allgemein lauten die EULER-LANGRANGE-Gleichungen für den Fall, dass das Funktional auch von der zweiten Ableitung abhängig ist, also mit einem Integranden $F = F(x,z,p,r)$, wobei für r die zweiten Ableitungen u'' einer Funktion u eingesetzt werden,

$$F_z(x,u,u',u'') - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F_p(x,u,u',u'') + \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} F_r(x,u,u',u'') = 0.$$

In unserem Beispiel reduziert sich das zu

$$g + 2Hu''''(x) = 0, \tag{ELG$_{1.14}$}$$

einer gewöhnlichen Differentialgleichung vierter Ordnung, welche im Allgemeinen keine Maximumprinzipien zulassen. Hier aber liefert eine viermalige Integration

$$2Hu(x) = -\frac{g}{24}x^4 + \frac{c_1}{6}x^3 + \frac{c_2}{2}x^2 + c_3 x + c_4.$$

Nutzt man nun die Randbedingungen

$$\begin{aligned}
0 &= 2Hu'(+1) = -\frac{g}{6} + \frac{c_1}{2} + c_2 + c_3 &\quad (1.25)\\
0 &= 2Hu'(-1) = \frac{g}{6} + \frac{c_1}{2} - c_2 + c_3 &\quad (1.26)\\
0 &= 2Hu(+1) = -\frac{g}{24} + \frac{c_1}{6} + \frac{c_2}{2} + c_3 + c_4 &\quad (1.27)\\
0 &= 2Hu(-1) = -\frac{g}{24} - \frac{c_1}{6} + \frac{c_2}{2} - c_3 + c_4, &\quad (1.28)
\end{aligned}$$

so kann man die Werte der Integrationskonstanten berechnen.

Die Addition von (1.25) und (1.26) liefert $c_1 + 2c_3 = 0$, während deren Subtraktion auf $-g/3 + 2c_2 = 0$ führt. Die Addition von (1.27) und (1.28) impliziert $-g/12 + c_2 + 2c_4 = 0$, deren Subtraktion aber $c_1/3 + 2c_3 = 0$. Setzt man $c_1 = -2c_3$ in diese letzte Identität ein, so ergibt sich sofort $c_3 = 0$ und damit dann auch $c_1 = 0$. Setzt man zudem $c_2 = g/6$ in die Gleichung ein, in der c_2 und c_4 vorkommen, erhält man $c_4 = -g/24$ und damit schließlich die Lösung

$$u(x) = \frac{1}{2H}\left[-\frac{g}{24}x^4 + \frac{g}{12}x^2 - \frac{g}{24}\right] = -\frac{g}{48H}(x^2-1)^2.$$

Auch hier ist bei einer punktförmig in der Mitte ansetzenden Kraft das zugehörige Variationsproblem

$$\mathcal{E}_2(u) + gu(0) \longrightarrow \min!$$

mit den hier entwickelten Methoden nicht zu behandeln; man kann mit anderen Techniken zeigen, dass sich als (nichtglatte) Lösung die Funktion

$$u(x) = -\frac{g}{48H}(2|x|^3 - 3x^2 + 1)$$

ergibt.

Allgemein halten geometrische Randwertprobleme höherer Ordnung in höheren Dimensionen bis heute viele offene Fragen bereit.

1.4 HAMILTONsche Gleichungen

Als Alternative zu den EULER-LAGRANGE-Gleichungen kann mit Hilfe der LEGENDRE-Transformation zu den HAMILTONschen Gleichungen übergehen. Das werden wir im Folgenden kurz ausführen. Wesentlich ausführlicher wird die HAMILTON-Formulierung z.B. in [42] behandelt, unsere Darstellung orientiert sich eher an [17]. Modernere Entwicklungen finden sich z.B. in den Arbeiten von F. Hélein und Ko-Autoren [50, 49, 51, 52].

Definition 1.21 [HAMILTON-FUNKTION]
Für $F \in C^0(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N)$ definiert

$$H(x,z,\zeta) := \sup_{p \in \mathbb{R}^N} \{\zeta \cdot p - F(x,z,p)\} \in (-\infty, \infty]$$

die HAMILTON-Funktion *zu F.*

Man bezeichnet dieses mit Hilfe von F gebildete Supremum auch mit $F^*(x,z,\zeta)$, die man auch die LEGENDRE-*Transformierte* von $F(x,z,\cdot)$ nennt (bezüglich der dritten Variablen von F bei festgehaltenen Parametern x und z). Ziel dieses Abschnitts ist es, die Äquivalenz zwischen den EULER-LAGRANGE-Gleichungen und den sogenannten HAMILTON-Gleichungen herzuleiten:

$$\begin{cases} u'(x) &= H_\zeta(x,u(x),v(x)) \\ v'(x) &= -H_z(x,u(x),v(x)) \qquad \text{für alle } \ x \in I. \end{cases} \tag{HAM}$$

Zunächst erkennt man, dass dieses System von Differentialgleichungen wiederum die EULER-LAGRANGE-Gleichungen des *Wirkungsfunktionals*

$$\mathcal{W}(u,v) := \int_I [u'(x) \cdot v(x) - H(x,u(x),v(x))]\,\mathrm{d}x \tag{1.29}$$

sind. Tatsächlich ergibt sich (unter geeigneten Regularitätsannahmen an u, v und H) für beliebige Funktionen $\varphi, \psi \in C_0^\infty(I, \mathbb{R}^N)$ die Rechnung

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{W}((u,v),(\varphi,\psi)) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon}_{|\varepsilon=0} \mathcal{W}(u+\varepsilon\varphi, v+\varepsilon\psi) \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon}_{|\varepsilon=0} \left(\int_I [(u'+\varepsilon\varphi')\cdot(v+\varepsilon\psi) - H(x,u+\varepsilon\varphi, v+\varepsilon\psi)]\,\mathrm{d}x \right) \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon}_{|\varepsilon=0} \left(\int_I [u'\cdot v + \varepsilon\varphi'\cdot v + \varepsilon u'\cdot\psi - H(x,u+\varepsilon\varphi,v+\varepsilon\psi)]\,\mathrm{d}x + O(\varepsilon^2) \right) \\ &= \int_I [v\cdot\varphi' + u'\cdot\psi - H_z(x,u,v)\cdot\varphi - H_\zeta(x,u,v)\cdot\psi]\,\mathrm{d}x \\ &= \int_I [(-\varphi)\cdot(v' + H_z(x,u,v)) + \psi\cdot(u' - H_\zeta(x,u,v))]\,\mathrm{d}x, \end{aligned}$$

woraus mit dem Fundamentallemma, Lemma 1.4, die Gültigkeit von (HAM) folgt.

Die folgenden technischen Resultate enthalten die wesentlichen analytischen Grundlagen für den Übergang von den EULER-LAGRANGE-Gleichungen (ELG) zum HAMILTON-System (HAM).

Lemma 1.22
Sei $F \in C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N)$ und erfülle die Bedingung

(F1) *Es gibt stetige Funktionen $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ und $\omega : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft $\lim_{t\to\infty} \frac{\omega(t)}{t} = \infty$, so dass*

$$F(x, z, p) \geq \omega(|p|) + g(x, z) \quad \text{für alle} \ \ (x, z, p) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N.$$

Dann existiert zu jedem $(x, z, \zeta) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^N$ (mindestens) ein Vektor $p = p(x, z, \zeta) \in \mathbb{R}^N$ mit

$$H(x, z, \zeta) = \zeta \cdot p(x, z, \zeta) - F(x, z, p(x, z, \zeta)). \tag{1.30}$$

Weiterhin gilt

$$\zeta = F_p(x, z, p(x, z, \zeta)) \quad \text{für alle solchen } p(x, z, \zeta), \tag{1.31}$$

und für jedes $R > 0$ existiert eine Zahl $R_1 = R_1(R, F, g, \omega) > 0$, so dass

$$|p(x, z, \zeta)| \leq R_1 \quad \text{für alle} \ \ (x, z, \zeta) \in \overline{B_R(0)} \times \overline{B_R(0)} \times \overline{B_R(0)} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N. \tag{1.32}$$

Darüberhinaus ist $H \in C^0(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N)$.

Beweis. Wäre die Behauptung (1.30) falsch, dann hätte man für jedes noch so groß gewählte $R > 0$ die Ungleichung

$$H(x, z, \zeta) > \max_{p\in\overline{B_R(0)}} \{\zeta \cdot p - F(x, z, p)\}. \tag{1.33}$$

Wenn nun zusätzlich $H(x, z, \zeta) < \infty$, dann existiert demnach eine Folge $\{p_m\} \subset \mathbb{R}^N$ mit $|p_m| \xrightarrow{m\to\infty} \infty$, so dass

$$\begin{aligned} \zeta \cdot 0 - F(x, z, 0) < H(x, z, \zeta) &\leq \frac{1}{m} + \zeta \cdot p_m - F(x, z, p_m) \\ &\overset{(F1)}{\leq} \frac{1}{m} + |p_m| \frac{\zeta \cdot p_m}{|p_m|} - \omega(|p_m|) - g(x, z) \\ &= \frac{1}{m} + |p_m| \left[\frac{\zeta \cdot p_m}{|p_m|} - \frac{\omega(|p_m|)}{|p_m|} \right] - g(x, z) \\ &\xrightarrow{m\to\infty} -\infty, \end{aligned}$$

im Widerspruch zur Voraussetzung, dass $-F(x, z, 0) \in \mathbb{R}$. Wenn aber $H(x, z, \zeta) \not< \infty$ und (1.33) gilt, dann gibt es auch eine Folge $\{p_m\} \subset \mathbb{R}^N$ mit $|p_m| \xrightarrow{m\to\infty} \infty$, so dass $-F(x, z, 0) < \zeta \cdot p_m - F(x, z, p_m)$, was mit der gleichen Schlussweise wie gerade denselben Widerspruch erzeugt, womit (1.30) bewiesen ist.

Da der Vektor $p(x, z, \zeta) \in \mathbb{R}^N$ das Supremum in der Definition 1.21 von H realisiert gilt zudem

$$0 = \frac{\partial}{\partial p^i}\bigg|_{p=p(x,z,\zeta)} \{\zeta \cdot p - F(x, z, p)\} = \zeta^i - F_{p^i}(x, z, p(x, z, \zeta)) \ \text{ für } \ i = 1, \ldots, N,$$

was (1.31) beweist.

Zum Nachweis der a priori Abschätzung bemerken wir, dass zu vorgegebenem $R > 0$ zwei Zahlen $R_2, R_3 > 0$ existieren, so dass wegen Voraussetzung (F1)

$$\begin{cases} \frac{\omega(|p|)}{|p|} \geq R+1 & \text{für alle } \; |p| \geq R_2 \quad \text{vgl. Voraussetzung (F1)} \\ F(x,z,0) - g(x,z) \leq R_3 & \text{für alle } \; (x,z) \in \overline{B_R(0)} \times \overline{B_R(0)} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N, \end{cases} \tag{1.34}$$

da F und g stetig sind.

Für $R_1 := \max\{R_2, R_3\}$ und $(x,z,\zeta) \in \overline{B_R(0)} \times \overline{B_R(0)} \times \overline{B_R(0)} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$ gilt demnach für $\bar{p} := p(x,z,\zeta)$ wegen Voraussetzung (F1) und (1.30)

$$\omega(|\bar{p}|) + g(x,z) - |\zeta||\bar{p}| \underset{(\mathrm{F1})}{\leq} F(x,z,\bar{p}) - \zeta\cdot\bar{p} \underset{(1.30)}{=} -H(x,z,\zeta) \leq -\{\zeta\cdot 0 - F(x,z,0)\} = F(x,z,0).$$

Daraus folgt wegen (1.34) für diese (x,z,ζ)

$$\begin{aligned} R_1 \geq R_3 \underset{(1.34)}{\geq} F(x,z,0) - g(x,z) &\geq \omega(|\bar{p}|) - |\zeta||\bar{p}| \\ &= |\bar{p}| \left[\frac{\omega(|\bar{p}|)}{|\bar{p}|} - |\zeta| \right] \\ &\geq |\bar{p}| \left[\frac{\omega(|\bar{p}|)}{|\bar{p}|} - R \right] \underset{(1.34)}{\geq} |\bar{p}|, \end{aligned}$$

falls $|\bar{p}| \geq R_2$. Falls nicht, dann gilt aber $|\bar{p}| < R_2 \leq R_1$ nach Definition. Also folgt in jedem Falle $|\bar{p}| \leq R_1$, was die Behauptung (1.32) beweist.

Nun bleibt noch zu zeigen, dass H stetig ist. In der Tat existieren zu Tripeln (x,z,ζ) und (x',z',ζ') eine Zahl $R > 0$, so dass

$$(x,z,\zeta), (x',z',\zeta') \quad \in \quad B_R(0) \times B_R(0) \times B_R(0) \quad \subset \quad \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N,$$

und Vektoren $p = p(x,z,\zeta)$, $p' = p(x',z',\zeta') \in \mathbb{R}^N$, so dass nach (1.30)

$$H(x,z,\zeta) = \zeta \cdot p - F(x,z,p) \qquad \text{und} \qquad H(x',z',\zeta') = \zeta' \cdot p' - F(x',z',p').$$

Folglich gelten die Abschätzungen

$$\begin{aligned} H(x,z,\zeta) - H(x',z',\zeta') &= \zeta \cdot p - F(x,z,p) - H(x',z',\zeta') \\ &\leq \zeta \cdot p - F(x,z,p) - (\zeta' \cdot p - F(x',z',p)) \\ &= (\zeta - \zeta') \cdot p + F(x',z',p) - F(x,z,p) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} H(x',z',\zeta') - H(x,z,\zeta) &= \zeta' \cdot p' - F(x',z',p') - H(x,z,\zeta) \\ &\leq \zeta' \cdot p' - F(x',z',p') - (\zeta \cdot p' - F(x,z,p')) \\ &= (\zeta' - \zeta) \cdot p' + F(x,z,p') - F(x',z',p'), \end{aligned}$$

so dass durch Kombination dieser beiden Ungleichungen

$$\begin{aligned} |H(x,z,\zeta) - H(x',z',\zeta')| &\leq |\zeta - \zeta'| \max\{|p|,|p'|\} \\ &\qquad + \max\{|F(x',z',p) - F(x,z,p)|, |F(x,z,p') - F(x',z',p')|\} \\ &\underset{(1.32)}{\leq} R_1|\zeta - \zeta'| + \|\nabla F\|_{C^0(\overline{B_R(0)} \times \overline{B_R(0)} \times \overline{B_{R_1}(0)}, \mathbb{R}^{1+2N})} \Big(|x - x'|^2 + |z - z'|^2 \Big)^{1/2} \end{aligned}$$

folgt. Für die Gültigkeit der letzten Ungleichung betrachte man beispielsweise

$$\begin{aligned}
|F(x',z',p)-F(x,z,p)| &= \Big|\int_0^1 \frac{d}{dt}\Big[F(\underbrace{tx'+(1-t)x, tz'+(1-t)z, p}_{=:\eta(t)})\Big]\,\mathrm{d}t\Big| \\
&\le \int_0^1 |F_x(\eta(t))(x'-x)+F_z(\eta(t))\cdot(z'-z)|\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 \Big|\nabla F(\eta(t))\cdot \begin{pmatrix} x'-x \\ z'-z \\ 0 \end{pmatrix}\Big|\,\mathrm{d}t \\
&\le \|\nabla F\|_{C^0(\overline{B_R(0)}\times\overline{B_R(0)}\times\overline{B_{R_1}(0)},\mathbb{R}^{1+2N})}\left|\begin{pmatrix} x'-x \\ z'-z \\ 0 \end{pmatrix}\right|,
\end{aligned}$$

da $\eta(t)=(tx'+(1-t)x, tz'+(1-t)z, p)\in B_R(0)\times B_R(0)\times B_{R_1}(0)$ für alle $t\in(0,1)$ wegen (1.32). □

Korollar 1.23
Falls zusätzlich zu den Voraussetzungen von Lemma 1.22 die Zuordnung $p\mapsto F(x,z,p)$ strikt konvex ist für alle $(x,z)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^N$, dann ist der in (1.30) gefundene Vektor $p(x,z,\zeta)$ für gegebene Tripel $(x,z,\zeta)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^N$ jeweils eindeutig.

Beweis. Zunächst beweisen wir die aus der konvexen Analysis bekannte strikte Monotonie des Gradienten F_p. Dazu nutzen wir die strikte Konvexität von $p\mapsto F(x,z,p)$ für festgehaltene Variablen $(x,z)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^N$, um für beliebige $p_1\neq p_2$, $p_1,p_2\in\mathbb{R}^N$

$$\begin{aligned}
F(x,z,p_1) &> F(x,z,p_2)+F_p(x,z,p_2)\cdot(p_1-p_2),\\
F(x,z,p_2) &> F(x,z,p_1)+F_p(x,z,p_1)\cdot(p_2-p_1)
\end{aligned}$$

zu schließen. Addition dieser beiden strikten Ungleichungen liefert

$$0 > F_p(x,z,p_2)\cdot(p_1-p_2)+F_p(x,z,p_1)\cdot(p_2-p_1),$$

oder äquivalent

$$\big(F_p(x,z,p_1)-F_p(x,z,p_2)\big)\cdot(p_1-p_2)>0. \tag{1.35}$$

Gäbe es neben $p\in\mathbb{R}^N$ noch einen weiteren von p verschiedenen Vektor $\bar p\in\mathbb{R}^N$, der auch die Beziehung (1.30) und damit auch (1.31) erfüllt, also so dass

$$\zeta \underset{(1.31)}{=} F_p(x,z,p) \underset{(1.31)}{=} F_p(x,z,\bar p),$$

dann folgt mit $0=F_p(x,z,p)-F_p(x,z,\bar p)$ durch Multiplikation mit dem Vektor $p-\bar p$ der Widerspruch zu der strikten Monotonie des Gradienten F_p in (1.35)

$$0=\big(F_p(x,z,p)-F_p(x,z,\bar p)\big)\cdot(p-\bar p) \underset{(1.35)}{>} 0,$$

was die Eindeutigkeitsaussage beweist. □

Korollar 1.24
Ist zusätzlich zu den Voraussetzungen von Korollar 1.23 F_p lokal LIPSCHITZ*-stetig auf $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$ und ist die Zuordnung $p \mapsto F(x,z,p)$ lokal stark konvex, d.h. existiert für alle $\rho, \rho_1 > 0$ eine Konstante $c(\rho,\rho_1) > 0$, so dass die Zuordnung $p \mapsto F(x,z,p) - (c/2)|p|^2$ für alle $(x,z) \in \overline{B_\rho(0)} \times \overline{B_\rho(0)}$ konvex auf $\overline{B_{\rho_1}(0)}$ ist, dann ist die eindeutige Zuordnung $(x,z,\zeta) \mapsto p(x,z,\zeta)$ aus Korollar 1.23 lokal* LIPSCHITZ*-stetig.*

Beweis. Zunächst ist nach (1.32) die Funktion $p = p(x,z,\zeta)$ lokal beschränkt:

Für alle $R > 0$ existiert $R_1 = R_1(R) > 0$, so dass $\|p\|_{L^\infty(B_R(0)\times B_R(0)\times B_R(0),\mathbb{R}^N)} \le R_1$.

F_p ist nach Voraussetzung lokal LIPSCHITZstetig, d.h. es gibt eine Zahl $\gamma_1 = \gamma_1(R) > 0$, so dass

$$|F_p(x,z,p) - F_p(x',z',p')| \le \gamma_1\Big(|x-x'| + |z-z'| + |p-p'|\Big) \tag{1.36}$$

für alle (x,z,p), $(x',z',p') \in \overline{B_R(0)} \times \overline{B_R(0)} \times \overline{B_{R_1}(0)}$. Wir nutzen nun die vorausgesetzte lokal starke Konvexität für $\rho := R$ und $\rho_1 := R_1$, um eine quantitative Form der strikten Monotonie des Gradienten F_p nachzuweisen. Tatsächlich existiert also eine Konstante $c = c(R,R_1) > 0$, so dass die Zuordnung $p \mapsto F(x,z,p) - (c/2)|p|^2$ für alle $(x,z) \in \overline{B_R(0)} \times \overline{B_R(0)}$ konvex auf $\overline{B_{R_1}(0)}$ ist, so dass für alle $p_1, p_2 \in \overline{B_{R_1}(0)}$ gilt

$$\begin{aligned} F(x,z,p_1) - (c/2)|p_1|^2 \quad &\ge \quad F(x,z,p_2) - (c/2)|p_2|^2 \\ &\qquad + \nabla_p(F(x,z,p) - (c/2)|p|^2)|_{p=p_2} \cdot (p_1 - p_2) \\ &= F(x,z,p_2) - (c/2)|p_2|^2 + (F_p(x,z,p_2) - cp_2)\cdot(p_1-p_2) \\ &= F(x,z,p_2) + F_p(x,z,p_2)\cdot(p_1-p_2) + (c/2)|p_1-p_2|^2 - (c/2)|p_1|^2, \end{aligned}$$

also

$$F(x,z,p_1) \ge F(x,z,p_2) + F_p(x,z,p_2)\cdot(p_1-p_2) + (c/2)|p_1-p_2|^2 \tag{1.37}$$

für alle $(x,z) \in \overline{B_R(0)} \times \overline{B_R(0)}$ und $p_1, p_2 \in \overline{B_{R_1}(0)}$. Wenn wir eine analoge Ungleichung mit vertauschten Rollen von p_1 und p_2 hinschreiben und anschließend zu der Ungleichung (1.37) addieren, ergibt sich ähnlich wie im Beweis von (1.35) die quantitative Monotonie von F_p in der Form

$$\big(F_p(x,z,p_1) - F_p(x,z,p_2)\big)\cdot(p_1-p_2) \ge c|p_1-p_2|^2 \tag{1.38}$$

für alle $(x,z) \in \overline{B_R(0)} \times \overline{B_R(0)}$ und alle $p_1, p_2 \in \overline{B_{R_1}(0)}$. Insbesondere ist mit der Ungleichung von Cauchy-Schwarz

$$|F_p(x,z,p_1) - F_p(x,z,p_2)| \ge \gamma_2|p_1-p_2| \tag{1.39}$$

für alle $(x,z) \in \overline{B_R(0)} \times \overline{B_R(0)}$, $p_1, p_2 \in \overline{B_{R_1}(0)}$. Nun schließen wir für

$$(x,z,\zeta), (x',z',\zeta') \in \overline{B_R(0)} \times \overline{B_R(0)} \times \overline{B_R(0)}$$

und zugehörige Vektoren $p_1 := p = p(x,z,\zeta)$, $p_2 := p' = p(x',z',\zeta') \in \overline{B_{R_1}(0)}$ mit (1.39), (1.31) und (1.36) wie folgt:

$$\begin{aligned}\gamma_2|p-p'| &\underset{(1.39)}{\leq} |\underbrace{F_p(x,z,p)}_{\underset{(1.31)}{=}\zeta} - F_p(x,z,p')| \\ &= |\zeta - \underbrace{\zeta' + F_p(x',z',p')}_{\underset{(1.31)}{=}0} - F_p(x,z,p')| \\ &\underset{(1.36)}{\leq} |\zeta-\zeta'| + \gamma_1\Big(|x-x'| + |z-z'| + \underbrace{|p'-p'|}_{=0}\Big).\end{aligned}$$

Damit ist die Zuordnung $(x,z,\zeta) \mapsto p(x,z,\zeta)$ lokal LIPSCHITZstetig.

□

Eine weitere Verschärfung der Regularitäts- und Konvexitätseigenschaften von F führt schließlich auf eine höhere Regularität der HAMILTONfunktion und auf die entscheidenden Gleichungen, die im nachfolgenden Satz 1.26 die Brücke zwischen den EULER-LAGRANGE-Gleichungen und dem HAMILTON-System liefern.

Lemma 1.25
Sei $k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, und $F \in C^k(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N)$ erfülle die Bedingungen

(F1) *Es gibt stetige Funktionen $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ und $\omega : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft $\lim_{t\to\infty} \frac{\omega(t)}{t} = \infty$, so dass*

$$F(x,z,p) \geq \omega(|p|) + g(x,z) \qquad \textit{für alle} \ \ (x,z,p) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N;$$

(F2)

$$\sum_{i,j=1}^N F_{p^i p^j}(x,z,p)\xi^i\xi^j > 0 \qquad \textit{für alle} \ \ \xi \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}, \ (x,z,p) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N.$$

Dann ist $H \in C^k(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N)$ und erfüllt die Gleichungen

(H1)

$$\begin{aligned}H_x(x,z,\zeta) &= -F_x(x,z,H_\zeta(x,z,\zeta)), \\ H_z(x,z,\zeta) &= -F_z(x,z,H_\zeta(x,z,\zeta)),\end{aligned}$$

(H2) $\qquad H(x,z,\zeta) = \zeta \cdot H_\zeta(x,z,\zeta) - F(x,z,H_\zeta(x,z,\zeta)),$

(H3) $\qquad \zeta = F_p(x,z,p) \quad \Longleftrightarrow \quad p = H_\zeta(x,z,\zeta).$

Wenn man statt (F2) nur verlangt, dass die Zuordnung $p \mapsto F(x,z,p)$ für alle $(x,z) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$ strikt konvex ist, kann man nicht erwarten, dass die HAMILTON-Funktion H glatter ist als C^1, wie das folgende Beispiel zeigt.

Beispiel $\boxed{1.15}$
Es sei $N = 1$. Man kann zeigen, dass die zu $F(x,z,p) = F(p) := \frac{1}{4}|p|^4$ gehörige HAMILTON-Funktion $H(x,z,\zeta) := \frac{3}{4}|\zeta|^{4/3}$ ist, und diese Funktion ist nicht von der Klasse $C^2(\mathbb{R})$.

Lemma 1.25 bleibt zudem noch in Teilen richtig, wenn auch das superlineare Wachstum von F in p, also die Bedingung (F1) verletzt ist. Allerdings könnte die HAMILTON-Funktion dann auch unendliche Werte annehmen:

Beispiel $\boxed{1.16}$
Sei $N = 1$. Die Funktion $F(x,z,p) = F(p) := \sqrt{1+p^2}$ ist strikt konvex und besitzt die Funktion

$$H(x,z,\zeta) = H(\zeta) := \begin{cases} -\sqrt{1-\zeta^2} & \text{für } |\zeta| \le 1 \\ +\infty & \text{für } |\zeta| > 1 \end{cases}$$

als HAMILTON-Funktion.

Beweis von Lemma 1.25. Wir zeigen zunächst, dass die Zuordnung $(x,z,\zeta) \mapsto p(x,z,\zeta)$ von der Klasse $C^1(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^N,\mathbb{R}^N)$ ist.

Tatsächlich ist die Gleichung

$$0 = G(x,z,\zeta,p) := \zeta - F_p(x,z,p)$$

nach der Identität (1.31) erfüllt für den Vektor $p = p(x,z,\zeta)$, und zusätzlich gilt wegen Voraussetzung (F2)

$$\det(D_pG(x,z,\zeta,p)) = (-1)^N \det F_{pp}(x,z,p) \underset{\text{(F2)}}{\neq} 0,$$

so dass nach dem Satz über implizite Funktionen zu einem beliebigen Punkt $(x,z,\zeta) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^N$ eine offene Umgebung $V = V_{(x,z,\zeta)} \subset \mathbb{R}\times\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^N$ existiert, die (x,z,ζ) enthält, und es gibt eine eindeutig bestimmte Funktion $P \in C^1(V,\mathbb{R}^N)$, so dass

$$0 = G(x',z',\zeta',P(x',z',\zeta')) \quad \text{für alle } (x',z',\zeta') \in V.$$

Damit stimmt die bereits global definierte Funktion $p(\cdot,\cdot,\cdot)$ auf dieser Umgebung V mit der C^1-Funktion P überein, woraus folgt, dass $p(\cdot,\cdot,\cdot) \in C^1(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^N)$, da die stetige Differenzierbarkeit eine lokale Eigenschaft ist und da (x,z,ζ) beliebig in $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^N$ gewählt werden kann. Damit ist die C^1-Regularität von $p(\cdot,\cdot,\cdot)$ bewiesen.

Abschließend bemerken wir, dass aufgrund der Regularitätsvoraussetzung an F in Kombination mit der gerade bewiesenen C^1-Regularität von H die Zuordnungen

$$\begin{array}{rcl} (x,z,\zeta) & \mapsto & p(x,z,\zeta) \\ (x,z,\zeta) & \mapsto & F_x(x,z,p(x,z,\zeta)) \\ (x,z,\zeta) & \mapsto & F_z(x,z,p(x,z,\zeta)) \\ (x,z,\zeta) & \mapsto & F_p(x,z,p(x,z,\zeta)) \end{array}$$

sämtlich von der Klasse C^1 auf $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^N$ sind, so dass mit (1.30) direkt $H \in C^1(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^N)$ folgt. Durch Differentiation erhält man mit Hilfe von (1.31)

$$\begin{aligned} H_x(x,z,\zeta) &= \zeta\cdot p_x(x,z,\zeta) - F_x(x,z,p(x,z,\zeta)) - F_p(x,z,p(x,z,\zeta))\cdot p_x(x,z,\zeta) \\ &= \Big[\underbrace{\zeta - F_p(x,z,p(x,z,\zeta))}_{\underset{(1.31)}{=}0}\Big]\cdot p_x(x,z,\zeta) - F_x(x,z,p(x,z,\zeta)), \end{aligned} \tag{1.40}$$

und

$$\begin{aligned} H_z(x,z,\zeta) &= \zeta \cdot p_z(x,z,\zeta) - F_z(x,z,p(x,z,\zeta)) - F_p(x,z,p(x,z,\zeta)) \cdot p_z(x,z,\zeta) \\ &= \Big[\underbrace{\zeta - F_p(x,z,p(x,z,\zeta))}_{\underset{(1.31)}{=} 0}\Big] \cdot p_z(x,z,\zeta) - F_z(x,z,p(x,z,\zeta)), \qquad (1.41) \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned} H_\zeta(x,z,\zeta) &= p(x,z,\zeta) + \zeta \cdot p_\zeta(x,z,\zeta) - F_p(x,z,p(x,z,\zeta)) \cdot p_\zeta(x,z,\zeta) \\ &= p(x,z,\zeta) + \Big[\underbrace{\zeta - F_p(x,z,p(x,z,\zeta))}_{\underset{(1.31)}{=} 0}\Big] \cdot p_\zeta(x,z,\zeta) \qquad (1.42) \\ &= p(x,z,\zeta), \qquad (1.43) \end{aligned}$$

woraus sofort $H \in C^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N)$ folgt, falls $k \geq 2$. Allgemeiner erhält man über den Impliziten Funktionensatz wie zu Beginn des Beweises aus der Voraussetzung $F \in C^k(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N)$ die Regularität $p(\cdot,\cdot,\cdot) \in C^{k-1}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N)$, so dass die Zuordnungen

$$\begin{aligned} (x,z,\zeta) &\mapsto p(x,z,\zeta) \\ (x,z,\zeta) &\mapsto F_x(x,z,p(x,z,\zeta)) \\ (x,z,\zeta) &\mapsto F_z(x,z,p(x,z,\zeta)) \\ (x,z,\zeta) &\mapsto F_p(x,z,p(x,z,\zeta)) \end{aligned}$$

sämtlich von der Klasse C^{k-1} auf $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$ sind, womit man aus (1.30) zunächst $H \in C^{k-1}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N)$ gewinnt, um dann aus (1.40)–(1.43) zu schließen, dass $H \in C^k(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N)$.

Mit (1.43) folgen die Behauptungen (H1) aus (1.40) und (1.41), (H2) aus (1.30). Zum Beweis von (H3) bemerken wir, dass jeder Vektor $p \in \mathbb{R}^N$ mit $\zeta = F_p(x,z,p)$ ein kritischer Punkt der Funktion $q \mapsto \{\zeta \cdot q - F(x,z,q)\}$ ist, und damit automatisch ein Maximum dieser Funktion, da deren Hessesche durch die negativ definite symmetrische Matrix $-F_{qq}(x,z,q)$ gegeben ist. Wir hatten aber schon in Korollar 1.23 unter schwächeren Voraussetzungen an F bewiesen, dass es genau ein Maximum gibt, so dass dieser kritische Punkt p mit $p(x,z,\zeta)$ übereinstimmen muss. Damit folgt $p = H_\zeta(x,z,\zeta)$ aus (1.43) und damit eine Richtung in der behaupteten Äquivalenz in (H3).

Nimmt man umgekehrt an, dass $p = H_\zeta(x,z,\zeta)$, dann schließt man in folgender Weise: Wir wissen aus (1.30) in Lemma 1.22, dass $p(x,z,\zeta) \in \mathbb{R}^N$ existiert, so dass

$$H(x,z,\zeta) = \zeta \cdot p(x,z,\zeta) - F(x,z,p(x,z,\zeta)),$$

und für diesen Vektor $p(x,z,\zeta)$ haben wir die Gleichung (1.43) hergeleitet, aus der dann sofort $p = p(x,z,\zeta)$ folgt. Andererseits gilt für $p(x,z,\zeta)$ die Gleichung (1.31), und damit auch für p, was die Behauptung für die Rückrichtung in (H3) ist.

Damit ist das Lemma vollständig bewiesen. □

Satz 1.26 [Hamilton-Gleichungen]
Sei $F \in C^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N)$ und H die zugehörige Hamilton*-Funktion. Weiterhin erfülle F die Voraussetzungen*

(F1) *Es gibt stetige Funktionen* $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ *und* $\omega : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *mit der Eigenschaft* $\lim_{t\to\infty} \frac{\omega(t)}{t} = \infty$, *so dass*

$$F(x,z,p) \geq \omega(|p|) + g(x,z) \quad \text{für alle } (x,z,p) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N;$$

(F2)

$$\sum_{i,j=1}^{N} F_{p^i p^j}(x,z,p)\xi^i\xi^j > 0 \quad \text{für alle } \xi \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\},\ (x,z,p) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N.$$

Dann gilt für Funktionen $u, v \in C^1(I, \mathbb{R}^N)$ *mit*

$$\begin{cases} u'(x) &= H_\zeta(x,u(x),v(x)) \\ v'(x) &= -H_z(x,u(x),v(x)) \quad \text{für alle } x \in I \end{cases} \tag{HAM}$$

die höhere Regularität $u, v \in C^2(I, \mathbb{R}^N)$, *und* u *erfüllt die* Euler-Lagrange-*Gleichung*

$$\frac{d}{dx}\Big[F_p(x,u(x),u'(x))\Big] = F_z(x,u(x),u'(x)) \quad \text{für alle } x \in I. \tag{ELG}$$

Falls umgekehrt $u \in C^2(I, \mathbb{R}^N)$ *die Gleichung* (ELG) *auf* I *löst, dann lösen* u, v *das* Hamilton-*System* (HAM) *auf* I, *wenn*

$$v(x) := F_p(x,u(x),u'(x)), \quad x \in I,$$

gesetzt wird, und v *ist von der Klasse* $C^2(I, \mathbb{R}^N)$.

Beweis. Falls u, v die Gleichungen (HAM) auf I erfüllen, dann folgt aus der ersten Gleichung in (HAM) bereits, dass u' mit einer stetig differenzierbaren Funktion übereinstimmt, da $H \in C^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N)$ nach Lemma 1.25. Also ist $u \in C^2(I, \mathbb{R}^N)$. Aus der zweiten Gleichung folgt analog, dass $v \in C^2(I, \mathbb{R}^N)$. Nach (H3) aus Lemma 1.25 folgt aus den Hamilton-Gleichungen (HAM)

$$u'(x) \underset{\text{(HAM)}}{=} H_\zeta(x,u(x),v(x)) \underset{\text{(H3)}}{\Longleftrightarrow} v(x) = F_p(x,u(x),u'(x)) \quad \text{für alle } x \in I.$$

Daraus folgt durch Differentiation erneut mit (HAM)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\Big[F_p(x,u(x),u'(x))\Big] = v'(x) \quad &\underset{\text{(HAM)}}{=} \quad -H_z(x,u(x),v(x)) \\ &\underset{\text{(H1)}}{=} \quad F_z(x,u(x),\underbrace{H_\zeta(x,u(x),v(x))}_{\underset{\text{(HAM)}}{=u'(x))}}, \end{aligned}$$

was (ELG) beweist.

Andererseits folgt aus $v(x) = F_p(x,u(x),u'(x))$ nach (H3) die Beziehung $u'(x) = H_\zeta(x,u(x),v(x))$ für alle $x \in I$, also damit die erste Gleichung in (HAM). Weiterhin ist wegen $u \in C^2(I,\mathbb{R}^N)$ und $F \in C^2(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^N)$ die Funktion v von der Klasse $C^1(I,\mathbb{R}^N)$ und Differentiation ergibt unter Ausnutzung von (ELG) und (H1)

$$\begin{aligned} v'(x) = \frac{d}{dx}\Big[F_p(x,u(x),u'(x))\Big] & \underset{\text{(ELG)}}{=} F_z(x,u(x),u'(x)) \\ & \underset{\text{1.Gl.von(HAM)}}{=} F_z(x,u(x),H_\zeta(x,u(x),v(x))) \\ & \underset{\text{(H1)}}{=} -H_z(x,u(x),v(x)) \quad \text{für alle } \ x \in I, \end{aligned}$$

womit (HAM) vollständig bewiesen ist. Aus dieser letzten Gleichung lässt sich auch direkt ablesen, dass v' überall auf I mit einer C^1-Funktion übereinstimmt, woraus $v \in C^2(I,\mathbb{R}^N)$ folgt. □

Beispiel $\boxed{1.17}$
Für $N=1$, $m>0$, $I=(a,b)\subset\mathbb{R}$ mit $\mathscr{L}^1(I)<\infty$ sei $g\in C^2(\mathbb{R})$, und wir betrachten (vgl. Beispiel 1.6) die Funktion $F\in C^2(\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R})$ gegeben durch

$$F(x,z,p) := \frac{m}{2}p^2 - g(x)z \qquad \text{für } \ (x,z,p)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}$$

mit partiellen Ableitungen $F_p(x,z,p)=mp$ und $F_z(x,z,p)=-g(x)$ und $F_{pp}(x,z,p)=m>0$. Damit erfüllt F die Voraussetzungen (F1) und (F2) von Satz 1.26. Die Euler-Lagrange-Gleichung (ELG) ist in diesem Beispiel die Newtonsche Bewegungsgleichung

$$mu''(x) = -g(x) \qquad \text{für alle } \ x\in I. \tag{ELG$_{1.17}$}$$

Die Hamilton-Funktion H von F lässt sich wie folgt umschreiben:

$$\begin{aligned} H(x,z,\zeta) = \sup_{p\in\mathbb{R}}\{\zeta p - F(x,z,p)\} &= \sup_{p\in\mathbb{R}}\{\zeta p - \frac{m}{2}p^2 + g(x)z\} \\ &= \zeta p^* - \frac{m}{2}(p^*)^2 + g(x)z, \end{aligned} \tag{1.44}$$

wobei

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dp}_{|_{p=p^*}}\{\zeta p - \frac{m}{2}p^2 + g(x)z\} \\ &= \zeta - mp^*, \end{aligned}$$

woraus $p^*=\zeta/m$ folgt. Einsetzen von p^* in (1.44) ergibt

$$\begin{aligned} H(x,z,\zeta) &= \zeta\cdot\frac{1}{m}\zeta - \frac{m}{2}\Big(\frac{1}{m}\zeta\Big)^2 + g(x)z \\ &= \Big(\frac{1}{m} - \frac{m}{2}\cdot\frac{1}{m^2}\Big)\zeta^2 + g(x)z \\ &= \frac{1}{2m}\zeta^2 + g(x)z, \end{aligned}$$

und damit $H_\zeta(x,z,\zeta)=\frac{1}{m}\zeta$ und $H_z(x,z,\zeta)=g(x)$. Also folgt aus Satz 1.26 das Hamilton-System

$$\begin{cases} u'(x) &= H_\zeta(x,u(x),v(x)) = \frac{1}{m}v(x) \\ v'(x) &= -H_z(x,u(x),v(x)) = -g(x) \end{cases} \tag{HAM$_{1.17}$}$$

für die *Impulsvariable*

$$v(x) := F_p(x,u(x),u'(x)) = mu'(x).$$

Beispiel $\boxed{1.18}$
Für $N = 1$, $q > 1$ und $\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1$, also $q' = \frac{q}{q-1}$ und mit einer Funktion $g \in C^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ betrachte die in p strikt konvexe und superlinear wachsende Funktion $F \in C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R})$ gegeben durch

$$F(x, z, p) := \frac{1}{q}|p|^q - g(x, z)$$

mit partiellen Ableitungen

$$F_p(x, z, p) = |p|^{q-2}p \qquad \text{und} \qquad F_z(x, z, p) = -g_z(x, z).$$

Damit ist zwar Lemma 1.25 nicht unmittelbar anwendbar, aber es gelten immerhin die Resultate aus Lemma 1.22 und Korollar 1.23, und man kann die zugehörige Hamilton-Funktion H ermitteln (siehe Übungsaufgabe). Es ergibt sich die C^1-Funktion

$$H(x, z, \zeta) := \frac{1}{q'}|\zeta|^{q'} + g(x, z)$$

mit partiellen Ableitungen

$$H_\zeta(x, z, \zeta) = |\zeta|^{q'-2}\zeta \qquad \text{und} \qquad H_z(x, z, \zeta) = g_z(x, z).$$

Als Euler-Lagrange-Gleichung erhält man

$$\frac{d}{dx}\Big[|u'(x)|^{q-2}u'(x)\Big] = -g_z(x, u(x)), \tag{ELG$_{1.18}$}$$

und eine Argumentation[11] wie in Satz 1.26 liefert das Hamilton-System

$$\begin{cases} u'(x) &= H_\zeta(x, u(x), v(x)) = |v(x)|^{q'-2}v(x) \\ v'(x) &= -H_z(x, u(x), v(x)) = -g_z(x, u(x)). \end{cases} \tag{HAM$_{1.18}$}$$

Beispiel $\boxed{1.19}$
Betrachte $F = F(p) \in C^2(\mathbb{R})$ mit $F''(p) > 0$ für alle $p \in \mathbb{R}$ (oder zumindest sei F strikt konvex) mit superlinearem Wachstum:

$$\lim_{|p|\to\infty} \frac{F(p)}{|p|} = +\infty,$$

womit die Voraussetzungen des Satzes 1.26 erfüllt sind. Die zugehörige Euler-Lagrange-Gleichung lautet

$$\frac{d}{dx}\Big[F_p(u'(x))\Big] = 0, \tag{ELG$_{1.19}$}$$

woraus die Existenz einer Konstanten $c_1 \in \mathbb{R}$ folgt, so dass

$$F_p(u'(x)) = c_1 \qquad \text{für alle} \quad x \in I. \tag{1.45}$$

Die Hamilton-Funktion

$$H(x, z, \zeta) = H(\zeta) = \sup_{p\in\mathbb{R}}\{\zeta p - F(p)\}$$

[11] Satz 1.26 ist nicht unmittelbar anwendbar, da F nicht genügend glatt ist und Voraussetzung (F2) nicht erfüllbar ist, wenn $q \in (1, 2)$.

ist nach Lemma 1.25 von der Klasse C^2 und hat die partiellen Ableitungen $H_\zeta(\zeta) = H'(\zeta)$ und $H_z(\zeta) = 0$, womit das HAMILTON-System folgende Gestalt nach Satz 1.26 hat:

$$\begin{cases} u'(x) &= H_\zeta(x, u(x), v(x)) = H'(v(x)) \\ v'(x) &= -H_z(x, u(x), v(x)) = -H_z(v(x)) = 0. \end{cases} \tag{HAM$_{1.19}$}$$

Aus der zweiten HAMILTON-Gleichung folgt sofort, dass $v(x)$ konstant auf I ist. Diese Konstante ist hier aber wegen (H3) in Lemma 1.25 bereits durch (1.45) festgelegt:

$$v(x) := F_p(u'(x)) = c_1 \qquad \text{für alle} \quad x \in I.$$

Damit impliziert aber die erste Gleichung in (HAM$_{1.19}$) $u'(x) = H'(c_1)$ und folglich

$$u(x) = H'(c_1)x + c_2$$

für eine Konstante $c_2 \in \mathbb{R}$. Diese Lösung beschreibt also eine gleichförmige lineare Bewegung, und der Impuls v ist konstant.

Beispiel $\boxed{1.20}$
Wir wollen nun einen direkten Bezug zu dem Erhaltungssatz Proposition 1.13 herstellen. Sei dazu $N = 1$, $F(x, z, p) = F(z, p) \in C^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$, und F erfülle die Voraussetzungen von Satz 1.26. Die EULER-LAGRANGE-Gleichung lautet

$$\frac{d}{dx}\Big[F_p(u(x), u'(x))\Big] = F_z(u(x), u'(x)). \tag{ELG$_{1.20}$}$$

Andererseits gilt für die HAMILTON-Funktion

$$H(x, z, \zeta) = H(z, \zeta) = \sup_{p \in \mathbb{R}} \{\zeta p - F(z, p)\} = \zeta p^* - F(z, p^*)$$

mit $\zeta = F_p(z, p^*)$ (vgl. Lemma 1.25) nach Satz 1.26 das HAMILTON-System

$$\begin{cases} u'(x) &= H_\zeta(u(x), v(x)) \\ v'(x) &= -H_z(u(x), v(x)) \end{cases} \tag{HAM$_{1.20}$}$$

für $v(x) := F_p(u(x), u'(x))$, so dass

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\Big[H(u(x), v(x))\Big] &= H_z(u(x), v(x))u'(x) + H_\zeta(u(x), v(x))v'(x) \\ &\underset{(\mathrm{HAM}_{1.20})}{=} -v'(x)u'(x) + u'(x)v'(x) = 0 \qquad \text{für alle} \quad x \in I. \end{aligned}$$

Folglich ist H eine Erhaltungsgröße entlang der Lösungen (u, v) von (HAM$_{1.20}$). Dies ist allerdings keine Erweiterung des klassischen Erhaltungssatzes, Proposition 1.13; denn nach (H2) und (H3) in Lemma 1.25 gilt für $F = F(z, p)$

$$\begin{aligned} H(u(x), v(x)) &\underset{(\mathrm{H2})}{=} v(x)H_\zeta(u(x), v(x)) - F(u(x), H_\zeta(u(x), v(x))) \\ &\underset{(\mathrm{HAM}_{1.20})}{=} v(x)u'(x) - F(u(x), u'(x)) \\ &\underset{(\mathrm{H3})}{=} F_p(u(x), u'(x))u'(x) - F(u(x), u'(x)) = E(u(x), u'(x)) \qquad \text{für alle} \quad x \in I. \end{aligned}$$

Mit anderen Worten, falls $F = F(z,p)$ die Voraussetzungen[12] von Satz 1.26 erfüllt, dann ist die Hamilton-Funktion H entlang der Lösungen (u,v) des Hamilton-Systems ($\mathrm{HAM}_{1.20}$) identisch mit der klassischen Erhaltungsgröße $E(z,p) = pF_p(z,p) - F(z,p)$ entlang der Lösung u der Euler-Lagrange-Gleichung ($\mathrm{ELG}_{1.20}$).

[12] Man beachte, dass die Voraussetzungen des Satzes 1.26 insbesondere wegen der Konvexitätsforderung (F2) wesentlich stärker sind als die von Proposition 1.13.

Kapitel 2

SOBOLEVräume

Bereits im ersten Kapitel wurde an verschiedenen Beispielen verdeutlicht, dass die Räume der klassisch differenzierbaren Funktionen häufig zu klein sind, um Existenz von Minimierern (oder Maximierern) zu beweisen. Tatsächlich kann man in manchen Fällen sogar die Nichtexistenz von klassischen Lösungen nachweisen.

Modellhaft wollen wir mit dem Ansatz der *direkten Methode*[1] für die Existenztheorie aufzeigen, wo man mit klassischen Funktionenräumen auf Probleme stößt. Wir betrachten dazu für $N = 1$ die DIRICHLET-Energie

$$\mathscr{D}(u) := \frac{1}{2} \int_I |u'(x)|^2 \, \mathrm{d}x,$$

die wir für gegebene Konstanten $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ in der Klasse

$$\mathcal{C}(\alpha, \beta) := \left\{ v \in C^1(\overline{I}) : v(a) = \alpha, v(b) = \beta \right\}$$

minimieren möchten. Da $\mathcal{C}(\alpha, \beta) \neq \emptyset$, können wir eine *Minimalfolge* $\{u_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{C}(\alpha, \beta)$ mit der Eigenschaft

$$\mathscr{D}(u_i) \underset{i \to \infty}{\longrightarrow} \inf_{\mathcal{C}(\alpha,\beta)} \mathscr{D} \in [0, \infty)$$

wählen. Folglich existiert ein Index i_0, so dass für alle $i \geq i_0$

$$\mathscr{D}(u_i) \leq \inf_{\mathcal{C}(\alpha,\beta)} \mathscr{D} + 1 < \infty. \tag{2.1}$$

Die zentralen Fragen der direkten Methode sind nun,

1. ob eine Teilfolge $\{u_{i_k}\} \subset \{u_i\}$ in einer geeigneten Topologie gegen eine Funktion u konvergiert,

2. ob $u \in \mathcal{C}(\alpha, \beta)$, und

3. ob $\mathscr{D}(u) = \lim_{k \to \infty} \mathscr{D}(u_{i_k}) = \inf_{\mathcal{C}(\alpha,\beta)} \mathscr{D}(\cdot)$, oder ob zumindest $\mathscr{D}(u) \leq \liminf_{k \to \infty} \mathscr{D}(u_{i_k}) = \inf_{\mathcal{C}(\alpha,\beta)} \mathscr{D}(\cdot)$.

[1] Systematisch wird die direkte Methode in Kapitel 3 behandelt.

Es ist nicht klar (und i.A. auch falsch), dass (2.1) eine Konvergenz $u_{i_k} \to u$ in $C^1(\overline{I})$ impliziert. Eine möglicherweise weniger restriktive Topologie könnte unter Umständen eine schwächere Form der Konvergenz sichern, andererseits aber dazu führen, dass die Grenzfunktion u nicht mehr die Randwerte α und β annimmt, oder vielleicht nicht mehr in der Klasse $C^1(\overline{I})$ liegt. Zudem könnte es sein, dass das Funktional $\mathscr{D}$ in einer anderen Topologie keine ausreichenden Stetigkeitseigenschaften mehr hat.

In vielen Fällen liefern die im Folgenden definierten Sobolevräume genau die Eigenschaften, die für die gerade skizzierte direkte Methode der Variationsrechnung relevant sind. Da die Theorie der Sobolevfunktionen in vielen Feldern der Mathematik zum Standardrepertoire gehören, behandeln wir hier die wichtigsten Sätze und Definitionen für den Fall von n-dimensionalen Definitionsbereichen, also offenen Mengen $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. An manchen Stellen verzichten wir auf den vollständigen Beweis und verweisen auf die einschlägige Literatur [2], [3], [35], [36], [43], [71], [111]. Der Beweis des Sobolevschen und Morreyschen Einbettungssatzes wird hier nur in der wesentlich vereinfachten Situation eindimensionaler Definitionsbereiche geführt, siehe Satz 2.15.

Definition 2.1 [Sobolevräume]
Seien $k \in \mathbb{N}$, $q \in [1,\infty]$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, Ω offen und $\Omega \neq \emptyset$.
(i) *Der Raum $W^{k,q}(\Omega)$ der* Sobolevfunktionen *von der Differenzierbarkeitsordnung k und mit Integrabilität q ist definiert durch*

$$W^{k,q}(\Omega) := \Big\{ u \in L^q(\Omega) : \forall \,\text{Multiindizes}\ \gamma \text{ mit } |\gamma| \le k\ \exists u^\gamma \in L^q(\Omega) : \int_\Omega u(x)\partial^\gamma \varphi(x)\ \mathrm{d}x = (-1)^{|\gamma|} \int_\Omega u^\gamma(x)\varphi(x)\ \mathrm{d}x\ \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega) \Big\}.$$

Die zu u gehörigen Funktionen $u^\gamma =: \partial^\gamma u$ heißen schwache Ableitungen *von u (zum Multiindex γ). Weiterhin definieren wir $W^{0,q}(\Omega) := L^q(\Omega)$.*
(ii) *Als Norm auf $W^{k,q}(\Omega)$ definieren wir $\|u\|_{W^{k,q}(\Omega)} := \Big(\sum_{|\gamma|\le k} \int_\Omega |\partial^\gamma u|^q\, dx\Big)^{1/q}$ für $q \in [1,\infty)$ und $\|u\|_{W^{k,\infty}(\Omega)} := \sum_{|\gamma|\le k}$ $\mathrm{esssup}_{x\in\Omega} |\partial^\gamma u(x)|$.*

Bemerkungen:

1. Gilt für eine Funktion $v : \Omega \to \mathbb{R}$ die Identität $v(x) = u(x)$ für $\mathscr{L}^n$-fast alle $x \in \Omega$, wobei u eine Sobolevfunktion der Klasse $W^{k,q}(\Omega)$ ist, dann ist auch $v \in W^{k,q}(\Omega)$, und repräsentiert dieselbe Äquivalenzklasse wie u, oder kurz $v = u$ in $W^{k,q}(\Omega)$. Andererseits ist aber eine Sobolevfunktion $u \in W^{k,q}(\Omega \setminus A)$ für eine abgeschlossene Menge $A \subset \Omega$ im Allgemeinen *nicht* automatisch von der Klasse $W^{k,q}(\Omega)$, selbst wenn $\mathscr{L}^n(A) = 0$.

2. Eine auf $\overline{\Omega} \subset\subset \mathbb{R}^n$ klassisch differenzierbare Abbildung ist auch in dem entsprechenden Sobolevraum zu jeder Integrabilität. Das ist i.A. falsch, wenn man die Differenzierbarkeit nur in Ω hat:

$$\begin{aligned} u \in C^k(\overline{\Omega}),\ \Omega \subset\subset \mathbb{R}^n \quad &\Rightarrow \quad u \in W^{k,q}(\Omega) \qquad \text{für alle } q \in [1,\infty] \\ u \in C^k(\Omega) \quad &\underset{\text{i.A.}}{\not\Rightarrow} \quad u \in W^{k,q}(\Omega). \end{aligned}$$

Proposition 2.2 [Sobolevräume sind Banachräume]
Der Sobolevraum $W^{k,q}(\Omega)$ ist ein Banachraum, d.h. ein vollständiger linearer normierter

Raum, für alle $1 \leq q \leq \infty$. Für $q = 2$ ist dieser BANACH*raum ein* HILBERT*raum mit dem Skalarprodukt*

$$\langle f, g \rangle_{W^{k,2}(\Omega)} := \sum_{0 \leq |\gamma| \leq k} \int_\Omega \partial^\gamma f(x)\, \partial^\gamma g(x)\, \mathrm{d}x.$$

Beweis. Wir werden zeigen, dass der Raum $W^{k,q}(\Omega)$ isometrisch isomorph zu einem abgeschlossenen Unterraum von $L^q(\Omega) \times \cdots \times L^q(\Omega)$ versehen mit der Norm

$$\|(u^1, u^2, \ldots, u^M)\|_{L^q(\Omega) \times \cdots \times L^q(\Omega)} := \left(\sum_{i=1}^M \|u^i\|^q_{L^q(\Omega)} \right)^{1/q}$$

ist, wobei M die Anzahl der Multiindizes γ ist mit $|\gamma| \leq k$. Da das endliche kartesische Produkt der BANACHräume $L^q(\Omega)$ wieder ein BANACHraum ist und jeder abgeschlossene Unterraum eines BANACHraumes selbst ein BANACHraum ist (siehe z.B. [3, Übung U0.8]), ist auch der SOBOLEVraum $W^{k,q}(\Omega)$ ein BANACHraum. Dazu betrachtet man die isometrische lineare Abbildung

$$\begin{aligned} J : W^{k,q}(\Omega) &\to L^q(\Omega) \times \cdots \times L^q(\Omega), \\ u &\mapsto (u^\gamma)_{|\gamma| \leq k}, \end{aligned}$$

deren Bild nach Definition 2.1

$$\begin{aligned} J\left(W^{k,q}(\Omega)\right) = \Big\{ &(u^\gamma)_{|\gamma| \leq k} \in L^q(\Omega) \times \cdots \times L^q(\Omega) : \\ &\int_\Omega u\, \partial^\gamma \varphi = (-1)^{|\gamma|} \int_\Omega u^\gamma \varphi \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega), |\gamma| \leq k \Big\} \end{aligned}$$

ein abgeschlossener Unterraum von $L^q(\Omega) \times \cdots \times L^q(\Omega)$ ist. Tatsächlich gilt für $u_i \to u$ in $W^{k,q}(\Omega)$ ($\Rightarrow u_i^\gamma \longrightarrow u^\gamma$ in $L^q(\Omega)$ für alle $|\gamma| \leq k$)

$$\int_\Omega u \partial^\gamma \varphi\, \mathrm{d}x \underset{i\to\infty}{\longleftarrow} \int_\Omega u_i\, \partial^\gamma \varphi\, \mathrm{d}x = (-1)^{|\gamma|} \int_\Omega u_i^\gamma \varphi\, \mathrm{d}x \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} \int_\Omega u^\gamma \varphi\, \mathrm{d}x \quad \text{für alle} \quad \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Für $q = 2$ prüft man die Skalarprodukteigenschaften direkt nach. □

Definition 2.3
(i) *Für $1 \leq q < \infty$ definieren wir*

$$W_0^{k,q}(\Omega) := \overline{C_0^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_{W^{k,q}(\Omega)}}.$$

Der Ausdruck auf der rechten Seite bezeichnet den Abschluss oder die Vervollständigung des Raumes $C_0^\infty(\Omega)$ bezüglich der in Definition 2.1 eingeführten $W^{k,q}$-Norm. Diesen Raum nennen wir den SOBOLEVraum *der Ordnung k und Integrabilität q mit* schwachen Nullrandwerten.
(ii) *Für $\Omega \subset A \subset \overline{\Omega}$ definieren wir den* lokalen SOBOLEVraum

$$W^{k,q}_{loc}(A) := \left\{ u \in L^q_{loc}(\Omega) : \forall x \in A\ \exists \rho_x > 0 : u \in W^{k,q}\left(\Omega \cap B_{\rho_x}(x)\right) \right\},$$

und speziell: $W^{k,q}_{loc}(\Omega) := \left\{ u \in L^q_{loc}(\Omega) : \forall\, \Omega' \subset\subset \Omega : u \in W^{k,q}(\Omega') \right\}$.

Bemerkung:
Jede Funktion in $W_0^{k,q}(\Omega)$ für $q \in [1,\infty)$ ist demnach der Grenzwert einer bezüglich der $W^{k,q}$-Norm konvergenten Funktionenfolge in $C_0^\infty(\Omega) \subset W^{k,q}(\Omega)$ und deswegen nach Proposition 2.2 automatisch selbst wieder eine $W^{k,q}$-Funktion. Es gilt also $W_0^{k,q}(\Omega) \subset W^{k,q}(\Omega)$, und zu $u \in W_0^{k,q}(\Omega)$ und $\varepsilon > 0$ finden wir eine Funktion $u_\varepsilon \in C_0^\infty(\Omega)$ mit

$$\|u - u_\varepsilon\|_{W^{k,q}(\Omega)} < \varepsilon.$$

Darüberhinaus ist $W_0^{k,q}(\Omega)$ nach Definition ein abgeschlossener Unterraum eines BANACHraums und damit nach [3, Übung U0.8] selbst wieder ein BANACHraum, für $q = 2$ sogar ein HILBERTraum.

Wenn die schwachen Ableitungen identisch verschwinden, dann ist die SOBOLEVfunktion auf Zusammenhangskomponenten des Definitionsbereichs konstant[2]:

Lemma 2.4 [$\nabla u \equiv 0 \;\Rightarrow\; u \equiv$ KONST.]
Falls Ω offen und zusammenhängend ist und für $u \in W^{1,1}_{loc}(\Omega)$ die Identität $\nabla u = 0$ in Ω gilt, dann gibt es eine Konstante $c \in \mathbb{R}$, so dass

$$u(x) = c \qquad \text{für } \mathscr{L}^n\text{-fast alle } x \in \Omega.$$

Bemerkung:
Speziell können wir durch Abänderung auf einer $\mathscr{L}^n$-Nullmenge einen (guten) Repräsentanten

$$u^* \in [u] : u^*(x) = \text{konst.} \qquad \text{für alle } x \in \Omega$$

finden. In der Regel können wir ohne Einschränkung mit dem optimalen Repräsentanten u^* (weiter)rechnen, wobei wir dann der Einfachheit halber die Bezeichnung u wählen. Allerdings gibt es Situationen, bei denen die Auswahl ausgezeichneter SOBOLEV-Repräsentanten mit Vorsicht getroffen werden sollte, siehe hierzu z.B. die Arbeit von P. HAJŁASZ [47] und die dort zitierte Literatur.

Beweis von Lemma 2.4. Für $x_0 \in \Omega$ wählt man $\rho > 0$, so dass $B_{2\rho}(x_0) \subset \Omega$, und zu $0 < \varepsilon < \rho$ betrachtet man den Faltungskern (siehe Definition A.20 im Anhang) $\varphi_\varepsilon(x) := \frac{1}{\varepsilon^n}\varphi(\frac{x}{\varepsilon})$, $\varphi \in C_0^\infty(B_1(0))$. Für $x \in B_\rho(x_0)$ gilt dann

$$\varphi_\varepsilon(x - \cdot) \in C_0^\infty(B_\varepsilon(x)) \subset C_0^\infty(B_{2\rho}(x_0)) \subset C_0^\infty(\Omega).$$

[2]Diese Aussage kann man auch nutzen, um einen sehr kurzen Alternativbeweis für das Fundamentallemma von DUBOIS-REYMOND, Lemma 1.10, zu führen, siehe dortige Fußnote gegen Ende des Beweises.

Für die Faltung $u_\varepsilon := \varphi_\varepsilon * u = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi_\varepsilon(. - y)u(y)\,\mathrm{d}y$ berechnen wir für $x \in B_\rho(x_0)$

$$\begin{aligned}
\nabla_x u_\varepsilon(x) &= \int\limits_{\mathbb{R}^n} \nabla_x(\varphi_\varepsilon(x-y))\, u(y)\,\mathrm{d}y \\
&= -\int\limits_{\mathbb{R}^n} \nabla_y(\varphi_\varepsilon(x-y))\, u(y)\,\mathrm{d}y \\
&\underset{\text{Def.2.1}}{=} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi_\varepsilon(x-y)\, \nabla_y u(y)\,\mathrm{d}y \\
&= \int\limits_{\Omega} \varphi_\varepsilon(x-y) \quad \overbrace{\underbrace{\nabla_y u(y)}_{=0}}^{\substack{\text{schwache Ableitung}\\ \text{von u}}} \quad \mathrm{d}y \\
&= (\nabla u)_\varepsilon(x) \quad = \quad 0.
\end{aligned}$$

Also existiert eine Konstante $c_\varepsilon \in \mathbb{R}$, so dass $u_\varepsilon(x) = c_\varepsilon$ für alle $x \in B_\rho(x_0)$. Aus Satz A.21 im Anhang wissen wir, dass $u_\varepsilon \longrightarrow u$ in $L^1_{loc}(\Omega)$ für $\varepsilon \to 0$, speziell also für eine Teilfolge, die wir wieder mit u_ε bezeichnen, $u_\varepsilon \longrightarrow u$ $\mathscr{L}^n$-fast überall in Ω für $\varepsilon \to 0$.

Wähle also $x \in B_\rho(x_0)$ als einen LEBESGUE-Punkt von u, so dass speziell $u(x) \in \mathbb{R}$, und so dass gleichzeitig $u_\varepsilon(x) \to u(x)$ für $\varepsilon \to 0$ gilt. ($\mathscr{L}^n$-fast alle Punkte $x \in \Omega$ erfüllen beide Forderungen.) Damit folgt

$$c_\varepsilon = u_\varepsilon(x) \to c_0 := u(x) \qquad \text{für } \varepsilon \to 0, \tag{2.2}$$

und gleiches gilt auch für alle anderen Punkte $y \in B_\rho(x_0)$, für die $c_\varepsilon = u_\varepsilon(y) \to u(y)$ für $\varepsilon \to 0$, so dass schließlich wegen (2.2)

$$u(y) = c_0 \qquad \text{für } \mathscr{L}^n\text{-fast alle } y \in B_\rho(x_0). \tag{2.3}$$

Um zu zeigen, dass u auch konstant in Ω ist, definieren wir die Menge

$$M_{c_0} := \{\xi \in \Omega : \exists \rho_\xi > 0 : u|_{B_{\rho_\xi}(\xi)} = c_0 \text{ fast überall}\}.$$

Diese Menge ist nicht leer, da $x_0 \in M_{c_0}$. Weiterhin ist M_{c_0} eine offene Teilmenge des $\mathbb{R}^n$, da zu $z \in M_{c_0}$ ein Radius $\rho_z > 0$ existiert, so dass $u|_{B_{\rho_z}(z)} = c_0$ fast überall, und damit für jedes $\zeta \in B_{\rho_z}(z)$ der Radius $\rho_\zeta := (\rho_z - |\zeta - z|)/2 > 0$ existiert, so dass $B_{\rho_\zeta}(\zeta) \subset B_{\rho_z}(z)$, und dadurch $u|_{B_{\rho_\zeta}(\zeta)} = c_0$ fast überall gilt. Damit ist gezeigt, dass der ganze Ball $B_{\rho_z}(z)$ in M_{c_0} enthalten ist, also ist M_{c_0} eine offene Teilmenge des $\mathbb{R}^n$. Folglich ist M_{c_0} relativ offen in Ω.

M_{c_0} ist aber auch relativ abgeschlossen in Ω, da wir nun zeigen werden, dass $M_{c_0} = \overline{M_{c_0}} \cap \Omega$. Die Inklusion $M_{c_0} \subset \overline{M_{c_0}} \cap \Omega$ folgt direkt aus der Definition von M_{c_0}. Andererseits gibt es für einen Punkt $x \in \overline{M_{c_0}} \cap \Omega$ eine Folge von Punkten $x_i \in M_{c_0}$, so dass $x_i \to x$ für $i \to \infty$. Zu x finden wir wie zu Beginn des Beweises ein $\rho_x > 0$, so dass $B_{2\rho_x}(x) \subset \Omega$, so dass wir das Faltungsargument wiederholen können, um zu zeigen, dass eine Konstante $\tilde{c} \in \mathbb{R}$ existiert, so dass

$$u|_{B_{\rho_x}(x)} = \tilde{c} \qquad \text{fast überall} \tag{2.4}$$

gilt. Wähle dann i so groß, dass $x_i \in B_{\rho_x}(x)$. Dazu existiert ein Radius $\rho_{x_i} > 0$, so dass $u|_{B_{\rho_{x_i}}(x_i)} = c_0$ fast überall, und damit wegen (2.4) $\tilde{c} = c_0$ folgt, da $B_{\rho_x}(x) \cap B_{\rho_{x_i}}(x_i) \neq \emptyset$. Also ist $x \in M_{c_0}$, womit wir schließlich bewiesen haben, dass M_{c_0} nichtleer, relativ offen und relativ abgeschlossen ist, was wegen des Zusammenhangs von Ω impliziert, dass $M_{c_0} = \Omega$, also $u(x) = c_0$ für $\mathscr{L}^n$-fast alle $x \in \Omega$. □

Zentral für das Arbeiten mit Sobolevfunktionen ist die Tatsache, dass man solche Funktionen mit Hilfe von glatten Funktionen approximieren kann.

Proposition 2.5 [Lokale Approximation von $W^{k,q}$-Funktionen]
Seien $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $1 \le q < \infty$ und $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen.

(i) *Sei $u \in W^{k,q}_{loc}(\Omega)$ und u_ε die Faltung von u wie im Beweis von Lemma 2.4. Dann gilt $u_\varepsilon \in C^\infty(\Omega')$ für alle $\Omega' \subset\subset \Omega$ und $0 < \varepsilon < \operatorname{dist}(\Omega', \partial\Omega)$ und $u_\varepsilon \underset{\varepsilon \to 0}{\longrightarrow} u$ in $W^{k,q}_{loc}(\Omega)$. Falls $u \in W^{k,q}(\Omega)$, dann ist $u_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.*

(ii) *Falls $u \in W^{k,q}(\Omega)$ und supp $u \subset\subset \Omega$, dann existiert eine Folge $\{u_m\}_{m\in\mathbb{N}} \subset C^\infty_0(\Omega)$, so dass $u_m \underset{m \to \infty}{\longrightarrow} u$ in $W^{k,q}(\Omega)$, also ist $u \in W^{k,q}_0(\Omega)$.*[3]

Falls $\Omega = \mathbb{R}^n$ und $u \in W^{k,q}(\mathbb{R}^n)$, dann existert eine Folge $\{u_m\}_{m\in\mathbb{N}} \subset C^\infty_0(\mathbb{R}^n)$, so dass $u_m \underset{m \to \infty}{\longrightarrow} u$ in $W^{k,q}(\mathbb{R}^n)$. (In diesem Sinne ist $W^{k,q}(\mathbb{R}^n) = W^{k,q}_0(\mathbb{R}^n)$.)

(iii) *Falls $\Omega = \mathbb{R}^n_+ := \mathbb{R}^{n-1} \times (0, \infty)$ und $u \in W^{k,q}(\mathbb{R}^n_+)$, dann existiert eine Folge $\{u_m\}_{m\in\mathbb{N}} \subset C^\infty_0(\mathbb{R}^{n-1} \times [0, \infty))$: $u_m \underset{m \to \infty}{\longrightarrow} u$ in $W^{k,q}(\mathbb{R}^n_+)$.*

Beweis. Wir werden hier nur die von uns häufiger benutzten Teile (i) und (ii) beweisen.
(i) Da der Faltungskern φ_ε von der Klasse $C^\infty_0(B_\varepsilon(0)) \subset C^\infty(\mathbb{R}^n)$ ist, muss man für die Glattheit von u_ε lediglich den Definitionsbereich von u beachten. Für $x \in \Omega' \subset\subset \Omega$ und $0 < \varepsilon < \operatorname{dist}(\Omega', \partial\Omega)$ ist

$$\text{supp } \varphi_\varepsilon(x - \cdot) \subset\subset B_\varepsilon(x) \subset B_\varepsilon(\Omega') := \{y \in \mathbb{R}^n : \operatorname{dist}(y, \Omega') < \varepsilon\} \subset \Omega,$$

und wegen $u \in L^q_{\text{loc}}(\Omega)$ ist u auf supp $\varphi_\varepsilon(x - .)$ definiert und $|u|^q$ integrabel. Weiterhin sind alle Voraussetzungen für die Vertauschbarkeit von Differentiation und Integration erfüllt (siehe z.B. [4, p. 289]), womit man durch wiederholtes Differenzieren die Relation $u_\varepsilon \in C^\infty(\Omega')$ nachweist. Falls $u \in W^{k,q}(\Omega)$, kann man u als L^q-Funktion (aber im Allgemeinen nicht als $W^{k,q}$-Funktion, vgl. den kommenden Fortsetzungssatz Satz 2.13!) durch den Wert Null auf ganz $\mathbb{R}^n$ fortsetzen, womit $u_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ folgt.

Für $x \in \Omega$ und $0 < \varepsilon < \operatorname{dist}(x, \partial\Omega)$ betrachten wir $\varphi_\varepsilon(x - \cdot) \in C^\infty_0(B_\varepsilon(x)) \subset C^\infty_0(\Omega)$

[3] Diesen Teil der Proposition benutzt man für den letzten Grenzübergang (1.10) im Beweis des Fundamentallemmas von DuBois-Reymond, Lemma 1.10. Man muss dort nur nachweisen, dass die stückweise linearen Funktionen ζ_ε kompakten Träger haben und von der Klasse $W^{1,q}(I)$ für ein $q \in [1, \infty)$ sind. Letzteres kann man entweder direkt anhand von Definition 2.1 nachweisen, oder man zitiert den noch zu beweisenden Satz 2.7.

und berechnen wie im Beweis von Lemma 2.4

$$\begin{aligned}
\partial_x^\gamma u_\varepsilon(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} \partial_x^\gamma(\varphi_\varepsilon(x-y))\, u(y)\, \mathrm{d}y \\
&= (-1)^{|\gamma|} \int_{\mathbb{R}^n} \partial_y^\gamma(\varphi_\varepsilon(x-y))\, u(y)\, \mathrm{d}y \\
&\underset{\text{Def.2.1}}{=} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_\varepsilon(x-y)\, \underbrace{\partial^\gamma u(y)}_{\substack{\text{schwache}\\ \text{Ableitung}}}\, \mathrm{d}y \quad = \quad (\partial^\gamma u)_\varepsilon(x).
\end{aligned}$$

Nun liefert der Satz A.21 im Anhang für alle Multiindizes γ mit $|\gamma| \le k$:

$$\partial^\gamma(u_\varepsilon) = (\partial^\gamma u)_\varepsilon \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} (\partial^\gamma u) \quad \text{in } L^q_{loc}(\Omega).$$

Somit folgt $u_\varepsilon \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} u$ in $W^{k,q}_{loc}(\Omega)$.

(ii) Für $0 < \varepsilon < \sigma := \frac{1}{2}\operatorname{dist}(\operatorname{supp} u, \partial\Omega)$ gilt $\operatorname{supp} u_\varepsilon \subset B_\varepsilon(\operatorname{supp} u) \subset B_\sigma(\operatorname{supp} u) \subset\subset \Omega$, und daher $u_\varepsilon \in C_0^\infty(\Omega)$. Aus dem oben bewiesenen Teil (i) folgt $u_\varepsilon \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} u$ in $W^{k,q}_{loc}(\Omega)$ und damit hat man

$$\|u - u_\varepsilon\|_{W^{k,q}(\Omega)} = \|u - u_\varepsilon\|_{W^{k,q}(\overline{B_\sigma(\operatorname{supp} u)})} \longrightarrow 0 \qquad \text{für } \varepsilon \to 0.$$

Falls $\Omega = \mathbb{R}^n$, so betrachte die Faltung $u_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, mit Satz A.21 im Anhang und Teil (i) folgt nun $u_\varepsilon \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} u$ in $W^{k,q}(\mathbb{R}^n)$. Allerdings haben diese approximierenden Funktionen u_ε i.A. keinen kompakten Träger im $\mathbb{R}^n$. Deswegen betrachtet man Abschneidefunktionen $\eta_R \in C_0^\infty(B_{2R}(0))$, wobei $\eta_R \equiv 1$ auf $B_R(0)$ und $0 \le \eta_R \le 1$, mit den Eigenschaften[4]

$$|\partial^\gamma \eta_R| \quad \le \quad \frac{C(l)}{R^l}\chi_{B_{2R}\setminus B_R(0)} \qquad \text{für alle } \ l \in \mathbb{N},\ |\gamma| = l.$$

Dann folgt für $u_{\varepsilon,R} := \eta_R u_\varepsilon$

$$\begin{aligned}
\partial^\gamma u_{\varepsilon,R} &= \sum_{0\le\beta\le\gamma} \binom{\gamma}{\beta} \partial^\beta \eta_R\, \partial^{\gamma-\beta} u_\varepsilon \qquad \text{für alle } \ |\gamma| \le k, \\
\|\partial^\gamma u_{\varepsilon,R} - \eta_R \partial^\gamma u_\varepsilon\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} &= \left\| \sum_{\substack{0\le\beta\le\gamma\\ |\beta|>0}} \binom{\gamma}{\beta} \partial^\beta \eta_R\, \partial^{\gamma-\beta} u_\varepsilon \right\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \\
&\underset{R\ge 1}{\le} \frac{C(k,n)}{R} \underbrace{\|u_\varepsilon\|_{W^{k,q}(\mathbb{R}^n)}}_{<\infty} \underset{R\to\infty}{\longrightarrow} 0.
\end{aligned}$$

[4]Die Schranken an die Ableitungen von η_R kann man einsehen, indem man z.B. eine Funktion $\eta \in C_0^\infty(B_2(0))$ mit $\eta|_{B_1(0)} \equiv 1$ und $0 \le \eta(\cdot) \le 1$ durch $\eta_R(x) := \eta(x/R)$ für $R > 0$ skaliert, so dass weiterhin $0 \le \eta_R(\cdot) \le 1$ und nun $\eta_R|_{B_R(0)} \equiv 1$ gilt, zusammen mit den Abschätzungen

$$|\partial^\gamma \eta_R(x)| = \frac{1}{R^{|\gamma|}} |(\partial^\gamma u)(x/R)| \le \frac{\max_{|\gamma|=l} \|\partial^\gamma u\|_\infty}{R^l} =: \frac{C(l)}{R^l} \quad \text{für } l \in \mathbb{N},\ |\gamma| = l.$$

Weiterhin gilt nach dem LEBESGUEschen Konvergenzsatz

$$\eta_R\, \partial^\gamma u_\varepsilon \underset{R\to\infty}{\longrightarrow} \partial^\gamma u_\varepsilon \quad \text{in } L^q(\mathbb{R}^n) \qquad \text{für alle } \; |\gamma| \leq k.$$

Also können wir für alle $\varepsilon > 0$

$$\partial^\gamma u_{\varepsilon,R} \longrightarrow \partial^\gamma u_\varepsilon \quad \text{in } L^q(\mathbb{R}^n) \;\text{ für }\; R \to \infty \qquad \text{für alle } \; |\gamma| \leq k$$

konstatieren. Das bedeutet

$$u_{\varepsilon,R} \longrightarrow u_\varepsilon \quad \text{in } W^{k,q}(\mathbb{R}^n) \qquad \text{für } \; R \to \infty.$$

Für alle $\sigma > 0$ wähle $0 < \varepsilon \ll 1$, so dass $\|u_\varepsilon - u\|_{W^{k,q}(\mathbb{R}^n)} < \frac{\sigma}{2}$ und dann $R \gg 1$, so dass $\|u_\varepsilon - u_{\varepsilon,R}\|_{W^{k,q}(\mathbb{R}^n)} < \frac{\sigma}{2}$. Damit folgt nun $\|u - u_{\varepsilon,R}\|_{W^{k,q}(\mathbb{R}^n)} < \sigma$. □

Beispiel $\boxed{2.1}$
Wir betrachten für $\alpha > 0$ die stückweise definierte und damit im Ursprung singuläre Funktion

$$u : \Omega := B_1(0) \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

erklärt durch

$$u(x) := \begin{cases} \frac{1}{|x|^\alpha} & \text{für } x \neq 0 \\ 17 & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

Es gilt $u \notin C^1(B_1(0))$, aber es stellt sich die Frage:

Für welche q, n, α ist $u \in W^{1,q}(B_1(0))$?

Zunächst stellen wir fest, dass $u \in C^\infty(B_1(0) \setminus \{0\})$ und wir berechnen für $x \neq 0$ und $\alpha > 0$ die ersten Ableitungen

$$\begin{aligned} \partial_i u(x) &= -\frac{\alpha}{|x|^{\alpha+1}} \frac{x_i}{|x|} = -\alpha \frac{x_i}{|x|^{\alpha+2}}, \\ \Rightarrow \quad |\nabla u(x)| &= \sqrt{\sum_{i=1}^n \frac{(-\alpha x_i)(-\alpha x_i)}{|x|^{2(\alpha+2)}}} = |\alpha| \frac{1}{|x|^{\alpha+1}}. \end{aligned}$$

Diese klassischen partiellen Ableitungen dienen uns als Kandidaten für die entsprechenden schwachen Ableitungen, also testen wir zunächst deren Integrabilität. Falls $\alpha + 1 < n$, so folgt $|\nabla u| \in L^1(B_1(0))$; denn mit Hilfe von Polarkoordinaten berechnet man

$$\begin{aligned} \int\limits_{B_1(0)} |\nabla u(x)|\, \mathrm{d}x &= |\alpha| \int\limits_{B_1(0)} \frac{\mathrm{d}x}{|x|^{\alpha+1}} \\ &= |\alpha| \int_0^1 \frac{r^{n-1}}{r^{\alpha+1}}\, \mathrm{d}r\, \underbrace{\mathscr{H}^{n-1}(\mathbb{S}^{n-1})}_{n\omega_n} = \frac{|\alpha| n\omega_n}{n-\alpha-1} \left[r^{n-(\alpha+1)} \right]_0^1 \\ &=: C(\alpha, n) \left[r^{n-(\alpha+1)} \right]_0^1 < \infty, \end{aligned}$$

wobei $\omega_n := \mathscr{L}^n(B_1(0))$. Mit einer analogen Rechnung erhält man für $0 < \alpha < n$, dass $u \in L^1(B_1(0))$. Zur Überprüfung der in Definition 2.1 enthaltenen Regel der partiellen Integration schneidet man zunächst die Singularität im Ursprung aus dem Integrationsgebiet. D.h. für $\varepsilon > 0$ und für alle $\varphi \in C_0^\infty(B_1(0))$ betrachtet man mit Hilfe der klassischen Regel der partiellen Integration

$$\int\limits_{B_1(0)\setminus B_\varepsilon(0)} u(x)\,\partial_i\varphi(x)\,\mathrm{d}x = (-1)\int\limits_{B_1(0)\setminus B_\varepsilon(0)} \partial_i u(x)\,\varphi(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_{\partial B_\varepsilon(0)} u(\zeta)\varphi(\zeta)\,\nu_i(\zeta)\,\mathrm{d}\mathscr{H}^{n-1}(\zeta),$$

wobei ν_i die i-te Komponente des äußeren Einheitsnormalenvektors an den Rand des Integrationsbereichs bezeichnet. Der Grenzübergang $\varepsilon \to 0$ liefert mit dem Konvergenzsatz von Lebesgue

$$\int\limits_{B_1(0)} u(x)\,\partial_i\varphi(x)\,\mathrm{d}x = (-1)\int\limits_{B_1(0)} \partial_i u(x)\,\varphi(x)\,\mathrm{d}x + 0;$$

denn aus $\alpha + 1 < n$ folgt für das Randintegral

$$\left|\int\limits_{\partial B_\varepsilon(0)} \frac{1}{\varepsilon^\alpha}\varphi(\zeta)\nu_i(\zeta)\,\mathrm{d}\mathscr{H}^{n-1}(\zeta)\right| \le \|\varphi\|_{C^0(\overline{B_1(0)})}\frac{1}{\varepsilon^\alpha}C(n)\varepsilon^{n-1} \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} 0.$$

Falls $\alpha + 1 < n$ erfüllt ist, gilt folglich $u \in W^{1,1}(B_1(0))$.

Entsprechend ist $u \in W^{1,q}(B_1(0))$, falls $\alpha + 1 < \frac{n}{q}$ für $q \in [1,\infty)$, da $\alpha + 1 < \frac{n}{q} \le n$ für alle $q \ge 1$. Tatsächlich gilt die Regel der partiellen Integration, da wir für die obige Rechnung nur $u \in L^1$ und $\nabla u \in L^1$ benötigen. Weiterhin prüft man für $\alpha + 1 < \frac{n}{q}$ leicht nach, dass $\nabla u \in L^q(B_1(0))$, denn aus $(\alpha+1)q < n$ folgt

$$\int\limits_{B_1(0)} |\nabla u|^q\,\mathrm{d}x = C(n,\alpha)\int_0^1 \frac{r^{n-1}}{r^{(\alpha+1)q}}\,\mathrm{d}r = C(n,\alpha)\left[r^{n-(\alpha+1)q}\right]_0^1 < \infty.$$

Analog zeigt man, dass $u \in L^q(B_1(0))$. Andererseits sieht man mit diesen Rechnungen, dass $u \notin W^{1,q}(B_1(0))$ für $q \ge n$. Zusammenfassend haben wir für diese Beispielfunktion

$$u \in W^{1,q}(B_1(0)) \quad \Leftrightarrow \quad 0 < \alpha < \frac{n}{q} - 1.$$

Die von Nirenberg in [82] entwickelte Technik von Regularitätsbeweisen mittels Differenzenquotienten basiert im Wesentlichen auf dem folgenden Lemma. In der Regularitätstheorie der Variationsrechnung (und bei partiellen Differentialgleichungen) nutzt man dabei Differenzenquotienten der Lösungen als zulässige Testfunktionen in den schwachen Euler-Lagrange-Gleichungen, um Integralabschätzungen für Potenzen dieser Differenzenquotienten zu gewinnen. Dann verbessert Teil (ii) des folgenden Resultates die Differenzierbarkeitsordnung der Lösung um eine Stufe, was einen Regularitätsgewinn bedeutet. Wir werden diese Technik z.B. bei der Untersuchung eines Hindernisproblems in Abschnitt 5.2 benutzen.

Lemma 2.6 [Differenzenquotienten in Sobolevräumen]
Sei $k \in \mathbb{N}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $h \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $l \in \{1, \dots, n\}$, und $e_l \in \mathbb{S}^{n-1}$ sei der l-te Standardbasisvektor, $u \in L^1_{loc}(\Omega)$, und

$$\Delta_h^{e_l} u(x) := \frac{u(x + he_l) - u(x)}{h}$$

der für $\mathscr{L}^n$-fast alle $x \in \Omega$ und genügend kleine $|h| > 0$ definierte Differenzenquotient *von u in die l-te Koordinatenrichtung. Dann ist Folgendes wahr:*

(i) *Für alle $\Omega' \subset\subset \Omega$ und $0 < |h| < dist(\Omega', \partial\Omega)$ und für $u \in W^{k,q}(\Omega)$, $1 \le q < \infty$, gilt*

$$\|\Delta_h^{e_l} u\|_{W^{k-1,q}(\Omega')} \le \|\partial_l u\|_{W^{k-1,q}(\Omega)} \qquad \text{für alle } l = 1, \dots, n,$$

und

$$\Delta_h^{e_l} u \underset{h \to 0}{\longrightarrow} \partial_l u \qquad \text{in } W^{k-1,q}_{loc}(\Omega).$$

(ii) *Falls $u \in W^{k-1,q}_{loc}(\Omega)$, $1 < q < \infty$, und falls für alle $\Omega' \subset\subset \Omega$ eine Konstante $C(\Omega') < \infty$ existiert, die unabhängig von h mit $0 < |h| < dist(\Omega', \partial\Omega)$ ist, so dass*

$$\|\Delta_h^{e_l} u\|_{W^{k-1,q}(\Omega')} \le C(\Omega'),$$

dann ist $u \in W^{k,q}_{loc}(\Omega)$.

Beweis. (i) Sei zunächst $u \in W^{k,q}(\Omega) \cap C^\infty(\overline{\Omega})$, $|\gamma| \le k - 1$. Es gilt für $x \in \Omega'$ und $0 < |h| < \operatorname{dist}(\Omega', \partial\Omega)$

$$\begin{aligned}
\partial^\gamma \Delta_h^{e_l} u(x) &= \frac{1}{h}\left(\partial^\gamma u(x + he_l) - \partial^\gamma u(x)\right) = \frac{1}{h}\int_0^1 \frac{d}{dt}\partial^\gamma u(x + the_l)\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{h}\int_0^1 \nabla\partial^\gamma u(x + the_l) \cdot he_l\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \partial_l \partial^\gamma u(x + the_l)\,\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

Also folgt mit der Jensen-Ungleichung und dem Satz von Fubini

$$\begin{aligned}
\|\partial^\gamma \Delta_h^{e_l} u\|^q_{L^q(\Omega')} &\le \int_{\Omega'}\int_0^1 |\partial^\gamma \partial_l u(x + the_l)|^q \,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x = \int_0^1\int_{\Omega'} |\partial^\gamma \partial_l u(x + the_l)|^q \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \\
&\le \int_0^1 \int_\Omega |\partial^\gamma \partial_l u(z)|^q \,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}t = \|\partial^\gamma \partial_l u\|^q_{L^q(\Omega)},
\end{aligned}$$

wobei wir in der letzten Ungleichung zunächst die Substitution $z := x + the_l \in \Omega$ mit $dz = dx$ benutzt haben, um anschließend den Integrationsbereich auf ganz Ω zu vergrößern.

Weiterhin gilt $\Delta_h^{e_l} u \underset{h \to 0}{\longrightarrow} \partial_l u$ in $C^s(\overline{\Omega})$ für alle $s \in \mathbb{N}$ und $l = 1 \dots, n$, da $u \in C^\infty(\overline{\Omega})$. Also gilt die Konvergenz auch in $W^{k-1,q}_{loc}(\Omega)$. Für eine allgemeine Funktion $u \in W^{k,q}(\Omega)$ existiert nach Proposition 2.5 eine Folge $\{u_m\}_m \subset C^\infty(\overline{\Omega})$ mit $u_m \underset{m \to \infty}{\longrightarrow} u$ in $W^{k,q}_{loc}(\Omega)$. Für $0 < |h| < \operatorname{dist}(\Omega', \partial\Omega)$ wähle $\delta \in (|h|, \operatorname{dist}(\Omega', \partial\Omega))$ und setze

$$\Omega'' := B_\delta(\Omega') := \{x \in \mathbb{R}^n | \operatorname{dist}(x, \Omega') < \delta\}.$$

Dann hat man

$$\begin{aligned}\|\Delta_h^{e_l} u\|_{W^{k-1,q}(\Omega')} \underset{m\to\infty}{\longleftarrow} \|\Delta_h^{e_l} u_m\|_{W^{k-1,q}(\Omega')} &\leq \|\partial_l u_m\|_{W^{k-1,q}(\Omega'')} \\ &\underset{m\to\infty}{\longrightarrow} \|\partial_l u\|_{W^{k-1,q}(\Omega'')} \leq \|\partial_l u\|_{W^{k-1,q}(\Omega)}.\end{aligned}$$

Folglich ist nach der soeben bewiesenen Abschätzung angewendet auf die Differenz $u - u_m \in W^{k,q}(\Omega)$ und die Definitionsbereiche $\Omega' \subset\subset \Omega'' \subset\subset \Omega$

$$\begin{aligned} 0 &\leq \liminf_{0\neq h\to 0} \|\Delta_h^{e_l} u - \partial_l u\|_{W^{k-1,q}(\Omega')} \\ &\leq \limsup_{0\neq h\to 0} \|\Delta_h^{e_l} u - \partial_l u\|_{W^{k-1,q}(\Omega')} \\ &\leq \limsup_{h\to 0} \|\Delta_h^{e_l}(u - u_m)\|_{W^{k-1,q}(\Omega')} + \limsup_{h\to 0} \|\Delta_h^{e_l} u_m - \partial_l u_m\|_{W^{k-1,q}(\Omega')} \\ &\qquad + \limsup_{h\to 0} \|\partial_l(u - u_m)\|_{W^{k-1,q}(\Omega')} \\ &\leq 2\|\partial_l(u - u_m)\|_{W^{k-1,q}(\Omega'')} \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0; \end{aligned}$$

denn aus der Glattheit von u_m folgt $\limsup_{h\to 0} \|\Delta_h^{e_l} u_m - \partial_l u_m\|_{W^{k-1,q}(\Omega')} = 0$.
(ii) $L^q(\Omega)$ ist ein reflexiver BANACHraum (siehe Definition A.4 im Anhang) und damit auch $W^{k-1,q}(\Omega)$ für $1 < q < \infty$. Man wählt eine *Ausschöpfung* $\{\Omega_i\}_i$ von Ω mit

$$\Omega_i \subset\subset \Omega_{i+1} \quad \text{für alle } i \in \mathbb{N} \text{ und } \quad \Omega = \bigcup_{i=1}^{\infty} \Omega_i.$$

Nach Voraussetzung gilt

$$\|\Delta_h^{e_l} u\|_{W^{k-1,q}(\Omega_i)} \leq C(\Omega_i) \quad \text{für } 0 < |h| < \operatorname{dist}(\Omega_i, \partial\Omega).$$

Zu Ω_1 gibt es eine Teilfolge $h_1 \to 0$ und Funktionen $v_1^{\gamma,l} \in L^q(\Omega_1)$ mit

$$\partial^\gamma \Delta_{h_1}^{e_l} u \underset{h_1\to 0}{\rightharpoonup} v_1^{\gamma,l} \qquad \text{in } L^q(\Omega_1)\ \forall |\gamma| \leq k-1,\ l = 1,\ldots,n.$$

Zu Ω_2 existieren eine Teilfolge $\{h_2\} \subset \{h_1\}$ und Funktionen $v_2^{\gamma,l} \in L^q(\Omega_2)$ mit $h_2 \to 0$ und

$$\partial^\gamma \Delta_{h_2}^{e_l} u \underset{h_2\to 0}{\rightharpoonup} v_2^{\gamma,l} \qquad \text{in } L^q(\Omega_2)\ \forall |\gamma| \leq k-1,\ l = 1,\ldots,n.$$

Die Fortsetzung dieses Auswahlverfahrens und ein darauffolgendes Diagonalfolgenargument liefert eine Folge $h \to 0$ und Funktionen $u^{\gamma,l} \in L^q_{\text{loc}}(\Omega)$ definiert durch

$$u^{\gamma,l}(x) := v_N^{\gamma,l}(x) \qquad \text{für } \ x \in \Omega_N,$$

so dass

$$\partial^\gamma \Delta_h^{e_l} u \underset{h\to 0}{\rightharpoonup} u^{\gamma,l} \qquad \text{in } L^q_{loc}(\Omega)\ \forall |\gamma| \leq k-1,\ l = 1,\ldots,n, \tag{2.5}$$

d.h. schwache Konvergenz in $L^q(K)$ für jedes Kompaktum[5] $K \subset \Omega$.

[5]Tatsächlich findet man zu einem beliebigen Kompaktum $K \subset \Omega$ ein $N \in \mathbb{N}$, so dass aufgrund der Ausschöpfungseigenschaft $K \subset \Omega_N$, und daraus folgt

$$\partial^\gamma \Delta_h^{e_l} u \rightharpoonup v_N^{\gamma,l} = u^{\gamma,l}|_K \quad \text{in } L^q(K).$$

Zu einem Multiindex $\bar\gamma$ mit $|\bar\gamma| = k$, $k \in \mathbb{N}$, findet man einen Multiindex γ mit $|\gamma| = k-1$ und eine Koordinatenrichtung gegeben durch den Standardbasisvektor $e_l \in \mathbb{S}^{n-1}$ für ein $l \in \{1, \dots, n\}$, so dass $\bar\gamma = \gamma + e_l$. Damit ergibt sich für $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ mit der Regel der *diskreten partiellen Integration*

$$
\begin{aligned}
\int_\Omega u \partial^{\bar\gamma}\varphi \,\mathrm{d}x \underset{h_i\to 0}{\longleftarrow} \int_\Omega u \Delta^{e_l}_{-h_i} \partial^\gamma \varphi \,\mathrm{d}x \quad &= \quad (-1)\int_\Omega \Delta^{e_l}_{h_i} u \partial^\gamma \varphi \,\mathrm{d}x \\
&= \quad (-1)^{|\bar\gamma|}\int_\Omega \Big(\partial^\gamma \Delta^{e_l}_{h_i} u\Big)\varphi \,\mathrm{d}x \\
&\underset{h_i\to 0}{\longrightarrow} \quad (-1)^{|\bar\gamma|}\int_\Omega u^{\gamma,l}\varphi \,\mathrm{d}x,
\end{aligned}
$$

wobei wir für den letzten Grenzübergang die (lokal) schwache Konvergenz in (2.5) ausgenutzt haben. Aufgrund von Definition 2.1 gilt somit $u \in W^{k,q}_{loc}(\Omega)$ mit schwachen Ableitungen $\partial^{\bar\gamma} u := u^{\gamma,l}$. □

Wir beweisen nun die folgende Charakterisierung von LIPSCHITZstetigen Funktionen.

Satz 2.7 $[C^{k-1,1}(\overline{\Omega}) \cong W^{k,\infty}(\Omega)]$
Sei $k \in \mathbb{N}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Dann gilt:

(i) $C^{k-1,1}(\overline{\Omega}) \subset W^{k,\infty}(\Omega)$*, und für jeden Multiindex γ mit $0 < |\gamma| \le k$ und zugehörigem Multiindex $\bar\gamma$ und Koordinatenrichtung $l \in \{1, \dots, n\}$ mit $\gamma = \bar\gamma + e_l$ hat man die Abschätzung* $\|\partial^\gamma u\|_{L^\infty(\Omega)} \le \mathrm{Lip}_\Omega(\partial^{\bar\gamma} u)$.

(ii) *Falls Ω beschränkt ist und $\partial\Omega \in C^{k-1,1}$, dann gilt $W^{k,\infty}(\Omega) \subset C^{k-1,1}(\overline{\Omega})$ mit der Abschätzung* $\mathrm{Lip}_\Omega u \le \|\nabla u\|_{L^\infty(\Omega)}$.

Bemerkung:
Teil (ii) besagt genauer: Es gibt einen Repräsentanten u^* in der Funktionenklasse $[u] \in W^{k,\infty}(\Omega)$, so dass $u^* \in C^{k-1,1}(\overline{\Omega})$. Mit diesem (schönen) Repräsentanten u^* wird in der Regel weitergerechnet und man verwendet stillschweigend die Bezeichnung u. Man beachte aber die grundsätzliche Bemerkung zur Auswahl von günstigen Repräsentanten nach Lemma 2.4.

Beweis. Wir führen den Beweis exemplarisch für $k = 1$, für $k > 1$ betrachtet man anstelle von u die Ableitungen von u zur Ordnung k.
(i) Klar ist, dass $u \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$. Man hat für alle $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ mit Hilfe der *diskreten partiellen Integration*

$$
\left|\int_\Omega u\, \partial_l \varphi \,\mathrm{d}x\right| \underset{h\to 0}{\longleftarrow} \left|\int_\Omega u\, \Delta^{e_l}_{-h}\varphi \,\mathrm{d}x\right| = \left|-\int_\Omega \Delta^{e_l}_h u\, \varphi \,\mathrm{d}x\right| \le \mathrm{Lip}_\Omega u\, \|\varphi\|_{L^1(\Omega)};
$$

denn es gilt

$$
\frac{1}{h}\,|u(x + he_l) - u(x)| \le \frac{|he_l|}{h}\mathrm{Lip}_\Omega u.
$$

Mit dem weiter unten bewiesenen Lemma 2.8 folgt $u \in W^{1,\infty}(\Omega)$.
(ii) Sei $\Omega = B_1(0)$. Der allgemeinere Fall folgt aus einem Überdeckungsargument[6], auf das wir hier verzichten werden. Betrachte nun die Faltung $u_\varepsilon = \varphi_\varepsilon * u$ für einen Faltungskern

[6] Für dieses Argument wird die Regularität des Randes von Ω benötigt.

$\varphi \in C_0^\infty(B_1(0))$ mit $\varphi \geq 0$ und $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi = 1$, so dass $\varphi_\varepsilon(x - \cdot) \in C_0^\infty(B_\varepsilon(x)) \subset C_0^\infty(B_1(0))$ für $x \in B_{1-\varepsilon}(0)$. Dies erlaubt nach Definition 2.1 die Rechnung

$$\begin{aligned}\nabla_x (u_\varepsilon)(x) &= \nabla_x \int_{B_1(0)} \varphi_\varepsilon(x-y)u(y)\,\mathrm{d}y = \int_{B_1(0)} \nabla_x \varphi_\varepsilon(x-y)u(y)\,\mathrm{d}y \\ &= -\int_{B_1(0)} \nabla_y \varphi_\varepsilon(x-y)u(y)\,\mathrm{d}y \underset{\text{Def. 2.1}}{=} \int_{B_1(0)} \varphi_\varepsilon(x-y)\nabla_y u(y) = \big(\nabla u\big)_\varepsilon(x)\end{aligned}$$

für alle $x \in B_{1-\varepsilon}(0)$. Wegen $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi_\varepsilon(x)\,\mathrm{d}x = 1$ (siehe Bemerkung nach der Definition A.20 und Teil (iii) des Satzes A.21 im Anhang) folgt

$$\|u_\varepsilon\|_{C^0(\overline{B_{1-\delta}(0)})} \leq \|u_\varepsilon\|_{C^0(\overline{B_{1-\varepsilon}(0)})} \leq \|u\|_{L^\infty(\Omega)} \qquad \text{für } \ 0 < \varepsilon < \delta \tag{2.6}$$

und

$$\mathrm{Lip}_{B_{1-\delta}(0)} u_\varepsilon \leq \mathrm{Lip}_{B_{1-\varepsilon}(0)} u_\varepsilon \leq \|\nabla u_\varepsilon\|_{C^0(\overline{B_{1-\varepsilon}(0)},\mathbb{R}^n)} \leq \|\nabla u\|_{L^\infty(B_1(0),\mathbb{R}^n)} \ \text{ für } \ 0 < \varepsilon < \delta. \tag{2.7}$$

Sei $\delta_j \to 0$ eine beliebige streng monoton fallende Nullfolge. Zunächst liefert der Satz von Arzelà-Ascoli eine Teilfolge $u_{\varepsilon_i} \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} u_1$ in $C^0(\overline{B_{1-\delta_1}(0)})$ für beliebiges $\delta_1 \in (0,1)$. Für $\delta_2 \in (0, \delta_1)$ können wir aus dieser Teilfolge eine weitere Teilfolge auswählen, die gleichmäßig auf $\overline{B_{1-\delta_2}(0)}$ gegen eine dort stetige Funktion u_2 konvergiert, die aber auf dem kleineren Ball $\overline{B_{1-\delta_1}(0)}$ mit u_1 übereinstimmen muss; und so fahren wir für alle δ_j fort. Die Auswahl einer Diagonalfolge liefert schließlich die lokal gleichmäßige Konvergenz gegen eine Funktion $u^* \in C^0(B_1(0))$, die aber wegen der nach Satz A.21 (i) schon bekannten Konvergenz $u_\varepsilon \to u$ in $L^q_{\mathrm{loc}}(B_1(0))$ für $q \in [1, \infty)$ fast überall in $B_1(0)$ mit u übereinstimmen muss. Wir können für die Diagonalfolge u_ε also schließen

$$u_\varepsilon \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} u \qquad \text{lokal gleichmäßig in } B_1(0).$$

Dann folgt für beliebige Punkte $x, y \in B_1(0)$ und

$$0 < \varepsilon < d < \frac{1}{2} \min\left(\mathrm{dist}(x, \partial B_1(0)), \mathrm{dist}(y, \partial B_1(0))\right)$$

die Abschätzung

$$\begin{aligned}|u(x) - u(y)| &\leq |u(x) - u_\varepsilon(x)| + |u_\varepsilon(x) - u_\varepsilon(y)| + |u_\varepsilon(y) - u(y)| \\ &\leq 2\|u - u_\varepsilon\|_{C^0(\overline{B_{1-d}(0)})} + \mathrm{Lip}_{B_{1-d}(0)} u_\varepsilon\, |x-y| \\ &\underset{(2.7)}{\leq} 2\, \underbrace{\|u - u_\varepsilon\|_{C^0(\overline{B_{1-d}(0)})}}_{\underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} 0} + \|\nabla u\|_{L^\infty(B_1(0))}|x-y|,\end{aligned}$$

also $u \in C^{0,1}(B_1(0))$ mit $\mathrm{Lip}_{B_1(0)} u \leq \|\nabla u\|_{L^\infty(B_1(0))}$. Nach stetiger Fortsetzung dieser auf $B_1(0)$ gleichmäßig stetigen Funktion u folgt auch $u \in C^{0,1}(\overline{B_1(0)})$. □

Wir haben bei dem Beweis von Satz 2.7 die auch in anderen Situationen sehr nützliche Charakterisierung von Sobolevfunktionen verwendet:

Lemma 2.8 [Charakterisierung von $W^{k,q}$]
Seien $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $1 < q \leq \infty$ und $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Dann sind äquivalent:

(i) $u \in W^{k,q}(\Omega)$,

(ii) $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ *und es gibt eine Konstante* $M = M_u$, *so dass*

$$\left|(-1)^{|\gamma|}\int_\Omega u\partial^\gamma\varphi \, \mathrm{d}x\right| \le M_u\|\varphi\|_{L^{q'}(\Omega)} \quad \textit{für alle} \;\; \varphi \in C_0^\infty(\Omega), |\gamma| \le k, \;\textit{wobei}\; \frac{1}{q}+\frac{1}{q'} = 1.$$

Falls (ii) *gilt, dann kann man zusätzlich zeigen, dass die schwachen Ableitungen* $\partial^\gamma u$ *für alle* $|\gamma| \le k$ *die Abschätzung* $\|\partial^\gamma u\|_{L^q(\Omega)} \le M_u$ *erfüllen.*

Beweis. Falls (i) gilt, können wir mit der HÖLDER-Ungleichung abschätzen:

$$\left|(-1)^{|\gamma|}\int_\Omega u\partial^\gamma\varphi \, \mathrm{d}x\right| \underset{\text{Def. 2.1}}{=} \left|\int_\Omega \partial^\gamma u\varphi \, \mathrm{d}x\right| \underset{\text{Hölder-Ungl.}}{\le} \underbrace{\|\partial^\gamma u\|_{L^q(\Omega)}}_{\le\|u\|_{W^{k,q}(\Omega)}=:M_u} \|\varphi\|_{L^{q'}(\Omega)},$$

und es gilt $u \in L^q(\Omega) \subset L^1_{loc}(\Omega)$.

Für den Fall, dass (ii) wahr ist, bemerken wir zunächst, dass für $q' \in [1,\infty)$ der Raum $C_0^\infty(\Omega)$ eine bezüglich der $L^{q'}$-Norm dichte Teilmenge in $L^{q'}(\Omega)$ ist, da bekanntlich $C_0^0(\Omega)$ dicht in $L^{q'}(\Omega)$ liegt, und man C_0^0-Funktionen durch Faltung mit C_0^∞-Funktionen in der C^0-Norm und damit auch in der $L^{q'}$-Norm approximieren kann, vergleiche Korollar A.22 im Anhang.

Für jeden Multiindex γ mit $|\gamma| \le k$ ist die Zuordnung $\varphi \mapsto L_\gamma(\varphi) := (-1)^{|\gamma|}\int_\Omega u\,\partial^\gamma\varphi \, \mathrm{d}x$ ein lineares und nach Voraussetzung bezüglich der $L^{q'}$-Norm stetiges Funktional auf $C_0^\infty(\Omega)$. Durch stetige Fortsetzung erhält man für jeden Multiindex γ mit $|\gamma| \le k$ ein Funktional

$$\tilde{L}_\gamma \in \left(L^{q'}(\Omega)\right)^*.$$

Bekanntlich ist $\left(L^{q'}(\Omega)\right)^*$ isometrisch isomorph zu dem Funktionenraum $L^q(\Omega)$ (siehe z.B. [3, Satz 4.12]). Dies liefert die Existenz einer Funktion $u^\gamma \in L^q(\Omega)$ mit

$$\tilde{L}_\gamma(\varphi) = \int_\Omega u^\gamma\varphi \, \mathrm{d}x \qquad \text{für alle} \;\; \varphi \in L^{q'}(\Omega),$$

speziell also

$$\tilde{L}_\gamma(\varphi) = L_\gamma(\varphi) = (-1)^{|\gamma|}\int_\Omega u\,\partial^\gamma\varphi \, \mathrm{d}x = \int_\Omega u^\gamma\varphi \, \mathrm{d}x \qquad \text{für alle} \;\; \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Als schwache Ableitungen von u erhalten wir also $\partial^\gamma u := u^\gamma \in L^q(\Omega)$ für $|\gamma| \le k$. Schließlich beachtet man, dass für $\gamma = 0$ nach dem auch in höheren Dimensionen gültigen Fundamentallemma, Lemma 1.5 mit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ anstelle von $I \subset \mathbb{R}$, gilt $u = u^0$ $\mathscr{L}^n$-fast überall auf Ω. Damit stimmt u $\mathscr{L}^n$-fast überall mit der Funktion $u^0 \in L^q(\Omega)$ überein, also ergibt sich sogar $u \in L^q(\Omega)$. Zusammen ergibt dies nach Definition 2.1 $u \in W^{k,q}(\Omega)$. Zusätzlich gilt wegen der (nach [3, Satz 4.12] gültigen) isometrischen Isomorphie $(L^{q'}(\Omega))^* \cong L^q(\Omega)$ und wegen der Dichtheit[7] von $C_0^\infty(\Omega)$ in $L^{q'}(\Omega)$

$$\|\partial^\gamma u\|_{L^q(\Omega)} = \|u^\gamma\|_{L^q(\Omega)} = \|\tilde{L}_\gamma\|_{(L^{q'}(\Omega))^*} = \sup_{\substack{f\in L^{q'}(\Omega)\\ \|f\|_{L^{q'}}\le 1}} |\tilde{L}_\gamma(f)| = \sup_{\substack{\varphi\in C_0^\infty(\Omega)\\ \|\varphi\|_{L^{q'}(\Omega)}\le 1}} |L_\gamma(\varphi)| \underset{\text{(ii)}}{\le} M_u.$$

□

[7] Diese Dichtheit geht in der Tat in der letzten Gleichheit des Beweises ein; denn die Norm einer beschränkten linearen Abbildung auf einem linearen normierten Raum ist identisch mit der Norm auf einer dichten Teilmenge des Funktionenraums.

Von fundamentaler Bedeutung für die Beziehung zwischen verschiedenen SOBOLEVräumen und zwischen SOBOLEVräumen und klassischen Funktionenräumen sind die Einbettungssätze von SOBOLEV und MORREY, die wir hier für allgemeine Raumdimensionen $n \geq 1$ nur nennen, aber nicht beweisen wollen. Die in unserem Kontext relevante Raumdimension $n = 1$ erlaubt allerdings einen elementaren Beweis von stärkeren Einbettungsaussagen, die wir später in Satz 2.15 nachholen.

Satz 2.9 [EINBETTUNGSSÄTZE FÜR SOBOLEVFUNKTIONEN]
Seien $k, l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $1 \leq p, q < \infty$, $\alpha \in (0,1)$ und $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^n$ mit $\partial\Omega \in C^{0,1}$. Dann gelten die Aussagen:

(i) (SOBOLEV) *Falls $k \geq l$ und $k - \frac{n}{q} \geq l - \frac{n}{p}$, dann existiert eine* stetige Einbettung

$$W^{k,q}(\Omega) \hookrightarrow W^{l,p}(\Omega).$$

Das bedeutet, dass $W^{k,q}(\Omega) \subset W^{l,p}(\Omega)$ und dass es eine von u unabhängige Konstante $C = C(\Omega, n, p, q, l, k)$ gibt, so dass $\|u\|_{W^{l,p}(\Omega)} \leq C\|u\|_{W^{k,q}(\Omega)}$ für alle $u \in W^{k,q}(\Omega)$.

Falls zusätzlich $k - \frac{n}{q} > l - \frac{n}{p}$ und $k > l$, dann ist diese Einbettung kompakt, *das heißt, falls $\{u_i\}_i \subset W^{k,q}(\Omega)$ mit $\|u_i\|_{W^{k,q}(\Omega)} \leq C$ (unabhängig von i), dann existiert eine Teilfolge $\{u_{i_j}\}_j$ mit $u_{i_j} \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} u$ in $W^{l,p}(\Omega)$.*

(ii) (MORREY) *Falls $k - \frac{n}{q} \geq l + \alpha$, dann gibt es eine stetige Einbettung*

$$W^{k,q}(\Omega) \hookrightarrow C^{l,\alpha}(\overline{\Omega}).$$

Falls zusätzlich $k - \frac{n}{q} > l + \alpha$, dann ist diese Einbettung kompakt.

Bemerkung: 1. Wie schon mehrfach bemerkt (vgl. z.B. die Bemerkung im Anschluss an Lemma 2.4), muss man die Einbettungsaussagen im Sinne von Repräsentanten verstehen. So bedeutet beispielsweise Teil (ii) der obigen Aussage genauer: unter den genannten Voraussetzungen an die Exponenten k, l, n, q und α gibt es zu jeder Funktionenklasse $[u] \in W^{k,q}(\Omega)$ einen Vertreter $u^* \in [u]$ mit $u^* \in C^{l,\alpha}(\overline{\Omega})$. In der Regel wird man mit diesem durch seine Regularität ausgezeichneten Vertreter weiterargumentieren. Der Einfachheit halber nennt man diesen Repräsentanten wieder u.

2. Falls man den Differenzierbarkeitsindex k der SOBOLEVfunktion genügend weit „hochschrauben" kann (z.B. mit Hilfe von Differenzenquotienten bei Lösungen von Variationsproblemen (vgl. Kapitel auch 5.2)), dann liefert (ii) klassische Regularität.

3. Betrachte den Grenzfall $p = \infty$, der in Teil (i) nicht erlaubt ist, für $k = 1$, $l = 0$. Mit $q := n$ ergibt sich $k - \frac{n}{q} = 1 - \frac{n}{n} = 0 = 0 - \frac{n}{\infty}$, also ist die in (i) geforderte nicht strikte Ungleichung für diese k, n, q, l, p erfüllt, aber es gilt

$$W^{1,n}(\Omega) \not\subset L^\infty(\Omega).$$

Das sieht man etwa durch die Funktion $u(x) := \log(1 + |\log|x||)$ für $x \in B_1(0)$; denn $u \notin L^\infty(B_1(0))$ aber für $n \geq 2$ ist $u \in W^{1,n}(B_1(0))$. Für $n = 1$ hingegen gilt $W^{1,1}(\Omega) \subset C^0(\overline{\Omega}) \subset L^\infty(\Omega)$, wie wir in Satz 2.15 beweisen werden.

Aus dem hier unbewiesenen Satz 2.9 lassen sich einige für den Umgang mit SOBOLEVfunktionen im $\mathbb{R}^n$ sehr nützliche Hilfsmittel herleiten, die wir hier nur zum Teil beweisen werden: POINCARÉ-Ungleichungen (Korollare 2.10 und 2.11), Produkt- und Kettenregel (Proposition 2.12 (i), (ii)), Transformationssatz (Proposition 2.12 (iii)) und einen Fortsetzungssatz für SOBOLEVfunktionen (Satz 2.13). Auch für diese Resultate kann man im Fall $n = 1$ teilweise stärkere Versionen mit elementaren Beweisen erzielen, siehe z.B. die für die Existenztheorie nützlichen Varianten der auf Satz 2.15 beruhenden POINCARÉ-Ungleichungen, die wir im Anschluss an diesen Satz angeben.

Korollar 2.10 [„ABSTRAKTE“ POINCARÉ-UNGLEICHUNG]
Sei $1 \leq q \leq \infty$, Ω eine beschränkte, zusammenhängende, offene Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ mit LIPSCHITZ*rand. Sei $\mathcal{K} \subset W^{1,q}(\Omega)$ eine bezüglich $\|\cdot\|_{W^{1,q}}$ abgeschlossene Menge, die zusätzlich ein Kegel ist, das heißt für $u \in \mathcal{K}$ ist auch $\lambda u \in \mathcal{K}$ für alle $\lambda > 0$, und $0 \in \mathcal{K}$ sei die einzige konstante Funktion in $\mathcal{K}$.*
Dann existiert eine Konstante $C = C(n, q, \Omega, \mathcal{K})$ mit

$$\|u\|_{L^q(\Omega)} \leq C\|\nabla u\|_{L^q(\Omega)} \qquad \textit{für alle} \;\; u \in \mathcal{K}.$$

Beweis. Die Annahme des Gegenteils führt auf die Existenz einer Folge $\{u_m\}_m \subset \mathcal{K} \setminus \{0\}$, so dass

$$\|\nabla u_m\|_{L^q(\Omega)} < \frac{1}{m}\|u_m\|_{L^q(\Omega)} \qquad \text{für alle} \;\; m \in \mathbb{N},$$

so dass auch speziell $\|u_m\|_{L^q(\Omega)} > 0$ für alle $m \in \mathbb{N}$. Dies erlaubt die Betrachtung der normierten Funktionen $v_m := \frac{u_m}{\|u_m\|_{L^q(\Omega)}}$, mit $\|v_m\|_{L^q(\Omega)} = 1$ für alle m, und

$$\|\nabla v_m\|_{L^q(\Omega)} = \frac{\|\nabla u_m\|_{L^q(\Omega)}}{\|u_m\|_{L^q(\Omega)}} < \frac{1}{m} \qquad \text{für alle} \;\; m \in \mathbb{N}. \tag{2.8}$$

Das bedeutet insbesondere

$$\|v_m\|_{W^{1,q}(\Omega)} < \left(1 + \left(\frac{1}{m}\right)^q\right)^{1/q} \leq 2.$$

Wir unterscheiden jetzt die beiden folgenden Fälle:
<u>*1. Fall:*</u> $q = \infty$
Satz 2.7 (ii) liefert $W^{1,\infty}(\Omega) \subset C^{0,1}(\overline{\Omega})$ und die Abschätzung $\|v_m\|_{C^{0,1}(\overline{\Omega})} \leq C$. Der Satz von ARZELÀ-ASCOLI liefert eine Teilfolge, für die gilt $v_{m_i} \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} v$ in $C^0(\overline{\Omega})$. Also insbesondere $v_{m_i} \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} v$ in $L^q(\Omega)$.
<u>*2. Fall:*</u> $q < \infty$
Satz 2.9 (i) mit $k = 1$, $l = 0$ und der Tatsache $k - \frac{n}{q} > 0 - \frac{n}{q}$ liefert eine Teilfolge[8] $\{v_{m_i}\}_i$, für die gilt $v_{m_i} \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} v$ in $L^q(\Omega)$.

Damit folgt in beiden Fällen für die Grenzfunktion $\|v\|_{L^q(\Omega)} = 1$. Die Regel der partiellen Integration (Definition 2.1) liefert für alle $i \in \mathbb{N}$, $l \in \{1, \ldots, n\}$ und $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ die Beziehung

$$\int_\Omega v_{m_i} \partial_l \varphi \; \mathrm{d}x = -\int_\Omega \partial_l v_{m_i} \varphi \; \mathrm{d}x.$$

[8]Normalerweise ist es üblich, für dieses Argument den Einbettungssatz von RELLICH (siehe z.B. [3, Satz A6.1]) zu zitieren; der SOBOLEVsche Einbettungssatz, Satz 2.9 (i), ist hier eigentlich nicht nötig. Aus pragmatischen Gründen verzichten wir in unserer Darstellung aber auf den RELLICHschen Satz.

Der Grenzübergang $i \to \infty$ liefert dann wegen (2.8) mit der HÖLDER-Ungleichung

$$\int_\Omega v \partial_l \varphi \, \mathrm{d}x = -\int_\Omega 0 \varphi \, \mathrm{d}x \qquad \text{für alle } \varphi \in C_0^\infty(\Omega). \tag{2.9}$$

Also ist $v \in W^{1,q}(\Omega)$ mit schwacher Ableitung $\nabla v = 0$, und aus (2.8) folgt $\nabla v_{m_i} \to 0 = \nabla v$ und damit insgesamt $v_{m_i} \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} v$ in $W^{1,q}(\Omega)$. Da $\mathcal{K}$ ein abgeschlossener Kegel bezüglich $\|\cdot\|_{W^{k,q}}$ ist, gilt $v \in \mathcal{K}$. Da Ω als zusammenhängend vorausgesetzt ist, impliziert Lemma 2.4, dass [9] $v \equiv \mathit{konst.}$ in Ω. Nach Voraussetzung muss damit $v = 0$ sein. Das ist jedoch ein Widerspruch zu $\|v\|_{L^q(\Omega)} = 1$. □

Korollar 2.11 [POINCARÉ-UNGLEICHUNGEN]
Seien $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^n$ offen und $1 \le q \le \infty$. Dann gilt:

(i) *Falls $q \in [1, \infty)$, dann existiert eine Konstante $C = C(\Omega, n, q)$, so dass*

$$\int_\Omega |u|^q \, \mathrm{d}x \le C \int_\Omega |\nabla u|^q \, \mathrm{d}x \quad \textit{für alle } u \in W_0^{1,q}(\Omega).$$

(ii) *Falls Ω zusammenhängend ist und $\partial\Omega \in C^{0,1}$, dann gibt es für alle $\beta \in (0,1]$ eine Konstante $C = C(\Omega, n, q, \beta)$, so dass*

$$\int_\Omega |u|^q \, \mathrm{d}x \le C \int_\Omega |\nabla u|^q \, \mathrm{d}x \quad \textit{für alle } u \in W^{1,q}(\Omega) \textit{ mit } \mathscr{L}^n(\{u = 0\}) \ge \beta \mathscr{L}^n(\Omega).$$

(iii) *Falls Ω zusammenhängend ist und $\partial\Omega \in C^{0,1}$, dann gibt es eine Konstante $C = C(\Omega, n, q)$, so dass*

$$\int_\Omega |u - \overline{u}_\Omega|^q \, \mathrm{d}x \le C \int_\Omega |\nabla u|^q \, \mathrm{d}x \quad \textit{für alle } u \in W^{1,q}(\Omega),$$

wobei

$$\overline{u}_\Omega := \fint_\Omega u(x) \, \mathrm{d}x.$$

Zusatz: Falls $\Omega = B_R(x)$ für ein $x \in \mathbb{R}^n$ und $1 \le q < \infty$, dann gilt $C(\Omega, n, q) = C(n, q)R^q$ in Teil (i) *und* (iii)*, sowie $C(\Omega, n, q, \beta) = C(n, q, \beta)R^q$ in Teil* (ii).

Bemerkung:
Für den Grenzfall $q = \infty$, der in den Teilen (ii) und (iii) zugelassen ist, muss man die Integrale durch das essentielle Supremum ersetzen. Genauer gesagt gelten die Ungleichungen

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} \le C \|\nabla u\|_{L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^n)} \qquad \text{für alle } u \in W^{1,\infty}(\Omega) \text{ mit } \mathscr{L}^n(\{u = 0\}) \ge \beta \mathscr{L}^n(\Omega)$$

unter den Voraussetzungen in (ii), sowie

$$\|u - \overline{u}_\Omega\|_{L^\infty(\Omega)} \le C \|\nabla u\|_{L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^n)} \qquad \text{für alle } u \in W^{1,\infty}(\Omega).$$

[9] Diesen Schluss erhielte man für $n = 1$ mit (2.9) auch durch Anwendung des Fundamentallemmas von DuBois-Reymond, Lemma 1.10 für $\Omega := I = (a, b) \subset \mathbb{R}$.

Beweis. Der Teil (iii) folgt direkt aus der abstrakten POINCARÉ-Ungleichung, Korollar 2.10. Den Teil (i) kann man entweder direkt beweisen (vgl. z.B. [3, Lemma 4.7]) oder über ein indirektes Argument wie im Beweis von Korollar 2.10. Den Teil (ii) kann man ebenfalls über ein indirektes Argument ähnlich wie im Beweis von Korollar 2.10 zeigen – eine direkte Anwendung dieses Korollars auf die vorliegende Situation ist aber auch möglich. Die explizite Abhängigkeit vom Radius R für $\Omega = B_R(x)$ (oder für ähnlich gleichmäßig skalierende Gebiete wie z.B. für $\Omega := B_R(x) \setminus B_{R/2}(x)$) erhält man mit einem einfachen Skalierungsargument. □

Mit Hilfe von Approximationsargumenten kann man aus der klassischen Produkt- und Kettenregel für glatte Funktionen die entsprechenden Differentiationsregeln für SOBOLEVfunktionen herleiten. Gleiches gilt für den Transformationssatz, wenn man SOBOLEVfunktionen mit LIPSCHITZstetigen Funktionen komponiert. Wenn man SOBOLEVfunktionen mit SOBOLEVfunktionen verknüpfen will, bedarf es einer eingehenden Untersuchung der Abbildungseigenschaften. Insbesondere die LUSIN*eigenschaft* ist dabei zu beachten: Eine Funktion besitzt die LUSINeigenschaft, wenn sie Nullmengen auf Nullmengen abbildet. Diese Eigenschaft kann man in der Tat für LIPSCHITZstetige Transformationen vergleichsweise leicht nachweisen, siehe z.B. [3, Lemma 2.26]. Eine allgemeinere Kettenregel für SOBOLEVfunktionen findet man beispielsweise in [111]. Zur LUSINeigenschaft auch im Zusammenhang mit der Gültigkeit der *Flächenformel* findet man interessante Informationen in [47] und in den dort zitierten Arbeiten. So haben MALÝ und MARTIO [68, 67] (siehe auch [61, 62]) durch Modifikation eines Beispiels von CESARI eine SOBOLEVfunktion $\psi \in W^{1,n}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) \cap C^0(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ mit der überraschenden Eigenschaft

$$\psi([0,1] \times \{0\} \times \ldots \times \{0\}) = [0,1]^n \subset \mathbb{R}^n$$

konstruiert. Offensichtlich hat diese Funktion ψ nicht die LUSINeigenschaft, so dass die Flächenformel und der Transformationssatz auf diese Transformation nicht anwendbar sind.

Proposition 2.12 [PRODUKT- UND KETTENREGEL, TRANSFORMATIONSSATZ]
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen.

(i) *Seien $u \in W^{1,q}(\Omega), v \in W^{1,p}(\Omega)$ und $1 \leq p, q, r \leq \infty$ mit $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = \frac{1}{r}$. Dann ist $uv \in W^{1,r}(\Omega)$ mit*
$$\nabla(uv) = (\nabla u)v + u(\nabla v).$$

(ii) *Seien $f \in C^{0,1}(\mathbb{R})$ mit[10] $f(0) = 0$, und $u \in W^{1,q}(\Omega)$, $1 \leq q \leq \infty$. Dann ist $f \circ u \in W^{1,q}(\Omega)$ mit*
$$\nabla(f \circ u) = f'(u)\nabla u \quad \mathscr{L}^n\text{-fast überall in } \Omega.$$

(Nach dem Satz von RADEMACHER *(siehe z.B. [112]) folgt aus $f \in C^{0,1}(\mathbb{R})$ die Existenz von $f'(z)$ für $\mathscr{L}^n$-fast alle $z \in \mathbb{R}$; allgemeiner gilt für $F \in C^{0,1}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ die (totale) Differenzierbarkeit von F $\mathscr{L}^n$-fast überall.)*

(iii) *Seien Ω_1, Ω_2 offen im $\mathbb{R}^n$, $\psi : \Omega_1 \to \Omega_2$ ein Bi-*LIPSCHITZ*homöomorphismus mit $Lip_{\Omega_1}\psi \leq L, Lip_{\Omega_2}\psi^{-1} \leq L$ und $u \in W^{1,q}(\Omega_2)$, $1 \leq q \leq \infty$. Dann ist $u \circ \psi \in W^{1,q}(\Omega_1)$ mit*
$$\nabla(u \circ \psi) = [(\nabla u) \circ \psi]D\psi \quad \mathscr{L}^n\text{-fast überall in } \Omega_1$$

[10] Die Zusatzbedingung $f(0) = 0$ ist für beschränkte Gebiete nicht nötig, für $q = \infty$ ist sie auch für unbeschränkte Gebiete nicht nötig.

und

$$\|u \circ \psi\|_{W^{1,q}(\Omega_1)} \leq C(n, L)\|u\|_{W^{1,q}(\Omega_2)}.$$

Beweis. Für Teil (iii) verweisen wir auf den Beweis von [3, Satz 2.25], der sich auf die vorliegende Situation übertragen lässt. Eine vereinfachte Variante von Teil (ii) wird in einer Übungsaufgabe behandelt, die allgemeine Aussage wird z.B. in dem Buch von Ziemer [112] bewiesen.

Es soll hier nur Teil (i) für den Fall $p, q < \infty$ bewiesen werden. Zunächst stellen wir ganz allgemein mit Hilfe der Hölder-Ungleichung fest, dass für $f \in L^q(\Omega)$ und $g \in L^p(\Omega)$ das Produkt $f \cdot g$ von der Klasse $L^r(\Omega)$ ist; denn

$$\int_\Omega |f \cdot g|^r \,\mathrm{d}x \leq \left(\int_\Omega |f|^{r\frac{q}{r}} \,\mathrm{d}x\right)^{\frac{r}{q}} \left(\int_\Omega |g|^{r\frac{p}{r}} \,\mathrm{d}x\right)^{\frac{r}{p}}.$$

Außerdem gilt für Funktionen $f_i \to f$ in $L^q_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ für $i \to \infty$ die Konvergenz $f_i \cdot g \to f \cdot g$ in $L^r_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, falls $g \in L^p_{\mathrm{loc}}(\Omega)$; denn

$$\begin{aligned}\int_{\Omega'} |f_i \cdot g - f \cdot g|^r \,\mathrm{d}x &\leq \left(\int_{\Omega'} |f_i - f|^{r\frac{q}{r}} \,\mathrm{d}x\right)^{\frac{r}{q}} \left(\int_{\Omega'} |g|^{r\frac{p}{r}} \,\mathrm{d}x\right)^{\frac{r}{p}} \\ &= \|f_i - f\|^r_{L^q(\Omega')} \cdot \|g\|^r_{L^p(\Omega')} \xrightarrow[i\to\infty]{} 0 \quad \text{für alle } \Omega' \subset\subset \Omega\end{aligned}$$

Analog weist man nach, dass für $f \in L^q_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ und $g_i \to g$ in $L^p_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ die Konvergenz $g_i \cdot f \to g \cdot f$ in $L^r_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ folgt, was unsere allgemeinen Vorüberlegungen abschließt.

Nach Proposition 2.5 (i) existieren $u_m, v_m \in C^\infty(\overline{\Omega})$, so dass $u_m \to u$ in $W^{1,q}_{loc}(\Omega)$ und $v_m \to v$ in $W^{1,p}_{loc}(\Omega)$. Nach den Vorbemerkungen stellen wir also fest, dass die Funktionen $u \cdot v$, $u_m \cdot v$ und $u_m \cdot v_{m'}$ für $m, m' \in \mathbb{N}$ von der Klasse $L^r(\Omega)$ sind. Dasselbe gilt für die Summen von Produkten $(\partial_l u_m) \cdot v_{m'} + u_m \partial_l v_{m'}$, $(\partial_l u_m) \cdot v + u_m \partial_l v$, und $(\partial_l u) \cdot v + u \partial_l v$.

Nach der klassischen Produktregel gilt

$$\int_\Omega u_m v_{m'} (\partial_l \varphi) \,\mathrm{d}x = -\int_\Omega \left[(\partial_l u_m) v_{m'} + u_m (\partial_l v_{m'})\right] \varphi \,\mathrm{d}x \quad \text{für alle } \varphi \in C_0^\infty(\Omega),$$

also nach dem Grenzübergang $m' \to \infty$ für festes $m \in \mathbb{N}$ nach der obigen allgemeinen Vorüberlegung zur L^r_{loc}-Konvergenz angewandt auf $g_{m'} := v_{m'}$ bzw. $g_{m'} := \partial_l v_{m'}$ und $f := u_m(\partial_l \varphi)$ bzw. $f := (\partial_l u_m)\varphi$ bzw. $f := u_m \varphi$

$$\int_\Omega u_m v (\partial_l \varphi) \,\mathrm{d}x = -\int_\Omega ((\partial_l u_m) v + u_m (\partial_l v)) \varphi \,\mathrm{d}x \quad \text{für alle } \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$$

mit $(\partial_l u_m) v + u_m (\partial_l v) =: \partial_l (u_m v) \in L^r(\Omega)$. Also ist wegen $u_m v \in L^r(\Omega)$ das Produkt $u_m v$ in dem Sobolevraum $W^{1,r}(\Omega)$ mit schwacher Ableitung $\partial_l (u_m v) = (\partial_l u_m) v + u_m (\partial_l v)$.

Durch erneute Anwendung der allgemeinen Vorbemerkungen zeigt man im letzten Schritt für $m \to \infty$ die L^r_{loc}-Konvergenz $\partial_l (u_m v) \to \partial_l (uv) := (\partial_l u) v + u (\partial_l v) \in L^r(\Omega)$.
Also gilt

$$(u_m v, \partial_l (u_m v)) \to (uv, \partial_l (uv)) \quad \text{in } L^r(\Omega') \times L^r(\Omega') \qquad \text{für alle } \ \Omega' \subset\subset \Omega,$$

also ist $\{u_m v\}$ eine Cauchy-Folge in $W^{1,r}(\Omega')$ für alle $\Omega' \subset\subset \Omega$ und, da $W^{1,r}(\Omega')$ für jedes $\Omega' \subset\subset \Omega$ ein Banachraum ist, folgt $uv \in W^{1,r}(\Omega')$ für jedes $\Omega' \subset\subset \Omega$ mit schwacher Ableitung $\partial_l (uv) \in L^r(\Omega)$. Damit ist zunächst $uv \in W^{1,r}_{loc}(\Omega)$, aber neben $\partial_l (uv)$ ist nach der Vorüberlegung auch $uv \in L^r(\Omega)$, sodass $uv \in W^{1,r}(\Omega)$ mit schwachem Gradienten $\nabla(uv) = (\nabla u) v + (u \nabla v) \in L^r(\Omega)$ gezeigt ist. $\square$

Sobolevfunktionen lassen sich auf größere Gebiete fortsetzen, falls der Rand des ursprünglichen Definitionsbereichs genügend glatt ist. Dabei erhält man auf dem größeren Gebiet eine Sobolevfunktion mit verallgemeinerten Nullranddaten. Auch für weniger glatte Gebiete kann man Fortsetzungssätze beweisen, siehe dazu z.B. [108].

Satz 2.13 [Fortsetzungssatz]
Seien $1 \le q < \infty, k \in \mathbb{N}, \Omega \subset\subset \mathbb{R}^n$ offen mit $\partial\Omega \in C^{k-1,1}$. Dann existiert für alle $\widetilde{\Omega} \supset\supset \Omega$ eine lineare Abbildung $E : W^{k,q}(\Omega) \to W_0^{k,q}(\widetilde{\Omega})$ mit $(Eu)|_\Omega = u$ und

$$\|Eu\|_{W^{l,p}(\widetilde{\Omega})} \le C(\Omega, \widetilde{\Omega}, k, q)\|u\|_{W^{l,p}(\Omega)} \quad \text{für alle } 0 \le l \le k \text{ und } 1 \le p \le q$$

für alle $u \in W^{k,q}(\Omega)$.

Beweis. Betrachte zunächst die folgende Modellsituation.
Für $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{n-1} \times [0,\infty))$ definiere

$$E_0u(y,t) := \begin{cases} u(y,t) & \text{für } t \ge 0, \\ \sum_{i=1}^{k+1} \sigma_i u(y,-it) & \text{für } t < 0, \end{cases}$$

wobei $\sum_{i=1}^{k+1} \sigma_i(-i)^m = 1$ für alle $m = 0,\dots,k$ gelte. Nach dem Resultat einer Übungsaufgabe hat man $E_0u \in C_0^k(\mathbb{R}^n) \subset W^{k,q}(\mathbb{R}^n)$ zusammen mit der Abschätzung

$$\|E_0u\|_{W^{l,p}(\mathbb{R}^n)} \le C(n,k)\|u\|_{W^{l,p}(\mathbb{R}^{n-1}\times[0,\infty))} \quad \text{für alle } 0 \le l \le k \text{ und } 1 \le p \le q. \tag{2.10}$$

Da $C_0^\infty(\mathbb{R}^{n-1} \times [0,\infty))$ nach Proposition 2.5 dicht in $W^{k,q}(\mathbb{R}^{n-1} \times [0,\infty))$ liegt, kann der Fortsetzungsoperator E_0 nun als stetige lineare Abbildung auf ganz $W^{k,q}(\mathbb{R}^{n-1} \times [0,\infty))$ mit Bild in $W^{k,q}(\mathbb{R}^n)$ fortgesetzt werden, so dass dieselbe Abschätzung (2.10) auch für alle $u \in W^{k,q}(\mathbb{R}^{n-1} \times [0,\infty))$ gilt.

Da nach Voraussetzung $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^n$ und $\partial\Omega \in C^{k-1,1}$, existieren Punkte $x_j \in \partial\Omega, j = 1,\dots,R$, und Umgebungen U_j mit $x_j \in U_j$ sowie Abbildungen $\varphi_j \in C^{k-1,1}(D_j)$ auf Gebieten $D_j \subset \mathbb{R}^{n-1}$ mit $\varphi_j(0) = 0$, so dass $U_j \cap \partial\Omega = x_j + \operatorname{graph}(\varphi_j)$ (modulo geeigneter orthogonaler Transformation). Dazu existieren weiterhin invertierbare Abbildungen $\psi_j \in C^{k-1,1}(U_j, \mathbb{R}^n)$ mit $\psi_j(U_j) = B_1(0)$ und $\psi_j^{-1} \in C^{k-1,1}(B_1(0), \mathbb{R}^n)$, die (nach geeigneter Rotation) gegeben sind durch

$$\psi_j(x_j + (y,t)) := \frac{1}{\lambda_j}(y, t - \varphi_j(y)) \qquad \text{für alle } \ x_j + (y,t) \in U_j$$

und

$$\psi_j^{-1}(\xi,\tau) = x_j + (\lambda_j\xi, \lambda_j\tau + \varphi_j(\lambda_j\xi)) \qquad \text{für alle } \ (\xi,\tau) \in B_1(0),$$

wobei $\lambda_j > 0$ geeignete Streckungsfaktoren sind. Es gilt $\psi_j(x_j) = 0$ und $\psi_j(U_j \cap \Omega) = B_1^+(0) = B_1(0) \cap \{\mathbb{R}^{n-1} \times (0,\infty)\}$, und durch Auswahl eventuell kleinerer Teilgebiete kann man es einrichten, dass $\partial\Omega \subset U_1 \cup \ldots \cup U_R \subset\subset \widetilde{\Omega}$. Zusätzlich existiert ein $U_0 \subset \Omega$ offen, so dass $\overline{\Omega} \subset \bigcup_{j=0}^R U_j$. Wählt man nun zu dieser Überdeckung eine Zerlegung der Eins, d.h. Funktionen $\eta_j \in C_0^\infty(U_j)$ mit $0 \le \eta_j \le 1$ und $\sum_{j=0}^R \eta_j = 1$ in Ω, dann gilt für

$$E_ju := \left(E_0\left((\eta_j u) \circ \psi_j^{-1}\Big|_{B_1^+(0)}\right)\right) \circ \psi_j,$$

dass
$$\operatorname{supp}\left((\eta_j u)\circ \psi_j^{-1}\Big|_{B_1^+(0)}\right) \subset\subset B_1^+(0)\cup \left(B_1^{n-1}(0)\times\{0\}\right)$$
und durch Fortsetzung durch den Wert Null außerhalb des Trägers
$$(\eta_j u)\circ \psi_j^{-1}\Big|_{B_1^+(0)} \in W^{k,q}(\mathbb{R}^{n-1}\times(0,\infty)).$$

Damit ist $\operatorname{supp}(E_j u)\subset\subset U_j \subset\subset \widetilde{\Omega}$, und nach Proposition 2.5 (ii) ist $E_j u\in W_0^{k,q}(\widetilde{\Omega})$. Mit Proposition 2.12 gilt dann
$$\|E_j u\|_{W^{k,q}(\widetilde{\Omega})}\le C(\psi_j, U_j, n, k)\|u\|_{W^{k,q}(\Omega)}.$$

Man hat
$$\begin{aligned}
E_j u|_\Omega &= \left(E_0\left((\eta_j u)\circ \psi_j^{-1}\Big|_{B_1^+(0)}\right)\right)\circ \psi_j|_\Omega\\
&= \left(E_0\left((\eta_j u)\circ \psi_j^{-1}\Big|_{B_1^+(0)}\right)\right)\Big|_{B_1^+(0)}\circ \psi_j|_\Omega\\
&= (\eta_j u)\circ \psi_j^{-1}\Big|_{B_1^+(0)}\circ \psi_j|_\Omega\\
&= \eta_j u.
\end{aligned}$$

Die Setzung $Eu := \eta_0 u + \sum_{j=1}^R E_j u$ liefert also mit Hilfe der Eigenschaften der Zerlegung der Eins
$$\|Eu\|_{W^{l,p}(\widetilde{\Omega})}\le C(\Omega,\widetilde{\Omega},n,k)\|u\|_{W^{l,p}(\Omega)} \quad \text{für alle } 0\le l\le k \text{ und } 1\le p\le q$$
und $Eu|_\Omega = \eta_0 u + \sum_{j=1}^R E_j u|_\Omega = \sum_{j=0}^R \eta_j u = u.$ $\square$

Mit Hilfe dieses Fortsetzungssatzes kann man das lokale Approximationsresultat für Sobolevfunktionen, Proposition 2.5, durch einen globalen Approximationssatz ergänzen.

Korollar 2.14 [Globale Approximation]
Seien $1\le q<\infty, k\in\mathbb{N}$ und $\Omega\subset\subset\mathbb{R}^n$ offen mit $\partial\Omega\in C^{k-1,1}$. Dann existiert zu $u\in W^{k,q}(\Omega)$ eine Folge $\{u_m\}\subset C^\infty(\overline{\Omega})$ mit $u_m\to u$ in $W^{k,q}(\Omega)$.

Beweis. Betrachte mit Satz 2.13 $Eu\in W_0^{k,q}(\widetilde{\Omega})$ für ein Gebiet $\widetilde{\Omega}\supset\supset\Omega$. Dann existieren nach Definition 2.3 (i) $v_m\in C_0^\infty(\widetilde{\Omega})$ mit $v_m \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} Eu$ in $W^{k,q}(\widetilde{\Omega})$. Damit folgt für $u_m := v_m|_\Omega\in C^\infty(\overline{\Omega})$ die Konvergenz $u_m \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} u$ in $W^{k,q}(\Omega)$. $\square$

Wir beenden dieses Kapitel mit einigen Resultaten für die spezielle Situation einer Raumdimension. Von zentraler Bedeutung für den weiteren Verlauf der Vorlesung ist der folgende Einbettungssatz, den man elementar beweisen kann. Daraus ergeben sich einfache Varianten der Poincaré-Ungleichungen und ein Hebbarkeitssatz für Singularitäten von Sobolevfunktionen auf Intervallen. Letzteres erlaubt eine einfache Konstruktion von Vergleichsfunktionen für Variationsprobleme durch “Zusammenkleben” geeigneter Sobolevfunktionen sowie eine elementare Version des Fortsetzungssatzes von Sobolevfunktionen für $n=1$.

Satz 2.15 [EINBETTUNGSSATZ FÜR $n = 1$]
Sei $\Omega = I = (a,b) \subset \mathbb{R}$ mit $-\infty < a < b < \infty$.

(i) *Sei $u \in W^{1,1}(I)$, dann ist $u \in C^0(\bar{I})$ mit*

$$\|u\|_{C^0(\bar{I})} \leq \fint_I |u(x)| \,\mathrm{d}x + \int_I |u'(x)| \,\mathrm{d}x \leq C(I)\|u\|_{W^{1,1}(I)}$$

und

$$u(x) - u(y) = \int_y^x u'(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{für alle } x,y \in \bar{I}.$$

(ii) *Sei $u \in W^{1,q}(I)$ für $q \in (1,\infty]$, dann ist $u \in C^{0,1-\frac{1}{q}}(\bar{I})$ mit*

$$\|u\|_{C^0(\bar{I})} \leq \left(\fint_I |u(x)|^q \,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}} + \mathscr{L}^1(I)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_I |u'(x)|^q \,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}}$$

und

$$|u(x) - u(y)| \leq |x-y|^{1-\frac{1}{q}} \|u'\|_{L^q(I)} \quad \text{für alle } x,y \in \bar{I}.$$

Bemerkung:
Teil (i) beinhaltet also die stetige Einbettung $W^{1,1}(I) \hookrightarrow C^0(\bar{I})$. Wir erinnern daran, dass dies in höheren Raumdimensionen nicht richtig ist: $W^{1,n}(\Omega) \not\hookrightarrow C^0(\overline{\Omega})$ für $n \geq 2$, vgl. Bemerkung 3 nach Satz 2.9 und die zugehörige Übungsaufgaben. $W^{1,n}$-Funktionen sind für $n \geq 2$ noch nicht einmal beschränkt. Der Teil (ii) von Satz 2.15 konstatiert die stetige Einbettung $W^{1,q}(I) \hookrightarrow C^{0,1-\frac{1}{q}}(\bar{I})$ für $q \in (1,\infty]$. Für $q > 1$ ist die Einbettung $W^{1,q}(I) \hookrightarrow C^{0,1-(1/q')}$ für alle $q' \in [1,q)$ sogar kompakt. Im Grenzfall $q = \infty$ muss man die L^q-Normen auf der rechten Seite der Abschätzungen jeweils durch das essentielle Supremum von u und u' ersetzen (vgl. auch Satz 2.7 für $n \geq 2$):

$$\|u\|_{C^0(\bar{I})} \leq \|u\|_{L^\infty(I)} + \|u'\|_{L^\infty(I)} \mathscr{L}^1(I)$$

und

$$|u(x) - u(y)| \leq |x-y| \|u'\|_{L^\infty(I)} \quad \text{für alle } x,y \in \bar{I},$$

so dass man eine Konstante $C = C(I)$ findet, so dass

$$\|u\|_{C^{0,1}(\bar{I})} \leq C(I)\|u\|_{W^{1,\infty}(I)}.$$

Beweis. (i) Zu beliebigen Punkten $x,y \in I$ wähle ein offenes Intervall $I' \subset\subset I$, welches x und y enthält. Nach Proposition 2.5 existieren $u_m \in C^\infty(\bar{I})$ mit $u_m \to u$ in $W^{1,1}(I')$. Es gilt nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

$$u_m(x) - u_m(y) = \int_y^x u_m'(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{für alle } m \in \mathbb{N}. \tag{2.11}$$

Zwischenbehauptung: Die Mengenfunktionen $E \mapsto \int_E |u_m'(t)|\,\mathrm{d}t$ für BORELmengen $E \subset I'$ sind *gleichmäßig absolutstetig*, d.h. für alle $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta(\varepsilon) > 0$, so dass

$$\int_E |u_m'(t)|\,\mathrm{d}t < \varepsilon \quad \text{für alle BORELmengen } E \subset I' \text{ mit } \mathscr{L}^1(E) < \delta \text{ und für alle } m \in \mathbb{N}.$$

Beweis der Zwischenbehauptung: Wir wählen zu $\varepsilon > 0$ ein $\delta_1 > 0$ und ein $M(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, so dass

$$\int_E |u'(t)|\,\mathrm{d}t < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{für alle BORELmengen } E \subset I' \quad \text{mit } \mathscr{L}^1(E) < \delta_1$$

und

$$\int_{I'} |u'_m(t) - u'(t)|\,\mathrm{d}t < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{für alle } m \geq M(\varepsilon).$$

Damit folgt

$$\int_E |u'_m(t)|\,\mathrm{d}t \leq \int_E |u'(t)|\,\mathrm{d}t + \int_{I'} |u'_m(t) - u'(t)|\,\mathrm{d}t < \varepsilon$$

für alle BORELmengen $E \subset I'$ mit $\mathscr{L}^1(E) < \delta_1$ und für alle $m \geq M(\varepsilon)$.
Wähle nun noch ein $\delta \leq \delta_1$, so dass

$$\sum_{m=1}^{M(\varepsilon)-1} \int_E |u'_m(t)|\,\mathrm{d}t < \varepsilon \quad \text{für alle BORELmengen } E \subset I' \text{ mit } \mathscr{L}^1(E) < \delta.$$

Damit folgt die Zwischenbehauptung.

Benutzt man $|u_m(\xi) - u_m(\eta)| \leq \left|\int_\eta^\xi |u'_m(t)|\,\mathrm{d}t\right|$, so findet man zu jedem $\varepsilon > 0$ also ein $\delta > 0$, so dass

$$|u_m(\xi) - u_m(\eta)| \leq \varepsilon \quad \text{für alle } \xi, \eta \in I' \quad \text{mit } |\xi - \eta| < \delta \text{ und für alle } m \in \mathbb{N}. \tag{2.12}$$

Es gilt auch $|u_m(\xi)| \leq |u_m(\eta)| + \left|\int_\eta^\xi |u'_m(t)|\,\mathrm{d}t\right|$. Integration bezüglich η über I' liefert

$$\mathscr{L}^1(I')|u_m(\xi)| \leq \int_{I'} |u_m(\eta)|\,\mathrm{d}\eta + \mathscr{L}^1(I')\left|\int_{I'} |u'_m(t)|\,\mathrm{d}t\right| \quad \text{für alle } \xi \in I' \text{ und } m \in \mathbb{N},$$

also erhält man durch Supremumsbildung über alle $\xi \in I'$ und dann mit der Stetigkeit von u_m auch auf $\overline{I'}$ die Abschätzung

$$\|u_m\|_{C^0(\overline{I'})} \leq \fint_{I'} |u_m(\eta)|\,\mathrm{d}\eta + \int_{I'} |u'_m(t)|\,\mathrm{d}t \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} \fint_{I'} |u(\eta)|\,\mathrm{d}\eta + \int_{I'} |u'(t)|\,\mathrm{d}t. \tag{2.13}$$

Wegen (2.12) und (2.13) gibt es nach dem Satz von ARZELÀ-ASCOLI eine Teilfolge $u_{m_k} \to \tilde{u}$ in $C^0(\overline{I'})$. Wegen der Eindeutigkeit des Grenzwerts folgt $\tilde{u} = u$ fast überall auf I', also ist $\tilde{u} \in C^0(\overline{I'})$ der eindeutige stetige Repräsentant von $u|_{I'} \in W^{1,1}(I')$, und wir schreiben einfach $u \in C^0(\overline{I'})$. Der Grenzübergang $m_k \to \infty$ in (2.11) liefert für die anfangs beliebig gewählten Punkte $x, y \in I$

$$u(x) - u(y) = \int_y^x u'(t)\,\mathrm{d}t. \tag{2.14}$$

Die Absolutstetigkeit der Mengenfunktion $E \mapsto \int_E |u'(t)|\,\mathrm{d}t$, für BORELmengen $E \subset I$ impliziert, dass die rechte Seite von (2.14) eine gleichmäßig stetige[11] Funktion von x und y

[11] Tatsächlich ist wegen $u' \in L^1(I)$ die Funktion $x \mapsto \int_y^x u'(t)\,\mathrm{d}t$ gleichmäßig stetig; denn für alle $\varepsilon > 0$ gibt es $\delta(\varepsilon) > 0$, so dass $\int_E u'(t)\,\mathrm{d}t < \varepsilon$ für alle $E \subset I$ mit $\mathscr{L}^1(E) < \delta(\varepsilon)$, also ist für $x, y \in I$ mit $|x - y| < \delta(\varepsilon)$

$$|u(x) - u(y)| \leq \left|\int_y^x u'(t)\,\mathrm{d}t\right| \leq \int_{[x,y]} |u'(t)|\,\mathrm{d}t < \varepsilon.$$

ist. Folglich können wir u stetig auf $\overline{I}$ fortsetzen und erhalten die Gültigkeit von (2.14) für alle $x, y \in \overline{I}$. Die behauptete Abschätzung der C^0-Norm von u auf $\overline{I}$ folgt aus dieser Identität in derselben Weise, wie wir es für die approximierenden Funktionen u_m auf I' gezeigt haben. Alternativ kann man in der Ungleichung (2.13) den Limes Superior für $m \to \infty$ betrachten, was für beliebige Teilintervalle $I' \subset\subset I$ eine von I' unabhängige Abschätzung für $\|u\|_{C^0(\overline{I'})}$ liefert, wobei man auf der rechten Seite die Integrale über u und u' direkt über dem Intervall I ausführen kann.
(ii) Da I beschränkt ist, gilt $W^{1,q}(I) \subset W^{1,1}(I)$, und wir können (2.14) für alle $x, y \in \overline{I}$ verwenden, um mit der Hölder-Ungleichung zu schließen

$$|u(x) - u(y)| \leq \left| \int_y^x |u'(t)| \,\mathrm{d}t \right| \leq \left(\int_I |u'(t)|^q \,\mathrm{d}t \right)^{\frac{1}{q}} |x-y|^{1-\frac{1}{q}} \quad \text{für alle } x, y \in \bar{I}.$$

Damit ist $u \in C^{0,1-\frac{1}{q}}(\overline{I})$. Ebenfalls wie im Beweis von Teil (i) erhält man für die Abschätzung der C^0-Norm

$$\begin{aligned} |u(x)| &\leq \fint_I |u(t)| \,\mathrm{d}t + \int_I |u'(t)| \,\mathrm{d}t \\ &\leq \left(\fint_I |u(t)|^q \,\mathrm{d}t \right)^{\frac{1}{q}} + \mathscr{L}^1(I)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_I |u'(t)|^q \,\mathrm{d}t \right)^{\frac{1}{q}} \quad \text{für alle } x \in \bar{I}. \end{aligned}$$

□

Bemerkung:
Die Gültigkeit des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung für Sobolevfunktionen (siehe Teil (i) von Satz 2.15) impliziert die für die eindimensionale Variationsrechnung sehr nützlichen Poincaré-Ungleichungen

$$\int_I |u(x) - u(x_0)|^q \,\mathrm{d}x \leq (\mathscr{L}^1(I))^q \int_I |u'(x)|^q \,\mathrm{d}x \;\text{ für alle }\; u \in W^{1,q}(I),\, q \in [1, \infty),\, x_0 \in \overline{I},$$

und damit auch

$$\int_I |u(x) - \bar{u}_I|^q \,\mathrm{d}x \leq (\mathscr{L}^1(I))^q \int_I |u'(x)|^q \,\mathrm{d}x \;\text{ für alle }\; u \in W^{1,q}(I),\, q \in [1, \infty)$$

wobei $\bar{u}_I := \fint_I u(x) \,\mathrm{d}x$ den Integralmittelwert bezeichnet, vgl. Korollar 2.11. Auch für $q = \infty$ lassen sich solche Ungleichungen folgern, wenn man die oben auftretenden L^q-Normen geeignet durch essentielle Suprema ersetzt.

Korollar 2.16 [$u' = 0$ f.ü. auf $\{u = 0\}$]
Für $u \in W^{1,q}(I)$, $q \in [1, \infty]$, gilt

$$u'(x) = 0 \quad \text{für } \mathscr{L}^1\text{-fast alle } x \in \{z \in I : u(z) = 0\}.$$

Beweis. Setze $N_u := \{z \in I : u(z) = 0\}$ und definiere die Teilmenge $N_u^H \subset N_u$ als die Menge der Häufungspunkte von N_u. Dann ist das Komplement $N_u \setminus N_u^H$ abzählbar; denn für $x \in N_u \setminus N_u^H$ existiert $r_x > 0$, so dass $B_{r_x}(x) \cap N_u = \{x\}$. Dann liefert $\{B_{r_x/2}(x) : x \in N_u \setminus N_u^H\}$ eine offene Überdeckung von $N_u \setminus N_u^H$. Da $N_u \setminus N_u^H$ als Teilmenge von I

das zweite Abzählbarkeitsaxiom erbt, hat diese Menge die LINDELÖF-Eigenschaft, d.h. es existiert eine abzählbare Teilüberdeckung

$$N_u \setminus N_u^H \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_{r_{x_n/2}}(x_n),$$

so dass für $x \in N_u \setminus N_u^H$ ein $n \in \mathbb{N}$ existiert, so dass $x \in B_{r_{x_n/2}}(x_n) \cap N_u = \{x_n\}$ und damit $x = x_n$. Also ist tatsächlich $N_u \setminus N_u^H$ abzählbar und damit eine Nullmenge. Nehmen wir nun einen LEBESGUE-Punkt x_0 von u', der gleichzeitig Häufungspunkt von N_u ist. Nach Teil (i) von Satz 2.15 gilt für $\{z_i\} \subset N_u \setminus \{x_0\}$ mit $z_i \to x_0$

$$0 = u(z_i) - u(x_0) = \int_{x_0}^{z_i} u'(t)\,\mathrm{d}t \qquad \text{für alle} \;\; i \in \mathbb{N}$$

und damit auch

$$0 = \frac{1}{(z_i - x_0)} \int_{x_0}^{z_i} u'(t)\,\mathrm{d}t \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} u'(x_0).$$

□

Lemma 2.17 [HEBBARKEITSSATZ]
Seien $I = (a, b) \subset \mathbb{R}$ mit $-\infty < a < b < \infty, 1 \le q \le \infty$ und $c \in (a, b)$. Dann gilt

$$u \in W^{1,q}(I) \Longleftrightarrow u \in W^{1,q}(I\backslash\{c\}) \;\; \textit{und} \;\; \lim_{y\to c^-} u(y) =: u(c^-) = u(c^+) := \lim_{y\to c^+} u(y).$$

Bemerkungen:
1. Zur Präzisierung dieser Aussage sei bemerkt, dass unter der Voraussetzung $u \in W^{1,q}(I)$ die Grenzwertaussage des Lemmas für den eindeutigen stetigen Repräsentanten von u gilt. Die Rückrichtung lässt sich so interpretieren: Gilt für die stetigen Repräsentanten der beiden Sobolevfunktionen $u_1 := u|_{(a,c)}$ und $u_2 := u|_{(c,b)}$ die Grenzwertaussage, dann kann man diese Funktionen zu einer globalen Sobolevfunktion

$$u := \begin{cases} u_1 & \text{auf} \;\; (a, c) \\ u_2 & \text{auf} \;\; (c, b) \end{cases}$$

"zusammenkleben".

Für $W^{k,q}(I)$ mit $k > 1$ ist diese Aussage falsch. Um z.B. zwei $W^{2,2}$-Funktionen auf angrenzenden Intervallen (a, c) und (c, b) "zusammenzukleben", muss man dafür sorgen, dass auch die ersten Ableitungen der beiden Funktionen bei c übereinstimmen.

2. Mit Satz 2.15 und dem Hebbarkeitsresultat, Lemma 2.17, ergibt sich für $n = 1$ auch eine einfache Variante des Fortsetzungssatzes, Satz 2.13: Eine Funktion $u \in W^{1,q}((a, b))$ besitzt nach Satz 2.15 klassische Randwerte $u(a)$ und $u(b)$. Falls $I \subset\subset \widetilde{I}$, $\widetilde{I} = (c, d)$, dann kann man lineare Funktionen l_1, l_2 mit $l_1(a) = u(a)$, $l_2(b) = u(b)$ wählen, so dass $l_1(c) = 0$ und $l_2(d) = 0$. Die zusammengesetzte Funktion

$$\tilde{u}(x) := \begin{cases} l_1(x) & \text{für} \;\; x \in (c, a] \\ u(x) & \text{für} \;\; x \in (a, b) \\ l_2(x) & \text{für} \;\; x \in [b, d) \end{cases}$$

ist dann nach Lemma 2.17 in der Klasse $W^{1,q}(\widetilde{I})$ und nach einer Übungsaufgabe sogar in $W_0^{1,q}(\widetilde{I})$. Da der Fortsetzungssatz, Satz 2.13 auch die globale Approximierbarkeit von Sobolevfunktionen impliziert (vgl. Korollar 2.14), hat man mit der obigen einfachen Fortsetzungstechnik für $n = 1$ auch eine einfache Möglichkeit Sobolevfunktionen global durch glatte Funktionen zu approximieren.

Beweis von Lemma 2.17. „$\Rightarrow$“: Für $u, u' \in L^q(I)$ gilt $u, u' \in L^q(I \backslash \{c\})$ und die Regel der partiellen Integration in Definition 2.1 gilt auch für alle $\varphi \in C_0^\infty(I \backslash \{c\})$. Außerdem ist $u \in W^{1,q}(I) \hookrightarrow C^0(\bar{I})$ nach Satz 2.15.
„$\Leftarrow$“: Für $a < x_1 < y_1 < c < y_2 < x_2 < b$ gilt mit Satz 2.15 für den eindeutigen stetigen Vertreter von u auf (a, c) und für den stetigen Vertreter von u auf (c, b)

$$\begin{aligned}
u(x_2) - u(x_1) - (u(y_2) - u(y_1)) \\
&= u(y_1) - u(x_1) + u(x_2) - u(y_2) \\
&= \int_{x_1}^{y_1} u'(t)\,\mathrm{d}t + \int_{y_2}^{x_2} u'(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_{[x_1,x_2]\backslash[y_1,y_2]} u'(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_{x_1}^{x_2} u'(t)\,\mathrm{d}t - \int_{y_1}^{y_2} u'(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_{x_1}^{x_2} u'(t)\,\mathrm{d}t - \int_{y_1}^{c} u'(t)\,\mathrm{d}t - \int_{c}^{y_2} u'(t)\,\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

Der Grenzübergang $y_1 \to c^-, y_2 \to c^+$ auf beiden Seiten liefert dann $u(x_2) - u(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} u'(t)\,\mathrm{d}t$. Mit $u, u' \in L^q(I \backslash \{c\}) = L^q(I)$ und mit dem Resultat einer Übungsaufgabe folgt damit $u \in W^{1,1}(I)$ und damit $u \in W^{1,q}(I)$. □

Bemerkung:
Eine Anwendung von Lemma 2.17 ist die Konstruktion von (zulässigen) Vergleichsfunktionen für Minimierungsaufgaben: Wir nehmen im Vorgriff auf die Regularitätstheorie, Kapitel 4, an, dass

$$\mathcal{F}(u) \leq \mathcal{F}(v) \quad \text{für alle } v \in W^{1,q}(I) \text{ mit } u - v \in W_0^{1,q}(I),$$

und stellen die Frage:

Besitzt $u \in W^{1,q}(I)$ eine höhere Regularität?

Ein möglicher erster Schritt zur Beantwortung dieser Frage ist die Konstruktion von zulässigen Vergleichsfunktionen.

Sei $x_0 \in I$. Dann betrachtet man

$$v(x) := \begin{cases} u(x) & \text{für } x \in I \backslash B_\varepsilon(x_0), \\ h(x) & \text{für } x \in B_\varepsilon(x_0), \end{cases}$$

wobei $h|_{\partial B_\varepsilon(x_0)} = u|_{\partial B_\varepsilon(x_0)}$ und $\varepsilon < \operatorname{dist}(x_0, \partial I)$. Man hat also den Minimierer u lokal um x_0 durch eine andere Funktion h ersetzt und erhofft sich dadurch Aussagen über die

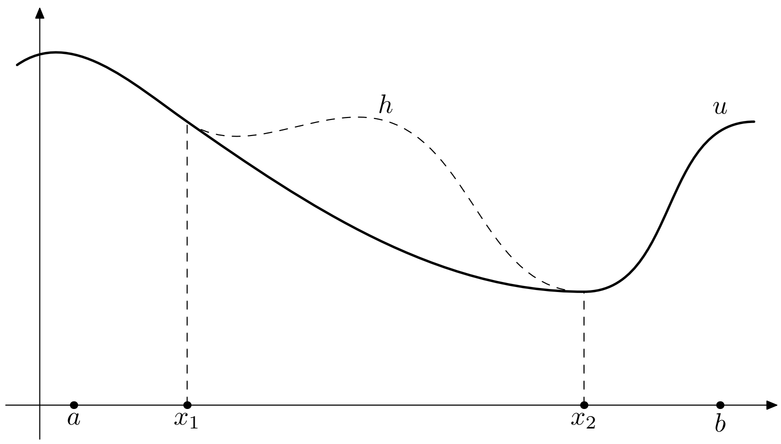

Abbildung 2.1: Konstruktion zulässiger Vergleichsfunktionen durch Ersetzung auf $(x_1, x_2) := B_\varepsilon(x_0)$.

Regularität von u nahe x_0. Zunächst hat man dadurch die Minimierungseigenschaft von u auf $B_\varepsilon(x_0)$ lokalisiert:

$$\mathcal{F}_{I\setminus B_\varepsilon(x_0)}(u) + \mathcal{F}_{B_\varepsilon(x_0)}(u) = \mathcal{F}_I(u) \leq \mathcal{F}_I(v) = \mathcal{F}_{I\setminus B_\varepsilon(x_0)}(u) + \mathcal{F}_{B_\varepsilon(x_0)}(h),$$

also $\mathcal{F}_{B_\varepsilon(x_0)}(u) \leq \mathcal{F}_{B_\varepsilon(x_0)}(h)$. Diese Ungleichung kann man nun durch Wahl besonderer Vergleichsfunktionen h auf $B_\varepsilon(x_0)$ ausnutzen. Ideen von Morrey folgend kann man z.B. h harmonisch wählen, was insbesondere für den Fall $n = 2$ für Minimalflächen oder H-Flächen erfolgreich ist (vgl. [76] und [24], [25], oder [26, 28, 27]). Für den Fall allgemeiner parametrischer Variationsprobleme, also für Cartan-Funktionale auf Flächen ($n = 2$) hat Morrey auch biharmonische Vergleichsfunktionen h eingesetzt (vgl. [76, Chapter 9]). Auch für Variationsprobleme höherer Ordnung können biharmonische Vergleichsfunktionen nützlich sein, siehe etwa die richtungsweisende Arbeit von L. Simon [98] zur Existenz von Tori, die das Willmore-Funktional

$$\int_\Sigma H^2 \,\mathrm{d}A$$

minimieren, wobei H die mittlere Krümmung der Fläche Σ bezeichnet; siehe auch [96]. Für die Regularitätstheorie allgemeiner Variationsprobleme mit nichtglatten Integranden kann auch eine geeignete Konvexkombination von u und $⨍_\Omega u$ als Vergleichsfunktion h gewählt werden, siehe z.B. [39, Chapter V, Theorem 3.1].

Kapitel 3

Direkte Methoden: Unterhalbstetigkeit und Existenztheorie

Zunächst bestimmen wir eine große Klasse von Integranden F, so dass das zugehörige Variationsintegral

$$\mathcal{F}(u) := \int_I F(x, u(x), u'(x))\,\mathrm{d}x$$

auf SOBOLEVfunktionen wohldefiniert ist, wobei $I = (a, b) \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall ist. In vielen Fällen werden wir später voraussetzen, dass I endlich ist, also $-\infty < a < b < \infty$.

Proposition 3.1
Sei $F : I \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ eine CARATHÉODORY-*Funktion, d.h.*

$$\begin{aligned} & F(\cdot, z, p) \quad \textit{ist messbar für alle } (z,p) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \\ \textit{und} \qquad & F(x, \cdot, \cdot) \in C^0(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N) \textit{ für } \mathscr{L}^1\textit{-fast alle } x \in I. \end{aligned}$$

Zusätzlich existiere eine Funktion $g \in L^1(I)$, so dass $F(x, z, p) \geq g(x)$ für alle $z, p \in \mathbb{R}^N$ und fast alle $x \in I$. Dann ist die Zuordnung $x \mapsto F(x, u(x), u'(x))$ messbar und $\mathcal{F}(u)$ für alle $u \in W^{1,q}(I)$ mit $q \in [1, \infty]$ wohldefiniert mit Werten in $[-\|g\|_{L^1(I)}, \infty] \subset (-\infty, \infty]$.

Beweis. Es ist zu zeigen, dass $F(\cdot, u(\cdot), u'(\cdot))$ messbar ist. Dazu reicht es zu zeigen, dass Superniveaumengen messbar sind. Wäre $F = F(z, p)$ (und damit nach Voraussetzung stetig), dann hätte man mit der Messbarkeit von $u, u' \in L^q(I, \mathbb{R}^N)$ und der Stetigkeit von F sofort die Messbarkeit der Verkettung $F \circ (u, u')$ auf I.

Im allgemeinen Fall $F = F(x, z, p)$ argumentiert man folgendermaßen. Für $u, u' \in L^q(I, \mathbb{R}^N)$ gibt es eine Folge von Paaren von Treppenfunktionen $(t_j, {t'}_j)$, die mit $j \to \infty$ $\mathscr{L}^1$-fast überall punktweise gegen (u, u') konvergiert. Wir schreiben diese Treppenfunktionen in der Form

$$(t_j(x), {t'}_j(x)) = \sum_{i=1}^{l_j} \mu_i^j \chi_{A_i^j}(x)$$

mit $\mu_i^j \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$, messbaren Mengen $A_i^j \subset I$ mit $A_i^j \cap A_k^j = \emptyset$ für $i \neq k$ und für alle

$j \in \mathbb{N}$, und zugehörigen charakteristischen Funktionen

$$\chi_{A_i^j}(x) := \begin{cases} 1 & \text{für } x \in A_i^j, \\ 0 & \text{für } x \notin A_i^j. \end{cases}$$

Dann gilt für alle $r \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \Big(F(\cdot, t_j(\cdot), t'_j(\cdot)\Big)^{-1}((r,\infty)) &= \{x \in I : F(x, t_j(x), t'_j(x)) > r\} \\ &= \left[\bigcup_{i=1}^{l_j} \Big(\{x \in I : F(x, \mu_i^j) > r\} \cap A_i^j\Big)\right] \cup \left[\{x \in I : F(x,0,0) > r\} \setminus \Big(\bigcup_{i=1}^{l_j} A_i^j\Big)\right] \\ &= \left[\bigcup_{i=1}^{l_j} \Big(F(\cdot, \mu_i^j)\Big)^{-1}((r,\infty)) \cap A_i^j\right] \cup \left[\Big(F(\cdot,0,0)\Big)^{-1}((r,\infty)) \setminus \Big(\bigcup_{i=1}^{l_j} A_i^j\Big)\right]. \end{aligned}$$

Die Mengen A_i^j, $\big(F(\cdot,\mu_i^j)\big)^{-1}((r,\infty))$ und $\big(F(\cdot,0,0)\big)^{-1}((r,\infty))$ sind nach Voraussetzung an F messbar, damit auch die Vereinigung auf der rechten Seite, und deshalb schließlich auch $F(\cdot, t_j(\cdot), t'_j(\cdot))$ für alle $j \in \mathbb{N}$.

Da F für $\mathscr{L}^1$-fast alle $x \in I$ in den letzten beiden Variablen stetig ist, gilt

$$F(x, t_j(x), t'_j(x)) \xrightarrow{j\to\infty} F(x, u(x), u'(x)) \quad \text{für } \mathscr{L}^1\text{-fast alle } x \in I,$$

und damit ist $F(\cdot, u(\cdot), u'(\cdot))$ messbar als punktweiser Grenzwert einer Folge von messbaren Funktionen, vgl. [3, Lemma 1.11]. □

Zentral für die *direkte Methode der Variationsrechnung*, die in diesem Kapitel präsentiert werden soll, ist der Begriff der *Unterhalbstetigkeit,* siehe auch die zugehörigen Übungsaufgaben. Zur Motivation dieser schwächeren Form von Stetigkeit skizzieren wir in einer abstrakten Situation die direkte Methode der Variationsrechnung:

1. Man wählt eine geeignete, nichtleere Klasse $\mathcal{C}$ von Funktionen, auf der das Variationsintegral $\mathcal{F}$ wohldefiniert ist, und auf der man $\mathcal{F}$ minimieren möchte.

2. Man beweist die Existenz einer unteren Schranke für $\mathcal{F}$, d.h. die Existenz einer Konstanten $0 \le C < \infty$, so dass
$$\inf_{\mathcal{C}} \mathcal{F} \ge -C.$$

3. Dann wählt man eine *Minimalfolge* für $\mathcal{F}$, das heißt eine Folge $\{u_i\} \subset \mathcal{C}$ mit
$$\mathcal{F}(u_i) \longrightarrow \inf_{\mathcal{C}} \mathcal{F} \quad \text{für } i \to \infty.$$

4. Man beweist die Existenz einer Teilfolge $\{u_{i_k}\} \subset \{u_i\}$, die in einer geeigneten Topologie gegen ein Grenzelement $u \in \mathcal{C}$ konvergiert.

5. Man nutzt die Unterhalbstetigkeit von $\mathcal{F}$ bezüglich der im vorigen Schritt verwendeten Topologie, um zu schließen
$$-\infty \underset{\text{Schritt 2}}{<} \inf_{\mathcal{C}} \mathcal{F} \underset{\text{Schritt 4}}{\le} \mathcal{F}(u) \underset{\mathcal{F}\text{ unterhalbstetig}}{\le} \liminf_{k\to\infty} \mathcal{F}(u_{i_k}) \underset{\text{Schritt 3}}{=} \inf_{\mathcal{C}} \mathcal{F},$$

woraus Gleichheit in dieser Ungleichungskette und damit

$$\mathcal{F}(u) = \inf_{\mathcal{C}} \mathcal{F}$$

folgt. Damit ist das Existenzproblem gelöst.

In der Tat ist die Wahl einer geeigneten, dem jeweiligen Variationsproblem angemessenen Topologie entscheidend: Für Schritt 4, d.h. für die Auswahl von konvergenten Teilfolgen bevorzugt man eine möglichst wenig restriktive Topologie, wohingegen man für den Nachweis, dass das Grenzelement u tatsächlich in $\mathcal{C}$ liegt, und für die gewünschte Unterhalbstetigkeit des Funktionals, also für den abschließenden Teil von Schritt 4 und für Schritt 5, gerne eine möglichst starke Topologie zur Verfügung hätte. Das Ausbalancieren dieser beiden gegenläufigen Effekte sichert bei den hier betrachteten Variationsintegralen die *schwache Topologie* in SOBOLEVräumen. Die Unterhalbstetigkeit der Funktionale bezüglich der *schwachen Konvergenz* soll nun untersucht werden. Wir suchen nach Bedingungen an $\mathcal{F}$ für dessen schwache Unterhalbstetigkeit und formulieren dazu in der nächsten Proposition zunächst die notwendige Bedingung der *Quasikonvexität*, welche auf C.B. MORREY zurückgeht. Unterhalbstetigkeitssätze für höherdimensionale Variationsprobleme findet man in den Lehrbüchern von DACOROGNA [16] und FONSECA und LEONI [38]. Für abstrakte Versionen in allgemeinen BANACHräumen verweisen wir auf die Diplomarbeit von U. MENNE [72] und auf die dort zitierte Literatur.

Proposition 3.2 [NOTWENDIGE BEDINGUNG FÜR SCHWACHE UNTERHALBSTETIGKEIT]
Sei $I = (a,b) \subset \mathbb{R}$ ein endliches Intervall, $q \in [1,\infty)$, $F \in C^0(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N)$ und $\mathcal{F}$ schwach unterhalbstetig *in $W^{1,q}(I,\mathbb{R}^N)$, d.h.*

$$\mathcal{F}(u) \le \liminf_{m\to\infty} \mathcal{F}(u_m)$$

für alle Folgen $\{u_m\} \subset W^{1,q}(I,\mathbb{R}^N)$ und Funktionen $u \in W^{1,q}(I,\mathbb{R}^N)$ mit $u_m \rightharpoonup u$ in $W^{1,q}(I,\mathbb{R}^N)$ für $m \to \infty$.

Dann gilt für alle $(x_0, z_0, p_0) \in I \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$

$$\int_I F(x_0, z_0, p_0 + \varphi'(x))\,\mathrm{d}x \ \ge\ \mathscr{L}^1(I)\,F(x_0,z_0,p_0) \quad \forall \varphi \in C^{0,1}(\overline{I},\mathbb{R}^N)\,\text{mit}\ \ \varphi(a) = \varphi(b) = 0\,; \tag{QC}$$

außerdem ist $F(x,z,\cdot)$ konvex für alle $(x,z) \in \overline{I} \times \mathbb{R}^N$.

Definition 3.3 [QUASIKONVEXITÄT]
Eine stetige Funktion $F = F(x,z,p)$ heißt quasikonvex (in p) *genau dann, wenn die Ungleichung* (QC) *für alle $\varphi \in C_0^\infty(I,\mathbb{R}^N)$ erfüllt ist.*

Bemerkungen:
1. Die Bedingungen an die Testfunktionen φ in (QC) lassen sich zusammenfassend in der Bedingung $\varphi \in W_0^{1,\infty}(I,\mathbb{R}^N)$ ausdrücken.

2. Zwar gilt immer die Implikation „konvex $\Rightarrow$ quasikonvex“ , doch in mehreren Raumdimensionen $n \ge 2$ gilt die Umkehrung im Allgemeinen *nicht*. Dazu verweisen wir zum Beispiel auf das Buch von DACOROGNA [16, Ch. 4.1]. (Dort wird übrigens für die Definition der Quasikonvexität nur die Messbarkeit und lokale Integrierbarkeit von $F(x,z,\cdot)$ gefordert.) Die Quasikonvexität ist eine schwer zu verifizierende Bedingung, deshalb sind

einfach nachzuweisende, hinreichende Bedingungen für die Unterhalbstetigkeit von Funktionalen von großer Bedeutung für die Variationsrechnung, wie z.B. die *Polykonvexität* von Integranden in mehreren Raumdimensionen, siehe z.B. [16].

Beweis von Proposition 3.2. Ohne Einschränkung sei $I=(0,1)$.
Fall 1: $F=F(p)$. Sei $p_0\in\mathbb{R}^N$ gegeben. Wir setzen $\varphi\in C^{0,1}(\bar I,\mathbb{R}^N)$ mit $\varphi(0)=\varphi(1)=0$ durch den Wert $\varphi(x-m)$ für $x\in[m,m+1)$ und $m\in\mathbb{Z}$, auf ganz $\mathbb{R}$ fort, und bezeichnen die so gewonnene 1-periodische Funktion wieder mit φ, so dass nun $\varphi\in C^{0,1}(\mathbb{R},\mathbb{R}^N)$ gilt. Sei nun $\varphi_m(x):=\frac{1}{m}\varphi(mx)$ für $m\in\mathbb{N}$. Dann ist $\varphi_m'(x)=\varphi'(mx)$ für $\mathscr{L}^1$-fast alle $x\in\mathbb{R}$, und $\|\varphi_m'\|_{L^\infty(I,\mathbb{R}^N)}\le c$. Mit $u_0(x):=p_0x$ und $u_m(x):=u_0(x)+\varphi_m(x)$ gilt dann

$$|u_m'(x)|\le|u_0'(x)|+|\varphi_m'(x)|=|p_0|+|\varphi_m'(x)|\le c'\quad\text{für fast alle}\,x\in I$$

und

$$|u_m(x)-u_0(x)|=|\varphi_m(x)|=|\frac{1}{m}\varphi(mx)|\le\frac{1}{m}\|\varphi\|_{C^0(\overline{I},\mathbb{R}^N)}\xrightarrow{m\to\infty}0\qquad\text{für alle}\;\;x\in\overline{I},$$

also $u_m\to u_0$ in $C^0(\overline{I},\mathbb{R}^N)$. Darüberhinaus haben wir $\|u_m\|_{C^{0,1}(\overline{I},\mathbb{R}^N)}\le C$ und damit $\|u_m\|_{W^{1,r}(I,\mathbb{R}^N)}\le C$ für alle $r\in[1,\infty]$. Falls das in den Voraussetzungen gegebene q in $(1,\infty)$ liegt, folgt wegen der Reflexivität (siehe Satz A.19 im Anhang) direkt die Existenz einer Teilfolge $u_{m_k}\rightharpoonup u_0$ in $W^{1,q}(I,\mathbb{R}^N)$ für $k\to\infty$ und mit dem Teilfolgenprinzip dann auch für die ganze Folge $u_m\rightharpoonup u_0$ in $W^{1,q}(I,\mathbb{R}^N)$ für $m\to\infty$. Wenn $q=1$, dann nutzt man die Beschränktheit des Intervalls I, um mit der HÖLDER-Ungleichung $W^{1,q'}(I,\mathbb{R}^N)\subset W^{1,1}(I,\mathbb{R}^N)$ für alle $q'\in(1,\infty)$ und damit die umgekehrte Inklusion für die Dualräume $(W^{1,1}(I,\mathbb{R}^N))^*\subset(W^{1,q'}(I,\mathbb{R}^N))^*$ zu schließen[1]. Aus $u_m\rightharpoonup u_0$ in $W^{1,q'}(I,\mathbb{R}^N)$ folgt nun auch $u_m\rightharpoonup u_0$ in $W^{1,1}(I,\mathbb{R}^N)$ für $m\to\infty$.

Also ist für jedes gegebene $q\in[1,\infty)$ die Funktionenfolge $\{u_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ zulässig in der Voraussetzung der Proposition, d.h. es gilt $\mathcal{F}(u_0)\le\liminf_{m\to\infty}\mathcal{F}(u_m)$. Nun ist $\mathcal{F}(u_0)=\int_I F(p_0)\,\mathrm{d}x=\mathscr{L}^1(I)F(p_0)$, also folgt mit der Transformation $z:=mx$ mit $\mathrm{d}z=m\,\mathrm{d}x$, $z(I)=mI$, und der Periodizität von φ

$$\begin{aligned}\mathscr{L}^1(I)F(p_0)=\mathcal{F}(u_0)&\le\liminf_{m\to\infty}\mathcal{F}(u_m)=\liminf_{m\to\infty}\int_I F(p_0+\varphi_m'(x))\,\mathrm{d}x\\&=\liminf_{m\to\infty}\int_I F(p_0+\varphi'(mx))\,\mathrm{d}x\\&=\liminf_{m\to\infty}\frac{1}{m}\int_{mI}F(p_0+\varphi'(z))\,\mathrm{d}z\\&=\liminf_{m\to\infty}\frac{1}{m}m\int_I F(p_0+\varphi'(z))\,\mathrm{d}z\\&=\int_I F(p_0+\varphi'(z))\,\mathrm{d}z.\end{aligned}$$

[1] Genauer gesagt: die Konvergenz $u_k\overset{k\to\infty}{\rightharpoonup}u$ in $W^{1,q'}(I,\mathbb{R}^N)$ bedeutet $l(u_k)\xrightarrow{k\to\infty}l(u)$ für alle linearen Funktionale $l\in(W^{1,q'}(I,\mathbb{R}^N))^*$. Für ein $\tilde l\in(W^{1,1}(I,\mathbb{R}^N))^*$ und $v\in W^{1,q'}(I,\mathbb{R}^N)\subset W^{1,1}(I,\mathbb{R}^N)$ gilt aber nach der HÖLDER-Ungleichung

$$|\tilde l(v)|\quad\le\quad\|\tilde l\|_{(W^{1,1}(I,\mathbb{R}^N))^*}\|v\|_{W^{1,1}(I,\mathbb{R}^N)}\le\|\tilde l\|_{(W^{1,1}(I,\mathbb{R}^N))^*}\|v\|_{W^{1,q'}(I,\mathbb{R}^N)}\,\mathscr{L}^1(I)^{1-\frac{1}{q'}},$$

also $\|\tilde l\|_{(W^{1,q'}(I,\mathbb{R}^N))^*}\le\|\tilde l\|_{(W^{1,1}(I,\mathbb{R}^N))^*}\mathscr{L}^1(I)^{1-(1/q')}$. Insgesamt hat man also $\tilde l(u_k)\xrightarrow{k\to\infty}\tilde l(u)$ für alle $\tilde l\in(W^{1,1}(I,\mathbb{R}^N))^*$.

(Die Konvexität der Zuordnung $p \mapsto F(z,p)$ werden wir im allgemeineren Fall 2 beweisen.)

Fall 2: $F = F(x,z,p)$. Sei $x_0 \in I$, $z_0 \in \mathbb{R}^N$ und $p_0 \in \mathbb{R}^N$. Wir definieren

$$R_h := (x_0, x_0 + h) \quad \text{für} \quad 0 < h < \operatorname{dist}(x_0, \partial I) < 1.$$

Wir setzen $\varphi \in C^{0,1}(\overline{I}, \mathbb{R}^N)$ wie im ersten Fall 1-periodisch auf $\mathbb{R}$ fort und definieren φ_m für $m \in \mathbb{N}$ durch

$$\varphi_m(x) := \frac{h}{m}\varphi\left(\frac{m}{h}(x - x_0)\right),$$

so dass $\varphi_m|_{R_h} \in C^{0,1}(R_h, \mathbb{R}^N)$ mit $\varphi_m|_{R_h}(x_0) = \varphi_m|_{R_h}(x_0 + h) = 0$, da $I = (0,1)$. Sei $u_0(x) := z_0 + p_0(x - x_0)$ und

$$u_m(x) := \begin{cases} u_0(x) + \varphi_m(x) & \text{für } \; x \in R_h, \\ u_0(x) & \text{für } \; x \in \overline{I} \setminus R_h. \end{cases}$$

Dann gilt wieder $u_m \xrightarrow{m\to\infty} u_0$ in $C^0(\overline{I}, \mathbb{R}^N)$, weil

$$\|\varphi_m\|_{C^0(\mathbb{R},\mathbb{R}^N)} \le \frac{h}{m}\|\varphi\|_{C^0(\overline{I},\mathbb{R}^N)} \xrightarrow{m\to\infty} 0.$$

Da $\varphi_m'(x) = \varphi'(\frac{m}{h}(x - x_0))$ für alle $m \in \mathbb{N}$, sind die Funktionen u_m' gleichmäßig beschränkt auf $\overline{I}$, womit $\{u_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ mit demselben Argument wie in Fall 1 als zulässige Folge in der Voraussetzung identifiziert werden kann. Wir betrachten nun

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{R_h}(u_m) &= \int_{R_h} F(x, u_m(x), u_m'(x))\,\mathrm{d}x \\ &= \sum_{i=0}^{m-1} \int_{I_i} F(x, u_m(x), u_m'(x))\,\mathrm{d}x, \end{aligned}$$

wobei $I_i := (x_i, x_{i+1})$ für $i = 0, \dots, m-1$, und $x_i := x_0 + \frac{ih}{m}$, $i = 0, \dots, m$. Die Substitution $y := \frac{m}{h}(x - x_i)$ mit $\mathrm{d}y = \frac{m}{h}\,\mathrm{d}x$ liefert dann wegen $y(I_i) = I$ und wegen

$$\varphi_m'(x) = \varphi'\left(\frac{m}{h}(x - x_0)\right) = \varphi'\left(\frac{m}{h}(x_i + \frac{h}{m}y - x_0)\right) = \varphi'(y + i) \underset{\varphi \text{ 1-periodisch}}{=} \varphi'(y)$$

die Identität

$$\mathcal{F}_{R_h}(u_m) = \sum_{i=0}^{m-1} \frac{h}{m} \int_I F(x_i + \frac{h}{m}y, u_m(x_i + \frac{h}{m}y), p_0 + \varphi'(y))\,\mathrm{d}y.$$

Zwischenbehauptung: Es gilt

$$\lim_{m\to\infty} \mathcal{F}_{R_h}(u_m) = \int_{R_h}\int_I F(x, u_0(x), p_0 + \varphi'(y))\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x.$$

Beweis der Zwischenbehauptung. Mit $F \in C^0(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^N)$ und $u_m \xrightarrow{m\to\infty} u_0$ in $C^0(\overline{I}, \mathbb{R}^N)$ folgt: Für alle $\varepsilon > 0$ gibt es $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, so dass für alle $m \ge N(\varepsilon)$ und $i \in \{0, 1, \dots, m-1\}$

$$\left| \int_I F(x_i, u_0(x_i), p_0 + \varphi'(y))\,\mathrm{d}y - \int_I F(x_i + \frac{h}{m}y, u_m(x_i + \frac{h}{m}y), p_0 + \varphi'(y))\,\mathrm{d}y \right| < \frac{\varepsilon}{2},$$

woraus

$$\begin{aligned}
&\left|\mathcal{F}_{R_h}(u_m) - \sum_{i=0}^{m-1} \frac{h}{m} \int_I F(x_i, u_0(x_i), p_0 + \varphi'(y))\,\mathrm{d}y\right| \\
\leq \quad & \sum_{i=0}^{m-1} \frac{h}{m} \left|\int_I F(x_i + \frac{h}{m}y, u_m(x_i + \frac{h}{m}y), p_0 + \varphi'(y))\,\mathrm{d}y - \int_I F(x_i, u_0(x_i), p_0 + \varphi'(y))\,\mathrm{d}y\right| \\
< \quad & \frac{\varepsilon h}{2m} \sum_{i=0}^{m-1} 1 = \frac{\varepsilon h}{2} < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{für alle } \; m \geq N(\varepsilon)
\end{aligned}$$

folgt. Nun ist die auf $\overline{I}$ stetige Funktion

$$f(x) := \int_I F(x, u_0(x), p_0 + \varphi'(y))\,\mathrm{d}y, \quad x \in \overline{I},$$

Riemann-integrierbar auf R_h, was die Existenz einer Zahl $N_1(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ mit $N_1(\varepsilon) \geq N(\varepsilon)$ impliziert, so dass für alle $m \geq N_1(\varepsilon)$

$$\left|\int_{R_h} \int_I F(x, u_0(x), p_0 + \varphi'(y))\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x - \sum_{i=0}^{m-1} \frac{h}{m} \int_I F(x_i, u_0(x_i), p_0 + \varphi'(y))\,\mathrm{d}y\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Insgesamt ergibt sich

$$\left|\mathcal{F}_{R_h}(u_m) - \int_{R_h} \int_I F(x, u_0(x), p_0 + \varphi'(y))\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x\right| < \varepsilon \qquad \text{für alle } \; m \geq N_1(\varepsilon),$$

womit die Zwischenbehauptung bewiesen ist.

Wegen der vorausgesetzten Unterhalbstetigkeit hat man

$$\begin{aligned}
&\int_{I\setminus R_h} F(x, u_0(x), p_0)\,\mathrm{d}x + \int_{R_h} F(x, u_0(x), p_0)\,\mathrm{d}x = \mathcal{F}(u_0) \\
\leq \quad & \liminf_{m\to\infty} \left[\int_{I\setminus R_h} F(x, \underbrace{u_m(x)}_{=u_0(x)}, \underbrace{u_m'(x)}_{=u_0'(x)})\,\mathrm{d}x + \int_{R_h} F(x, u_m(x), u_m'(x))\,\mathrm{d}x\right] \\
= \quad & \int_{I\setminus R_h} F(x, u_0(x), p_0)\,\mathrm{d}x + \liminf_{m\to\infty} \underbrace{\int_{R_h} F(x, u_m(x), u_m'(x))\,\mathrm{d}x}_{=\mathcal{F}_{R_h}(u_m)},
\end{aligned}$$

da $u_m = u_0$ auf $I\setminus R_h$. Es gilt also nach der Zwischenbehauptung

$$\begin{aligned}
\frac{1}{h} \int_{R_h} F(x, u_0(x), p_0)\,\mathrm{d}x &\leq \frac{1}{h} \liminf_{m\to\infty} \mathcal{F}_{R_h}(u_m) = \frac{1}{h} \lim_{m\to\infty} \mathcal{F}_{R_h}(u_m) \\
&= \frac{1}{h} \int_{R_h} \int_I F(x, u_0(x), p_0 + \varphi'(y))\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Für $h \to 0$ folgt dann mit dem Mittelwertsatz der Integralrechnung und der Definition von u_0

$$F(x_0, z_0, p_0) \leq \int_I F(x_0, z_0, p_0 + \varphi'(y))\,\mathrm{d}y,$$

womit die Beziehung (QC) gezeigt ist; denn es gilt $\mathscr{L}^1(I) = 1$.

Es bleibt die Konvexität von $F(x,z,\cdot)$ für alle $(x,z) \in \overline{I} \times \mathbb{R}^N$ zu beweisen. Dazu reicht der Konvexitätsnachweis in p für beliebige festgehaltene $x_0 \in I$ und $z_0 \in \mathbb{R}^N$. Die volle Behauptung für $(x,z) \in \overline{I} \times \mathbb{R}^N$ folgt dann durch stetige Fortsetzung.

Seien nun dazu $p_1, p_2 \in \mathbb{R}^N$ und $p = \lambda p_1 + (1-\lambda)p_2$ für eine beliebige Zahl $\lambda \in [0,1]$. Außerdem definiere die LIPSCHITZstetige Funktion

$$\tilde{\varphi}(x) := \begin{cases} x p_1 & \text{für } \; x \in [0,\lambda], \\ \lambda p_1 + (x-\lambda)p_2 & \text{für } \; x \in (\lambda, 1], \end{cases}$$

so dass

$$\tilde{\varphi}'(x) = \begin{cases} p_1 & \text{für } x \in [0,\lambda), \\ p_2 & \text{für } x \in (\lambda, 1]. \end{cases}$$

Sei nun $\varphi(x) := \tilde{\varphi}(x) - \tilde{\varphi}(0) - px = \tilde{\varphi}(x) - px \in C^{0,1}([0,1], \mathbb{R}^N)$. Dann gelten nach Definition von $\tilde{\varphi}$ die Identitäten $\varphi(0) = 0$ und $\varphi(1) = \tilde{\varphi}(1) - p = 0$. Also ergibt sich mit der oben bewiesenen Ungleichung (QC) für $p_0 := p$ und diese Wahl von φ

$$\begin{aligned} F(x_0, z_0, \lambda p_1 + (1-\lambda)p_2) &= F(x_0, z_0, p) \\ &\underset{\text{(QC)}}{\leq} \int_I F(x_0, z_0, p + \varphi'(y))\,\mathrm{d}y \\ &= \int_I F(x_0, z_0, \tilde{\varphi}'(y))\,\mathrm{d}y \\ &= \int_0^\lambda F(x_0, z_0, p_1)\,\mathrm{d}y + \int_\lambda^1 F(x_0, z_0, p_2)\,\mathrm{d}y \\ &= \lambda F(x_0, z_0, p_1) + (1-\lambda) F(x_0, z_0, p_2). \end{aligned}$$

□

Bemerkung:
Fordert man die *schwache Oberhalbstetigkeit* (d.h. $\mathcal{F}(u) \geq \limsup_{m\to\infty} \mathcal{F}(u_m)$) anstelle der schwachen Unterhalbstetigkeit in Proposition 3.2, dann ergibt sich (QC) mit umgekehrtem Ungleichheitszeichen, und $F(x,z,\cdot)$ ist *konkav* in p.

Mit dieser Beobachtung erhält man

Korollar 3.4
Sei $I = (a,b)$ mit $-\infty < a < b < +\infty$ und $F \in C^0(\overline{I} \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N), q \in [1,\infty)$. Dann ist die Abbildung $v \mapsto \int_I F(x, v(x), v'(x))\,\mathrm{d}x$ genau dann schwach stetig *in $W^{1,q}(I, \mathbb{R}^N)$, also stetig bezüglich der schwachen Konvergenz in $W^{1,q}(I,\mathbb{R}^N)$, wenn $F(x,z,p)$ linear in p ist für alle $(x,z) \in \overline{I} \times \mathbb{R}^N$, d.h. wenn es $A \in C^0(\overline{I} \times \mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$ und $B \in C^0(\overline{I} \times \mathbb{R}^N)$ gibt, so dass*

$$F(x,z,p) = A(x,z)\cdot p + B(x,z) \qquad \textit{für} \quad (x,z,p) \in \overline{I} \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N. \tag{3.1}$$

Beweis. „⇒“: Mit der schwachen Stetigkeit von $\mathcal{F}$ ist $\mathcal{F}(u) = \lim_{m\to\infty} \mathcal{F}(u_m)$ für alle in $W^{1,q}(I,\mathbb{R}^N)$ schwach konvergenten Folgen $u_m \rightharpoonup u$. Also ist $\mathcal{F}$ schwach unterhalb- und oberhalbstetig, d.h. $F(x,z,\cdot)$ ist konkav und konvex nach Proposition 3.2 und der sich daran anschließenden Bemerkung. Damit ist F linear in p, was die Gestalt (3.1) von F impliziert. Die Stetigkeit von A und B folgt aus der Tatsache, dass $F \in C^0(\overline{I} \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N)$. Tatsächlich kann die Stetigkeit von B direkt aus (3.1) abgelesen werden, indem man $p = 0$ einsetzt. Anschließend kann man mit der Wahl $p := e_i \in \mathbb{R}^N$ für die Standard-Einheitsvektoren $e_1, \ldots, e_N \in \mathbb{R}^N$ die Stetigkeit der Komponenten A^i für $i = 1, \ldots, N$ aus der Stetigkeit von B und F in (3.1) gewinnen.

„$\Leftarrow$": Wir zeigen die Rückrichtung der Einfachheit halber nur für $q > 1$. Eine Folge $\{u_m\} \subset W^{1,q}(I, \mathbb{R}^N)$ mit $u_m \overset{m\to\infty}{\rightharpoonup} u$ in $W^{1,q}(I, \mathbb{R}^N)$ ist nach Lemma A.8 in $W^{1,q}(I, \mathbb{R}^N)$ beschränkt, d.h., es gibt eine Konstante C unabhängig von m, so dass $\|u_m\|_{W^{1,q}(I,\mathbb{R}^N)} \le C$ für alle $m \in \mathbb{N}$. Weiterhin gibt es nach Satz 2.15 in Verbindung mit dem Satz von Arzelà-Ascoli eine Teilfolge, die gegen u in $C^0(\overline{I}, \mathbb{R}^N)$ konvergiert. Nach dem Teilfolgenprinzip gilt dann auch $u_m \to u$ in $C^0(\overline{I}, \mathbb{R}^N)$ für $m \to \infty$, und wir können abschätzen

$$
\begin{aligned}
|\mathcal{F}(u_m) - \mathcal{F}(u)| &= \left| \int_I F(x, u_m(x), u_m'(x))\,\mathrm{d}x - \int_I F(x, u(x), u'(x))\,\mathrm{d}x \right| \\
&\le \left| \int_I A(x, u(x)) \cdot (u_m'(x) - u'(x))\,\mathrm{d}x \right| \\
&\quad + \left| \int_I |A(x, u_m(x)) - A(x, u(x))| |u_m'(x)|\,\mathrm{d}x \right| \\
&\quad + \left| \int_I |B(x, u_m(x)) - B(x, u(x))|\,\mathrm{d}x \right| \quad \xrightarrow{m\to\infty} 0\,;
\end{aligned}
$$

denn mit der Stetigkeit von A und B und der gleichmäßigen Konvergenz der u_m gegen u gehen die letzten beiden Terme auf der rechten Seite wegen $\|u_m\|_{W^{1,q}(I,\mathbb{R}^N)} \le C$ gegen Null, während mit der schwachen Konvergenz $u_m \overset{m\to\infty}{\rightharpoonup} u$ der erste Ausdruck auf der rechten Seite gegen Null konvergiert. Damit gilt also

$$
|\mathcal{F}(u_m) - \mathcal{F}(u)| \xrightarrow{m\to\infty} 0.
$$

□

Ein in den Anwendungen leicht nachprüfbares hinreichendes Kriterium für die Unterhalbstetigkeit von Variationsintegralen liefert der Unterhalbstetigkeitssatz von Tonelli.

Satz 3.5 [Tonelli]
Sei $I = (a, b)$ mit $-\infty < a < b < +\infty$ und außerdem

(U1) $F, F_p \in C^0(\overline{I} \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N)$,

(U2) $F \ge 0$ *(alternativ auch $F(x, z, p) \ge g(x)$ für alle $(z, p) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$ und $\mathscr{L}^1$-fast alle $x \in I$ und für eine Funktion $g \in L^1(I)$)*,

(U3) $F(x, z, \cdot)$ *konvex in p für alle $(x, z) \in \overline{I} \times \mathbb{R}^N$.*

Dann ist $\mathcal{F}(u) := \int_I F(x, u(x), u'(x))\,\mathrm{d}x$ schwach unterhalbstetig in $W^{1,q}(I, \mathbb{R}^N)$ für alle $q \in [1, \infty)$.

DeGiorgi [19] konnte einen solchen Satz unter einer abgeschwächten ersten Bedingung beweisen: Anstelle von Voraussetzung (U1) reicht es, wenn F eine Carathéodory-Funktion ist, d.h. $F(\cdot, z, p)$ ist messbar für alle $(z, p) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$ und $F(x, \cdot, \cdot)$ ist stetig für $\mathscr{L}^1$-fast alle $x \in I$. Diese DeGiorgi-Variante werden wir für den Existenzbeweis für parametrische Variationsintegrale, also für CARTAN-Funktionale in Abschnitt 5.1 benötigen. Es gibt zahlreiche weitere Verallgemeinerungen und Verschärfungen dieses Unterhalbstetigkeitssatzes auch in Dimension $n = 1$, siehe dazu die Resultate und weiterführenden Literaturhinweise in [1], [6], und [7, S. 109ff].

Beweis von Satz 3.5. Wir führen den Beweis nur unter der Voraussetzung $F \geq 0$ (sonst betrachte das modifizierte Funktional $\mathcal{F} + \int_I |g(x)|\,dx$). Da $I \subset \mathbb{R}$ beschränkt ist, können wir ohne Einschränkung annehmen, dass die Folge $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ schwach in $W^{1,1}(I,\mathbb{R}^N)$ konvergiert, vgl. mit dem Argument im Beweis von Proposition 3.2. Wegen der kompakten Einbettung $W^{1,1}(I,\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^1(I,\mathbb{R}^N)$ (siehe Satz[2] 2.9 (i)) konvergiert zunächst eine Teilfolge und dann nach dem Teilfolgenprinzip auch die ganze Folge $\{u_k\}$ stark gegen u in $L^1(I,\mathbb{R}^N)$ und damit auch $\mathscr{L}^1$-fast überall gegen u.

Wegen der Absolutstetigkeit der Mengenfunktion

$$I \supset E \mapsto \int_E F(x,u(x),u'(x))\,\mathrm{d}x$$

(vgl. [3, Lemma A1.17]) gibt es zu $\varepsilon > 0$ eine Zahl $\delta(\varepsilon) > 0$, so dass

$$\int_B F(x,u(x),u'(x))\,\mathrm{d}x \geq \mathcal{F}(u) - \varepsilon \quad \text{für alle BORELmengen } B \subset I \text{ mit } \mathscr{L}^1(I \setminus B) < \delta(\varepsilon). \tag{3.2}$$

(Falls $\mathcal{F}(u) = \infty$, was nach Proposition 3.1 möglich ist, dann findet man $\delta(\varepsilon) > 0$, so dass $\int_B F(x,u(x),u'(x))\,\mathrm{d}x \geq \frac{1}{\varepsilon}$ für alle BORELmengen $B \subset I$ mit $\mathscr{L}^1(I \setminus B) < \delta(\varepsilon)$.) Nach dem Satz von Egorov [3, Satz A1.18] existiert eine BORELmenge $B_{\delta(\varepsilon)} \subset I$ mit $\mathscr{L}^1(I \setminus B_{\delta(\varepsilon)}) < \delta(\varepsilon)/2$, so dass u_k auf $B_{\delta(\varepsilon)}$ gleichmäßig gegen u konvergiert, d.h.

$$\sup_{x\in B_{\delta(\varepsilon)}} |u_k(x) - u(x)| \to 0 \quad \text{für } k \to \infty.$$

Weiterhin findet man nach dem Satz von LUSIN (vgl. [3, Satz A4.7]) eine kompakte Menge $K(\varepsilon) \subset B_{\delta(\varepsilon)}$, so dass neben der Funktion u auch die schwache Ableitung u' stetig auf $K(\varepsilon)$ ist, und so dass

$$\mathscr{L}^1(B_{\delta(\varepsilon)} \setminus K(\varepsilon)) < \frac{\delta(\varepsilon)}{2} \quad \Rightarrow \quad \mathscr{L}^1(I \setminus K(\varepsilon)) < \delta(\varepsilon).$$

Somit folgt aus (3.2)

$$\int_{K(\varepsilon)} F(x,u(x),u'(x))\,\mathrm{d}x \geq \mathcal{F}(u) - \varepsilon \tag{3.3}$$

(oder $\int_{K(\varepsilon)} F(x,u(x),u'(x))\,\mathrm{d}x \geq 1/\varepsilon$, falls $\mathcal{F}(u) = \infty$).

[2] Möchte man diesen in der Vorlesung nicht bewiesenen Einbettungssatz Satz 2.9 umgehen, kann man hier mit dem linearen Auswertungsfunktional $l_x(u) := u(x)$ für $x \in I$ argumentieren. Mit Satz 2.15 erhält man nicht nur, dass l_x für alle $x \in \overline{I}$ wohldefiniert ist, sondern darüberhinaus auch die Abschätzung

$$|l_x(u)| = |u(x)| \underset{\text{Satz 2.15}}{\leq} C\|u\|_{W^{1,1}(I,\mathbb{R}^N)},$$

was zeigt, dass $l_x \in \left(W^{1,1}(I,\mathbb{R}^N)\right)^*$, und damit folgt die Konvergenz $u_k(x) = l_x(u_k) \to l_x(u) = u(x)$ für $k \to \infty$ für jedes $x \in \overline{I}$.

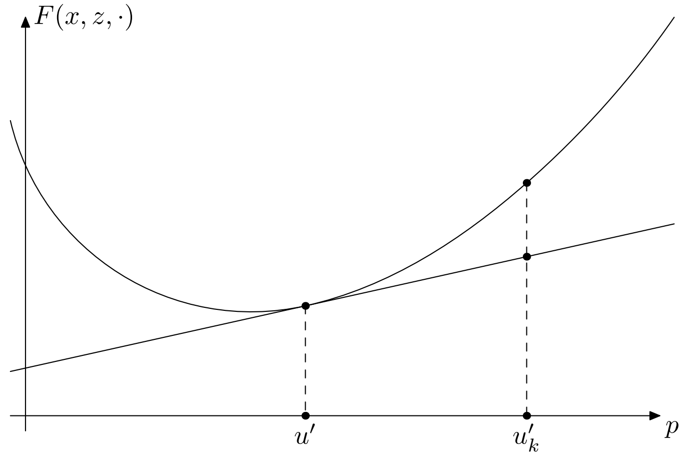

Abbildung 3.1: F ist konvex in p.

Wegen $F \geq 0$ und der Konvexität von F können wir das Funktional nun folgendermaßen abschätzen:

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(u_k) \quad &\geq \quad \int_{K(\varepsilon)} F(x, u_k(x), u_k'(x))\,\mathrm{d}x \\
&\geq \quad \int_{K(\varepsilon)} F(x, u_k(x), u'(x))\,\mathrm{d}x + \int_{K(\varepsilon)} F_p(x, u_k(x), u'(x)) \cdot (u_k'(x) - u'(x))\,\mathrm{d}x \\
&= \quad \int_{K(\varepsilon)} F(x, u(x), u'(x))\,\mathrm{d}x \\
&\qquad + \underbrace{\int_{K(\varepsilon)} F(x, u_k(x), u'(x))\,\mathrm{d}x - \int_{K(\varepsilon)} F(x, u(x), u'(x))\,\mathrm{d}x}_{=:A_k} \\
&\qquad + \underbrace{\int_{K(\varepsilon)} F_p(x, u(x), u'(x)) \cdot (u_k'(x) - u'(x))\,\mathrm{d}x}_{=:B_k} \\
&\qquad + \underbrace{\int_{K(\varepsilon)} [F_p(x, u_k(x), u'(x)) - F_p(x, u(x), u'(x))] \cdot (u_k'(x) - u'(x))\,\mathrm{d}x}_{=:C_k} \\
&\xrightarrow{k\to\infty} \quad \int_{K(\varepsilon)} F(x, u(x), u'(x))\,\mathrm{d}x;
\end{aligned}$$

denn die Terme A_k, B_k, C_k streben für $k \to \infty$ gegen Null: Es gilt $A_k \xrightarrow{k\to\infty} 0$, da $F \in C^0(\overline{I} \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N)$ und $u_k \xrightarrow{k\to\infty} u$ gleichmäßig auf $K(\varepsilon)$ und u' beschränkt auf $K(\varepsilon)$. Weiterhin hat man $B_k \xrightarrow{k\to\infty} 0$, weil $u_k \overset{k\to\infty}{\rightharpoonup} u$ in $W^{1,1}(I, \mathbb{R}^N)$ und $F_p(\cdot, u(\cdot), u'(\cdot)) \in C^0(K(\varepsilon), \mathbb{R}^N)$. Schließlich sieht man ein, dass $C_k \xrightarrow{k\to\infty} 0$, da $F_p \in C^0(\overline{I} \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N)$, $u_k \xrightarrow{k\to\infty} u$ gleichmäßig auf $K(\varepsilon)$ und da $\|u_k' - u'\|_{L^1(I,\mathbb{R}^N)}$ beschränkt ist, weil $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ schwach konvergent ist, vgl. Lemma A.8 im Anhang.

Schließlich folgt also wegen $F \geq 0$ mit (3.3) im Fall $\mathcal{F}(u) < \infty$

$$\begin{aligned}\liminf_{k\to\infty} \mathcal{F}(u_k) &\geq \int_{K(\varepsilon)} F(x, u(x), u'(x))\,\mathrm{d}x \\ &\geq \int_I F(x, u(x), u'(x))\,\mathrm{d}x - \varepsilon = \mathcal{F}(u) - \varepsilon \quad \forall\, \varepsilon > 0.\end{aligned}$$

Falls $\mathcal{F}(u) = \infty$ folgt $\liminf_{k\to\infty} \mathcal{F}(u_k) \geq 1/\varepsilon$ für das beliebig vorgegebene $\varepsilon > 0$. □

Nun sind wir in der Lage, die am Anfang dieses Kapitels skizzierte direkte Methode für den Beweis eines Existenzsatzes anzuwenden.

Satz 3.6 [Existenzsatz von Tonelli]
Sei $I = (a, b)$ mit $-\infty < a < b < +\infty$, $q \in (1, \infty)$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^N$. Außerdem gelte

(E1) $F, F_p \in C^0(\overline{I} \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N)$;

(E2) *es gibt Konstanten $c_0 > 0$ und $c_1 \geq 0$, so dass*

$$c_0|p|^q - c_1 \leq F(x, z, p) \quad \forall\, (x, z, p) \in \overline{I} \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N;$$

(E3) *$F(x, z, \cdot)$ ist konvex (in p) für alle $(x, z) \in \overline{I} \times \mathbb{R}^N$.*

Dann gibt es eine Funktion u in der Klasse

$$\mathcal{C}(\alpha, \beta) := \{v \in W^{1,q}(I, \mathbb{R}^N) : v(a) = \alpha,\ v(b) = \beta\},$$

welche das Funktional $\mathcal{F}$ in $\mathcal{C}(\alpha, \beta)$ minimiert:

$$\mathcal{F}(u) = \int_I F(x, u(x), u'(x))\,\mathrm{d}x = \inf_{\mathcal{C}(\alpha,\beta)} \mathcal{F}(\cdot).$$

Beweis. Ohne Einschränkung führen wir den Beweis für den Fall $c_1 = 0$, ansonsten kann man zuerst das Hilfsfunktional $\tilde{\mathcal{F}}(\cdot) := \mathcal{F}(\cdot) + \mathscr{L}^1(I)c_1$ betrachten, dessen Integrand nach Voraussetzung (E2) nichtnegativ ist. Der für $\tilde{\mathcal{F}}$ gefundene Minimierer minimiert dann auch das ursprüngliche Funktional $\mathcal{F}$. Wir dürfen also ohne Einschränkung davon ausgehen, dass $\inf_{\mathcal{C}(\alpha,\beta)} \mathcal{F} \geq 0$.

Zunächst ist die Klasse zulässiger Funktionen $\mathcal{C}(\alpha, \beta)$ nicht leer, zum Beispiel liegt die die Randwerte verbindende Gerade, also die affin lineare Funktion $l : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^N$ mit $l(a) = \alpha$ und $l(b) = \beta$, in dieser Menge. Zusätzlich ist wegen der Stetigkeitsvoraussetzung an F der Funktionswert $\mathcal{F}(l) < \infty$, da die Ableitung l' konstant ist. Es gilt also $\inf_{\mathcal{C}(\alpha,\beta)} \mathcal{F} \in [0, \infty)$, und es existiert eine Minimalfolge, d.h. eine Folge $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{C}(\alpha, \beta)$ mit $\mathcal{F}(u_k) \xrightarrow{k\to\infty} \inf_{\mathcal{C}(\alpha,\beta)} \mathcal{F}(\cdot)$. Aus Voraussetzung (E2) (für $c_1 = 0$) folgt die Abschätzung

$$c_0 \int_I |u_k'(x)|^q\,\mathrm{d}x \leq \mathcal{F}(u_k) \xrightarrow{k\to\infty} \inf_{\mathcal{C}(\alpha,\beta)} \mathcal{F}(\cdot) < \infty,$$

was bedeutet, dass $\|u_k'\|_{L^q(I,\mathbb{R}^N)}$ unabhängig von k beschränkt ist. Außerdem folgt aus $|u_k(x)| \leq |u_k(a)| + |u_k(x) - u_k(a)|$, dass

$$|u_k(x)|^q \leq 2^{q-1}\Big[|\underbrace{u_k(a)}_{=\alpha}|^q + |u_k(x) - u_k(a)|^q\Big].$$

Aus dieser Ungleichung folgt[3] mit Hilfe der Poincaré-Ungleichung (siehe Bemerkung nach Satz 2.15)

$$\begin{aligned}\int_I |u_k(x)|^q \,\mathrm{d}x &\le c + c\int_I |u_k(x) - u_k(a)|^q \,\mathrm{d}x \\ &\le c + c\int_I |u_k'(x)|^q \,\mathrm{d}x \le c,\end{aligned}$$

also ist $\|u_k\|_{L^q(I,\mathbb{R}^N)}$ und damit insgesamt $\|u_k\|_{W^{1,q}(I,\mathbb{R}^N)}$ gleichmäßig beschränkt. Da für $q \in (1,\infty)$ der Raum $W^{1,q}(I,\mathbb{R}^N)$ ein reflexiver Banachraum ist, gibt es nach Satz A.10 im Anhang eine Funktion $u \in W^{1,q}(I,\mathbb{R}^N)$ und eine in $W^{1,q}(I,\mathbb{R}^N)$ gegen u schwach konvergente Teilfolge $\{u_{k_i}\}_{i\in\mathbb{N}}$. Nach Satz 2.15 ist $\|u_k\|_{C^{0,1-\frac{1}{q}}(\overline{I},\mathbb{R}^N)}$ gleichmäßig beschränkt, womit man mit Hilfe des Satzes von Arzelà-Ascoli auf die Existenz einer weiteren Teilfolge schließt, die wir ebenfalls mit $\{u_{k_i}\}_{i\in\mathbb{N}}$ bezeichnen, welche in $C^0(\overline{I},\mathbb{R}^N)$ ebenfalls gegen u konvergiert. Deshalb gilt $u(a) = \lim_{i\to\infty} u_{k_i}(a) = \alpha$ und $u(b) = \lim_{i\to\infty} u_{k_i}(b) = \beta$, so dass $u \in \mathcal{C}(\alpha,\beta)$. Damit und mit der Unterhalbstetigkeit von $\mathcal{F}$, die Satz 3.5 garantiert, folgt, dass u ein Minimierer von $\mathcal{F}$ ist:

$$\inf_{\mathcal{C}(\alpha,\beta)} \mathcal{F}(\cdot) \le \mathcal{F}(u) \le \liminf_{i\to\infty} \mathcal{F}(u_{k_i}) = \lim_{k\to\infty} \mathcal{F}(u_k) = \inf_{\mathcal{C}(\alpha,\beta)} \mathcal{F}(\cdot).$$

□

Bemerkung: 1. Die erste Bedingung in Satz 3.6 lässt sich durch die Forderung ersetzen, dass F eine Carathéodory-Funktion ist, vergleiche mit der Voraussetzung von Proposition 3.1. Dann sind auch die Voraussetzungen (E2) und (E3) nur für $\mathscr{L}^1$-fast alle $x \in I$ zu fordern.

2. Die zweite Bedingung des Satzes kann auch durch die eines *superlinearen Wachstumsverhaltens* ersetzt werden (siehe Übungsaufgabe):

$$F(x,z,p) \ge \theta(p) \ge 0 \quad \text{mit} \lim_{|p|\to\infty} \frac{\theta(p)}{|p|} = \infty \quad \forall\ (x,z) \in \overline{I} \times \mathbb{R}^N.$$

Allerdings benötigt man dann für den Existenzbeweis ein Kompaktheitsresultat für den nichtreflexiven Banachraum $W^{1,1}(I,\mathbb{R}^N)$, vgl. [7, Theorem 3.7 & 2.12].

3. Anstelle von $\mathcal{C}(\alpha,\beta)$ kann zum Beispiel auch eine der folgenden Mengen als Klasse zulässiger Vergleichsfunktionen gewählt werden, denn auch dann ist die Poincaré-Ungleichung anwendbar, vgl. mit der Bemerkung nach dem Beweis von Satz 2.15:

$$\begin{aligned}\mathcal{C}(\alpha) &:= \{v \in W^{1,q}(I,\mathbb{R}^N) : v(a) = \alpha\}, \\ \mathcal{C}(\beta) &:= \{v \in W^{1,q}(I,\mathbb{R}^N) : v(b) = \beta\}, \\ \mathcal{C}_{x_0}(\xi) &:= \{v \in W^{1,q}(I,\mathbb{R}^N) : v(x_0) = \xi\} \quad \text{für beliebiges } x_0 \in \overline{I}, \\ \mathcal{C}_M(m) &:= \left\{v \in W^{1,q}(I,\mathbb{R}^N) : M(v) := \fint_I v(x)\,\mathrm{d}x = m\right\}.\end{aligned}$$

[3]Hier und im Folgenden bezeichnet c oder C eine generische Konstante, deren Wert sich zwar von Zeile zu Zeile ändern kann, die aber nicht von k sondern nur von den Daten $q, F, I, c_0, c_1, \alpha, \beta$ abhängt.

Beispiel $\boxed{3.1}$
Wir betrachten für $q \in (1,\infty)$ das Variationsintegral

$$\mathcal{F}(v) := \int_I |v'(x)|^q \,\mathrm{d}x,$$

welches zu gegebenen Randdaten $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^N$ in der Klasse

$$\mathcal{C}(\alpha,\beta) := \{v \in W^{1,q}(I,\mathbb{R}^N) : v(a) = \alpha,\, v(b) = \beta\}$$

minimiert werden soll. Man prüft leicht nach, dass alle Voraussetzungen des Existenzsatzes, Satz 3.6, erfüllt sind. Insbesondere zum Nachweis der Konvexität der Abbildung $p \mapsto F(x,z,p) = |p|^q$ reicht die Beobachtung, dass die Verkettung einer konvexen Funktion $g : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ mit einer konvexen und monoton wachsenden Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ wieder konvex ist; denn aus

$$g(\lambda p_1 + (1-\lambda)p_2) \le \lambda g(p_1) + (1-\lambda)g(p_2) \quad \text{für } p_1, p_2 \in \mathbb{R}^N \text{ und } \lambda \in [0,1]$$

folgt dann mit der Monotonie von f

$$\begin{aligned}(f \circ g)(\lambda p_1 + (1-\lambda)p_2) &\le f(\lambda g(p_1) + (1-\lambda)g(p_2)) \\ &\le \lambda f \circ g(p_1) + (1-\lambda) f \circ g(p_2),\end{aligned}$$

wobei in der zweiten Ungleichung die Konvexität von f zum Tragen kommt. In unserer Anwendung ist $g(p) := |p|$ und $f(s) := s^q$.

Also ist das Existenzresultat Satz 3.6 anwendbar, und es existiert ein Minimierer $u \in \mathcal{C}(\alpha,\beta)$ mit

$$\mathcal{F}(u) = \inf_{\mathcal{C}(\alpha,\beta)} \mathcal{F}.$$

Für höhere Raumdimensionen $n \ge 2$ nennt man die Minimierer der zugehörigen Variationsintegrale

$$\mathcal{F}(v) := \int_\Omega |\nabla v(x)|^q \,\mathrm{d}x, \quad \Omega \subset\subset \mathbb{R}^n,$$

auch *q-harmonische Abbildungen*. Von besonderem Interesse sind hier q-harmonische Abbildungen, die auf Riemannschen oder Finslerschen Mannigfaltigkeiten definiert sind, und die in eine andere Riemannsche oder Finslersche Mannigfaltigkeit abbilden. Der Fall $q = 2$ mit Riemannschem Urbild und Riemannscher Zielmannigfaltigkeit ist hier am besten untersucht, man nennt die 2-harmonischen Abbildungen einfach *harmonische Abbildungen*. Einblicke in diese mittlerweile sehr breite Forschungsrichtung gewähren z.B. die Monographien von Eells und Fuglede [31] und von Hélein [48], siehe auch [44], [40] und die aktuelleren Arbeiten [73, 74, 75], [97], [104, 103, 105, 106, 107], [109] zu harmonischen Abbildungen zwischen Finslermannigfaltigkeiten.

Beispiel $\boxed{3.2}$
Wir betrachten für $N = 1$, $I = (0,1)$, $\mu \in \mathbb{R}$ und $q \in (1,\infty)$ das Funktional $\mathcal{F}_{\mu,q}$ definiert durch

$$\mathcal{F}_{\mu,q}(v) := \int_0^1 x^\mu |v'(x)|^q \,\mathrm{d}x$$

und damit für gegebene Randdaten $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ das Variationsproblem

$$\mathcal{F}_{\mu,q}(v) \longrightarrow \text{min!} \quad \text{in} \quad \mathcal{C}(\alpha,\beta) := \{v \in W^{1,q}(I) : v(0) = \alpha,\, v(1) = \beta\}.$$

Zuerst untersuchen wir den auf Weierstrass zurückgehenden Spezialfall $\mu = 2 = q$. *Dann existiert kein Minimierer in $\mathcal{C}(\alpha,\beta)$, falls $\alpha \neq \beta$,* was wir durch ein Widerspruchsargument beweisen: Offensichtlich ist $\mathcal{F}_{\mu,q} \geq 0$ für alle $q \in (0,\infty)$ und $\mu \in \mathbb{R}$, und es gibt Folgen $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{C}(\alpha,\beta)$ mit $\mathcal{F}_{2,2}(u_k) \xrightarrow{k\to\infty} 0$, wie unten gezeigt wird; also ist $\inf_{\mathcal{C}(\alpha,\beta)} \mathcal{F}_{2,2}(\cdot) = 0$. Gäbe es nun ein $u \in \mathcal{C}(\alpha,\beta)$ mit $\mathcal{F}_{2,2}(u) = \inf_{\mathcal{C}(\alpha,\beta)} \mathcal{F}_{2,2}(\cdot) = 0$, so wäre notwendig $u' = 0$ $\mathscr{L}^1$-fast überall in $(0,1)$. Nach Lemma 2.4 wäre u dann aber konstant auf $[0,1]$, was sich nicht mit $u(0) = \alpha \neq \beta = u(1)$ vereinbaren ließe.

Eine mögliche Folge $\{u_k\} \subset \mathcal{C}(\alpha,\beta) \cap C^\infty(\mathbb{R})$, entlang derer die Energiewerte gegen Null konvergieren, ist gegeben durch

$$u_k(x) := \alpha + (\beta - \alpha)\frac{\arctan kx}{\arctan k} \qquad \text{für } \; x \in \mathbb{R}.$$

Tatsächlich sind wegen $u_k(0) = \alpha$, $u_k(1) = \beta$ diese Funktionen in $\mathcal{C}(\alpha,\beta)$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Weiterhin berechnet man

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{2,2}(u_k) &= \int_0^1 \frac{(\beta-\alpha)^2}{(\arctan k)^2}\,\frac{k^2x^2}{(1+k^2x^2)^2}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{(\beta-\alpha)^2}{2k(\arctan k)^2}\left[\arctan k - \frac{k}{1+k^2}\right] \xrightarrow{k\to\infty} 0. \end{aligned}$$

Nun wenden wir uns allgemeineren Betrachtungen des gegebenen Variationsproblems zu und beweisen folgende Aussagen:

1. Falls $\mu \leq 0$ und $q > 1$, dann gibt es genau eine Lösung $u \in \mathcal{C}(\alpha,\beta)$ für gegebene Randdaten $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Es wird sich herausstellen, dass diese Lösung darüberhinaus mindestens von der Klasse $C^\infty((0,1]) \cap C^1([0,1])$ ist.

2. Falls $\mu > 0$ und $q > \mu + 1$, dann gibt es genau eine Lösung $u \in W^{1,\tilde{q}}(I)$ mit $u(0) = \alpha$ und $u(1) = \beta$ für gegebene Randdaten $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, wobei $\tilde{q} \in (1, \frac{q}{\mu+1})$ beliebig gewählt werden kann. Hier ist die Lösung darüberhinaus von der Klasse $C^\infty((0,1])$ aber nicht in $C^1([0,1])$.

3. Falls $\mu > 0$ und $1 < q \leq \mu + 1$ sowie $\alpha \neq \beta$, dann gibt es keine Lösung in $\mathcal{C}(\alpha,\beta)$.

1. Fall: $\mu \leq 0$

Wir behaupten: *Es gibt einen eindeutigen, explizit bestimmbaren Minimierer von $\mathcal{F}_{\mu,q}$.*
Mit $x^\mu = x^{-|\mu|} \geq 1^{-|\mu|} = 1$ für alle $x \in (0,1]$ ist

$$F(x,z,p) = F(x,p) = x^\mu |p|^q \geq |p|^q \qquad \text{für alle } \; x \in (0,1],\, p \in \mathbb{R},$$

was die Bedingung (E2) aus Satz 3.6 zumindest für fast alle $x \in [0,1]$ liefert. $F(\cdot,p)$ ist messbar auf I für alle $p \in \mathbb{R}$ und $F(x,\cdot)$ stetig in $\mathbb{R}$ für alle $x \in (0,1]$. Wegen $q > 1$ ist

$$F_p(x,p) = qx^\mu |p|^{q-2}p \qquad \text{für } \; x > 0$$

strikt monoton wachsend in p, und damit ist F strikt konvex in p für alle $x \in (0,1]$, was Bedingung (E3) für fast alle $x \in [0,1]$ liefert. Deshalb lässt sich der Existenzsatz, Satz 3.6, in Kombination mit der sich daran anschließenden ersten Bemerkung anwenden, d.h. es gibt ein $u \in \mathcal{C}(\alpha,\beta)$ mit

$$\mathcal{F}_{\mu,q}(u) = \inf_{\mathcal{C}(\alpha,\beta)} \mathcal{F}_{\mu,q}(\cdot). \tag{3.4}$$

Die Eindeutigkeit von u folgt aus der strikten Konvexität von $F(x,\cdot)$ in der Variablen p und der Tatsache, dass $F = F(x,p)$ *nicht* von $z \in \mathbb{R}$ abhängt: Für $u_1, u_2 \in \mathcal{C}(\alpha,\beta)$ und $\lambda \in [0,1]$ ist nämlich auch

$$\lambda u_1 + (1-\lambda)u_2 \quad \in \quad \mathcal{C}(\alpha,\beta). \tag{3.5}$$

Dann ist für $\lambda \in (0,1)$ und $u_1 \neq u_2$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{\mu,q}(\lambda u_1 + (1-\lambda)u_2) &= \int_I F(x, \lambda u_1' + (1-\lambda)u_2')\,\mathrm{d}x \\ &< \int_I \Big[\lambda F(x,u_1') + (1-\lambda)F(x,u_2')\Big]\,\mathrm{d}x \\ &= \lambda \mathcal{F}_{\mu,q}(u_1) + (1-\lambda)\mathcal{F}_{\mu,q}(u_2). \end{aligned} \tag{3.6}$$

Wären nun u und v zwei unterschiedliche globale Minimierer von $\mathcal{F}_{\mu,q}$ auf $\mathcal{C}(\alpha,\beta)$, dann ergäbe sich für den Fall $\lambda = \frac{1}{2}$ für $u \neq v$ wegen $\mathcal{F}_{\mu,q}(u) = \mathcal{F}_{\mu,q}(v)$ aus (3.4)–(3.6) ein Widerspruch:

$$\mathcal{F}_{\mu,q}(u) = \frac{1}{2}\mathcal{F}_{\mu,q}(u) + \frac{1}{2}\mathcal{F}_{\mu,q}(v) \underset{(3.6)}{>} \mathcal{F}_{\mu,q}(\frac{1}{2}u + \frac{1}{2}v) \underset{(3.5),(3.4)}{\geq} \mathcal{F}_{\mu,q}(u).$$

Die Funktion u ist also der eindeutige Minimierer von $\mathcal{F}_{\mu,q}$.

Alternativ kann man für den Beweis der Eindeutigkeit auch das folgende stärkere Resultat benutzen (siehe die zugehörige Übungsaufgabe, deren Lösung mit einem ähnlichen Schluss gefunden werden kann):

Behauptung: Jeder schwache kritische Punkt eines Variationsintegrals mit einem in p strikt konvexen Integranden $F = F(x,p)$ ist strikter globaler Minimierer (und damit eindeutig). Genauer gilt für alle $u \in \mathcal{C}(\alpha,\beta)$ mit $\delta\mathcal{F}(u,\varphi) = 0$ für alle $\varphi \in W_0^{1,q}(I,\mathbb{R}^N)$ die Identität $\mathcal{F}(u) < \mathcal{F}(v)$ für alle $v \in \mathcal{C}(\alpha,\beta) \setminus \{u\}$.

Beweis. Man testet die schwache Euler-Lagrange-Gleichung

$$\int_I F_p(x,u'(x)) \cdot \varphi'(x)\,\mathrm{d}x = 0$$

mit $\varphi := u - v \in W_0^{1,q}(I,\mathbb{R}^N)$ und erhält mit der strikten Konvexität von $F(x,\cdot)$

$$\mathcal{F}(v) = \int_I F(x,v'(x))\,\mathrm{d}x > \int_I \Big[F(x,u'(x)) + F_p(x,u'(x)) \cdot (v'(x) - u'(x))\Big]\,\mathrm{d}x = \mathcal{F}(u).$$

□

Zur expliziten Bestimmung dieser eindeutigen Lösung können wir die indirekten Methoden des ersten Kapitels anwenden; denn wenn wir eine glatte Lösung in $\mathcal{C}(\alpha,\beta)$ finden, so ist dies die eindeutige Lösung. Für eine Lösung $u \in C^2(I)$ (oder auch nur $u \in C^1(I)$, vgl. Korollar 1.11) lautet die Euler-Lagrange-Gleichung

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x^\mu q|u'(x)|^{q-2}u'(x)\right) = 0 \quad \text{für alle } x \in I. \tag{ELG$_{3.2}$}$$

Es gibt also ein $c \in \mathbb{R}$ mit

$$q|u'(x)|^{q-2}u'(x) = cx^{-\mu} \quad \text{für alle } x \in I.$$

Mit einem noch zu bestimmenden Exponenten $t > 0$ machen wir den Ansatz

$$u(x) = a_1 x^t + a_2\,, \qquad \text{d.h.} \qquad u'(x) = a_1 t x^{t-1}$$

und

$$q|a_1|^{q-2}|t|^{q-2}x^{(q-2)(t-1)}a_1 t x^{t-1} = cx^{-\mu}.$$

Man folgert mit Exponentenvergleich $(q-1)(t-1) = (q-2)(t-1) + (t-1) = -\mu$, also

$$t = \frac{-\mu}{q-1} + 1 = \frac{-\mu + q - 1}{q-1} \geq 1.$$

Aus den Randbedingungen folgt

$$a_2 = u(0) = \alpha$$

und

$$a_1 + \alpha = u(1) = \beta,$$

also

$$u(x) = (\beta - \alpha)x^{\frac{q-1-\mu}{q-1}} + \alpha.$$

Als Ergebnis lässt sich festhalten:

$$u(x) = (\beta - \alpha)x^{\frac{q-1-\mu}{q-1}} + \alpha \quad \in \mathcal{C}(\alpha, \beta) \cap C^\infty((0,1]) \cap C^{l,\sigma}([0,1])$$

ist der gesuchte kritische Punkt und damit auch der gesuchte eindeutige Minimierer, da diese Funktion auch in $W^{1,q}((0,1))$ ist, also in dem Raum, in dem der Eindeutigkeitsbeweis geführt wurde. Die Parameter sind hier

$$1 \leq l := \left\lfloor \frac{q-1-\mu}{q-1} \right\rfloor \quad \text{und} \quad \sigma := \frac{q-1-\mu}{q-1} - l \in [0,1) \quad \text{da } \mu \leq 0.$$

Falls $\frac{q-1-\mu}{q-1} \in \mathbb{N}$, dann ist $u \in C^\infty(\mathbb{R})$, sogar reell analytisch, man schreibt dann $u \in C^\omega(\mathbb{R})$.

2. Fall: $\mu > 0$.

In diesem Fall lässt sich folgende Aussage zeigen: *Es gibt einen eindeutigen Minimierer $u \in W^{1,\tilde{q}}(I)$ für jedes $\tilde{q} \in (1, \frac{q}{\mu+1})$ mit den gegebenen Randwerten $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, wenn $\mu + 1 < q$ gilt. Falls $\alpha \neq \beta$ und $\mu + 1 \geq q > 1$, dann existiert kein Minimierer in $\mathcal{C}(\alpha, \beta)$.*

Beweis der Existenz für $\mu + 1 < q$: Satz 3.6 lässt sich nicht direkt anwenden, da es kein $c_0 > 0$ mit $F(x,p) \geq c_0|p|^q$ gibt, also die zweite Bedingung des Satzes verletzt wird. Diese Schwierigkeit kann aber folgendermaßen umgangen werden:

Sei $\tilde{q} \in (1, \frac{q}{\mu+1})$. Dann schätzt man mit der HÖLDER-Ungleichung ab

$$\begin{aligned}
\int_I |u'(x)|^{\tilde{q}}\,\mathrm{d}x &= \int_I |u'(x)|^{\tilde{q}} x^{\frac{\mu\tilde{q}}{q}} x^{-\frac{\mu\tilde{q}}{q}}\,\mathrm{d}x \\
&\leq \left(\int_I x^{\mu}|u'(x)|^q\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{\tilde{q}}{q}} \left(\int_I \left(x^{-\frac{\mu\tilde{q}}{q}}\right)^{\frac{q}{q-\tilde{q}}}\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{q-\tilde{q}}{q}} \\
&= \mathcal{F}_{\mu,q}(u)^{\frac{\tilde{q}}{q}} \left(\int_I x^{\frac{-\mu\tilde{q}}{q-\tilde{q}}}\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{q-\tilde{q}}{q}} \\
&= \mathcal{F}_{\mu,q}(u)^{\frac{\tilde{q}}{q}} \left(\frac{1}{1-\frac{\mu\tilde{q}}{q-\tilde{q}}}\right)^{\frac{q-\tilde{q}}{q}}.
\end{aligned}$$

Für Minimalfolgen

$$\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \widetilde{\mathcal{C}}(\alpha,\beta) := \{v \in W^{1,\tilde{q}}(I) : v(0) = \alpha,\, v(1) = \beta\}$$

gilt also

$$\|u_k'\|_{L^{\tilde{q}}(I)} \leq c\mathcal{F}_{\mu,q}(u_k)^{\frac{1}{q}} \xrightarrow{k\to\infty} c \inf_{\widetilde{\mathcal{C}}(\alpha,\beta)} \mathcal{F}_{\mu,q}^{\frac{1}{q}}.$$

Mit der POINCARÉ-Ungleichung folgt

$$\|u_k\|_{W^{1,\tilde{q}}(I)} \leq c,$$

und wegen $\tilde{q} \in (1,\infty)$ liefert der Satz A.10 im Anhang in Kombination mit Satz 2.15 eine Teilfolge $\{u_{k_i}\}_{k_i\in\mathbb{N}} \subset \{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ mit $u_{k_i} \rightharpoonup u$ in $W^{1,\tilde{q}}(I)$ und $u_{k_i} \to u$ in $C^0(\overline{I})$ für $i \to \infty$, womit $u \in \widetilde{\mathcal{C}}(\alpha,\beta)$ folgt. Mit der Unterhalbstetigkeit von $\mathcal{F}_{\mu,q}$ auch bezüglich der schwachen Konvergenz in $W^{1,\tilde{q}}(I)$ (vgl. Satz 3.5) ist u ein Minimierer in der Klasse $\widetilde{\mathcal{C}}(\alpha,\beta)$.

Die Eindeutigkeit folgt wie im ersten Fall aus der Konvexität von $F(x,\cdot)$ für $q > 1$, also ist der gefundene Minimierer der *einzige* kritische Punkt von $\mathcal{F}_{\mu,q}$. Die explizite Gestalt dieses kritischen Punktes ermittelt man mit dem gleichen Potenzansatz wie in Fall 1. Dann gilt wie dort

$$u(x) = (\beta-\alpha)x^{\frac{q-1-\mu}{q-1}} + \alpha,$$

allerdings ist diese Funktion zwar in $C^{\infty}((0,1])$, hat aber wegen $\mu > 0$ eine unbeschränkte erste Ableitung auf $(0,1]$. Glücklicherweise ist diese Funktion wegen der Wahl von $\tilde{q}$ aber in $W^{1,\tilde{q}}(I)$. Tatsächlich ist

$$|u'|^{\tilde{q}} = C(\alpha,\beta,\mu,q)|x|^{-\frac{\mu\tilde{q}}{q-1}},$$

und wegen $0 < \mu$ und $\tilde{q} < q/(\mu+1)$

$$\frac{\tilde{q}\mu}{q-1} < \frac{q}{\mu+1}\cdot\frac{\mu}{q-1},$$

und für die Integrabilität von $|u'|^{\tilde{q}}$ genügt damit der Nachweis, dass der letzte Bruch strikt kleiner als 1 ist. Das aber wiederum folgt wegen $\mu < q-1$ aus der allgemeineren Ungleichung

$$\frac{s}{s-1} < \frac{t}{t-1} \quad \text{für } s > t > 1,$$

welche gültig ist, da die Funktion $f(\tau) := \tau/(\tau-1)$ streng monoton fallend auf $(1,\infty)$ ist.

Wir bemerken, dass der Exponent $\tilde{q}$ und die Funktionenklasse $\widetilde{\mathcal{C}}(\alpha,\beta)$ nur aus technischen Gründen eingeführt wurden, um die Kompaktheit einer Minimalfolge in $\widetilde{\mathcal{C}}(\alpha,\beta)$ zu sichern. Bei der expliziten eindeutigen Lösung $u \in \widetilde{\mathcal{C}}(\alpha,\beta)$ taucht der Exponent $\tilde{q}$ nicht mehr auf.

Beweis der Nichtexistenz für $\alpha \neq \beta$ und $\mu + 1 \geq q > 1$.

Tatsächlich werden wir $\inf_{\mathcal{C}(\alpha,\beta)} \mathcal{F}_{\mu,q}(\cdot) = 0$ zeigen, aber für jedes $u \in \mathcal{C}(\alpha,\beta)$ mit $\mathcal{F}(u) = 0$ ist $u' = 0$ $\mathscr{L}^1$-fast überall auf $I = (0,1)$. Daraus würde nach Lemma 2.4 aber $u = konst.$ auf I folgen. Im Falle von $\alpha \neq \beta$ ist dies ein Widerspruch (vgl. das Weierstrass-Beispiel für $\mu = q = 2$).

Um zu beweisen, dass tatsächlich $\inf_{\mathcal{C}(\alpha,\beta)} \mathcal{F}_{\mu,q}(\cdot) = 0$, können wir ohne Einschränkung annehmen, dass $\mu + 1 = q$, d.h. es reicht, die kleinstmögliche x-Potenz μ zu betrachten; denn für $\sigma \geq \gamma > 0$ ist

$$0 \leq \mathcal{F}_{\sigma,q}(v) = \int_I x^\sigma |v'(x)|^q \,\mathrm{d}x \leq \int_I x^\gamma |v'(x)|^q \,\mathrm{d}x = \mathcal{F}_{\gamma,q}(v) \quad \forall v \in \mathcal{C}(\alpha,\beta)$$

und deswegen

$$0 \leq \inf_{\mathcal{C}(\alpha,\beta)} \mathcal{F}_{\sigma,q}(\cdot) \leq \inf_{\mathcal{C}(\alpha,\beta)} \mathcal{F}_{\gamma,q}(\cdot).$$

Wenn also für den kleinstmöglichen Wert $\mu = q-1$ die Beziehung $\inf_{\mathcal{C}(\alpha,\beta)} \mathcal{F}_{\mu,q} = 0$ gezeigt wird, dann folgt auch $\inf_{\mathcal{C}(\alpha,\beta)} \mathcal{F}_{\mu,q} = 0$ für alle größeren μ, oder anders ausgedrückt für $q \in (1, \mu+1]$.

Die Folge

$$u_\varepsilon(x) := (\beta-\alpha)\frac{\log(1+\frac{x}{\varepsilon})}{\log(1+\frac{1}{\varepsilon})} + \alpha \quad \in \mathcal{C}(\alpha,\beta) \cap C^1(\overline{I})$$

mit

$$u_\varepsilon'(x) = \frac{\beta-\alpha}{\log(1+\frac{1}{\varepsilon})} \cdot \frac{1}{1+\frac{x}{\varepsilon}} \cdot \frac{1}{\varepsilon} = \frac{\beta-\alpha}{(\varepsilon+x)\log(1+\frac{1}{\varepsilon})}$$

leistet wegen $\mu = q-1$ und $q > 1$ das Gewünschte:

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_{\mu,q}(u_\varepsilon) \quad &= \quad \frac{(\beta-\alpha)^q}{\log^q(1+\frac{1}{\varepsilon})} \int_0^1 x^{q-1} \frac{1}{(\varepsilon+x)^q} \,\mathrm{d}x \\
&= \quad \frac{(\beta-\alpha)^q}{\log^q(1+\frac{1}{\varepsilon})} \int_0^1 \left(\frac{x}{\varepsilon+x}\right)^{q-1} \frac{1}{\varepsilon+x} \,\mathrm{d}x \\
&\leq \quad \frac{(\beta-\alpha)^q}{\log^q(1+\frac{1}{\varepsilon})} \int_0^1 \frac{1}{\varepsilon+x} \,\mathrm{d}x \\
&= \quad \frac{(\beta-\alpha)^q}{\log^q(1+\frac{1}{\varepsilon})} (\log(\varepsilon+1) - \log\varepsilon) \\
&= \quad \frac{(\beta-\alpha)^q}{\log^q(1+\frac{1}{\varepsilon})} \log\frac{\varepsilon+1}{\varepsilon} \\
&= \quad \frac{(\beta-\alpha)^q}{\log^q(1+\frac{1}{\varepsilon})} \log(1+\frac{1}{\varepsilon}) \\
&= \quad \frac{(\beta-\alpha)^q}{\log^{q-1}(1+\frac{1}{\varepsilon})} \\
&\xrightarrow{\varepsilon \searrow 0} \quad 0.
\end{aligned}$$

Beispiel $\boxed{3.3}$
Wir betrachten für $I = (0,1)$ und $N = 1$ das Variationsproblem

$$\mathcal{F}(v) := \int_0^1 \Big((1 - |v'(x)|^2)^2 + v^2(x) \Big) \, \mathrm{d}x \longrightarrow \min!$$

in der Klasse

$$\mathcal{C}(0,0) := \{ v \in W^{1,4}(I) : v(0) = v(1) = 0 \}.$$

Der Integrand $F = F(z,p) = (1-p^2)^2 + z^2$ ist *nicht* konvex in p; denn

$$\begin{aligned} F_p(z,p) &= 2(1-p^2)(-2p) = -4(p - p^3), \\ F_{pp}(z,p) &= -4 + 12p^2 < 0 \qquad \text{für } \ |p| < \frac{1}{\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

Folglich ist der Existenzsatz, Satz 3.6, nicht anwendbar. Tatsächlich werden wir zeigen, dass das Minimierungsproblem in $\mathcal{C}(0,0)$ nicht lösbar ist.

Die Struktur des Integranden bevorzugt offensichtlich Lösungen u mit $u' = \pm 1$, dadurch besteht hier eine gewisse Analogie zur Eikonal-Gleichung $|\nabla u| = 1$. Solche Lösungstypen tauchen auch in den Materialwissenschaften unter dem Stichwort *Mikrostrukturen* auf, siehe z.B. [80, 81, 23] und dortige Referenzen.

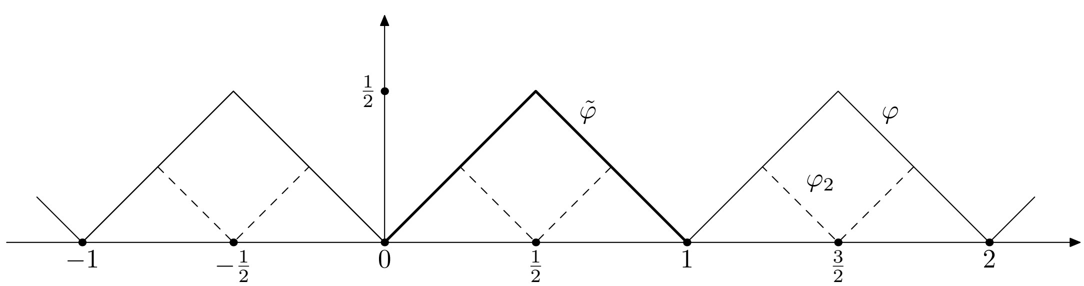

Abbildung 3.2: Zackenfunktion.

Sei nun

$$\tilde{\varphi}(x) := \frac{1}{2} - |x - \frac{1}{2}|\,, \quad x \in [0,1].$$

Dann ist $\tilde{\varphi}$ Lipschitzstetig, und $\varphi \in C^{0,1}(\mathbb{R}) \cong W^{1,\infty}(\mathbb{R})$ sei die periodische Fortsetzung von $\tilde{\varphi}$ auf $\mathbb{R}$, so dass $\tilde{\varphi}' = \pm 1$ und $\varphi' = \pm 1$ fast überall gilt. Wir setzen

$$\varphi_k(x) := \frac{1}{k} \varphi(kx) \qquad \text{für } \ k \in \mathbb{N}.$$

Dann ist $\varphi_k'(x) = \pm 1$ für $\mathscr{L}^1$-fast alle $x \in (0,1)$ und $\varphi_k(0) = \varphi_k(1) = 0$. Also ist $\{\varphi_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{C}(0,0) \cap W^{1,\infty}(I)$, und mit der Substitution $z = kx$ mit $\mathrm{d}z = k\,\mathrm{d}x$ und $z((0,1)) = (0,k)$

berechnet man

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\varphi_k) &= \int_0^1 \varphi_k^2(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{k^2}\int_0^1 \varphi^2(kx)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{k^2}\frac{1}{k}\int_0^k \varphi^2(z)\,\mathrm{d}z \\ &\underset{\varphi \text{ periodisch}}{=} \frac{1}{k^2}\int_0^1 \varphi^2(z)\,\mathrm{d}z \\ &\xrightarrow{k\to\infty} 0. \end{aligned}$$

Mit $\mathcal{F} \geq 0$ folgt $\inf_{\mathcal{C}(0,0)} \mathcal{F} = 0$. Für einen Minimierer $u \in \mathcal{C}(0,0)$ müsste also $\int_0^1 u^2(x)\,\mathrm{d}x$ verschwinden, d.h. $u = 0$ zunächst $\mathscr{L}^1$-fast überall in $(0,1)$, dann wegen $u \in W^{1,4}(I) \subset C^{0,1-\frac{1}{4}}(\overline{I})$ (nach Satz 2.15) auch $u = 0$ überall in $\overline{I}$. Dann ist aber auch $u' = 0$ auf $(0,1)$, was andererseits aber

$$\mathcal{F}(u) = \int_0^1 (1 - |u'(x)|^2)^2\,\mathrm{d}x = 1$$

impliziert, Widerspruch.

Beispiel $\boxed{3.4}$
Wir betrachten für $I = (0,1)$, $N = 1$ und gegebene Randwerte $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ das gegenüber Beispiel 3.3 leicht modifizierte Variationsproblem

$$\mathcal{F}(v) := \int_0^1 \Big((1 - |v'(x)|^2)^2 + v(x) \Big)\,\mathrm{d}x \longrightarrow \text{min!}$$

in der Klasse

$$\mathcal{C}(\alpha,\beta) := \{v \in W^{1,4}(I) : v(0) = \alpha,\ v(1) = \beta\} \neq \emptyset,$$

das nun allerdings lösbar ist, obwohl $F(z,\cdot)$ wie in Beispiel 3.3 nicht konvex in p ist. Satz 3.6 ist daher auf dieses Problem ebenfalls nicht anwendbar. Wir behelfen uns mit der *konvexen Einhüllenden* φ des Ausdrucks $f(p) := (1-p^2)^2$, also dem punktweisen Supremum aller in $p \in \mathbb{R}$ konvexen Funktionen, deren Werte noch unterhalb denen von $f(.)$ liegen. Hier ist diese Funktion explizit gegeben durch

$$\varphi(p) := \begin{cases} (1-p^2)^2 & \text{für } |p| > 1, \\ 0 & \text{für } |p| \leq 1. \end{cases}$$

Wir betrachten das neue Variationsproblem

$$\mathcal{G}(v) := \int_0^1 \big(\varphi(v'(x)) + v(x)\big)\ \mathrm{d}x \quad \longrightarrow \quad \text{min!} \quad \text{in} \quad \mathcal{C}(\alpha,\beta),$$

und bemerken, dass ähnlich wie in Beispiel 3.3 die Nulllösung $v \equiv 0$ für die Randdaten $\alpha = \beta = 0$ zwar den Funktionalwert 0 hat, damit aber kein Minimierer von $\mathcal{G}$ ist. Zum Beispiel die Zackenfunktion $\tilde{v}(x) := |x - \frac{1}{2}| - \frac{1}{2}$ hat Ableitungen ± 1 an allen Punkten $x \neq \frac{1}{2}$, so dass $\varphi(\tilde{v}'(x))$ für alle $x \neq \frac{1}{2}$ nach Definition von φ verschwindet. Nach Definition von $\tilde{v}$ folgt $\mathcal{G}(\tilde{v}) = -\frac{1}{4}$.

Für einen Existenzbeweis ist Satz 3.6 nicht direkt auf $\mathcal{G}$ anwendbar, da die Wachstumsbedingung (E2) nicht erfüllt ist. Aus der Abschätzung

$$(1-p^2)^2 = 1 - 2p^2 + p^4 > \frac{1}{2}p^4 \quad \text{für } p^2 > 4$$

folgt aber für beliebiges $v \in \mathcal{C}(\alpha,\beta) \neq \emptyset$ und $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned}
\int_0^1 |v'(x)|^4 \,\mathrm{d}x &= \int_{I\cap\{|v'|^2>4\}} |v'(x)|^4 \,\mathrm{d}x + \int_{I\cap\{|v'|^2\le 4\}} |v'(x)|^4 \,\mathrm{d}x \\
&< 2\int_{I\cap\{|v'|^2>4\}} (1-|v'(x)|^2)^2 \,\mathrm{d}x + 16\mathscr{L}^1(I) \\
&\le 2\mathcal{G}(v) - 2\int_I v(x)\,\mathrm{d}x + 16 \\
&\le 2\mathcal{G}(v) + 2(\mathscr{L}^1(I))^{1-\frac{1}{4}} \left(\int_I |v(x)|^4 \,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{4}} + 16 \qquad (\text{Hölder-Ungleichung}) \\
&\le 2\mathcal{G}(v) + c\|v'\|_{L^4(I)} + c \qquad (\text{Poincaré-Ungleichung}) \\
&\le 2\mathcal{G}(v) + c(\varepsilon) + \varepsilon\|v'\|^4_{L^4(I)} \qquad (\text{Young}\text{sche Ungleichung}).
\end{aligned}$$

Die Poincaré-Ungleichung ist hier anwendbar, da in der Funktionenklasse $\mathcal{C}(\alpha,\beta)$ die Randwerte vorgeschrieben sind; siehe Bemerkung auf Seite 68. Wir wählen nun $\varepsilon = \frac{1}{2}$ und erhalten

$$0 \le \frac{1}{2}\|v'\|^4_{L^4(I)} < 2\mathcal{G}(v) + c' \tag{3.7}$$

mit einer von v unabhängigen Konstanten c', so dass $\inf_{\mathcal{C}(\alpha,\beta)} \mathcal{G} \ge -c'/2 > -\infty$ ist. Sei nun $\{v_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ eine Minimalfolge für $\mathcal{G}$, d.h.

$$\mathcal{G}(v_k) \xrightarrow{k\to\infty} \inf_{\mathcal{C}(\alpha,\beta)} \mathcal{G}(\cdot) < \infty.$$

Dann ist die Zahlenfolge $\{|\mathcal{G}(v_k)|\} \subset \mathbb{R}$ beschränkt, somit wegen (3.7) auch $\|v_k'\|_{L^4(I)}$ und mit der Poincaré-Ungleichung folgt sofort, dass

$$\|v_k\|_{W^{1,4}(I)} \le c.$$

Nach Satz A.10 im Anhang und Satz 2.15 gibt es ein $u \in W^{1,4}(I)$ und eine Teilfolge $v_{k_i} \rightharpoonup u$ in $W^{1,4}(I)$ mit $v_{k_i} \xrightarrow{i\to\infty} u$ in $C^0(\overline{I})$ für $i \to \infty$. Nach Satz 3.5 ist $\mathcal{G}$ schwach unterhalbstetig[4], und daher ist

$$\mathcal{G}(u) = \inf_{\mathcal{C}(\alpha,\beta)} \mathcal{G}(\cdot), \tag{3.8}$$

denn $u \in \mathcal{C}(\alpha,\beta)$, da $\{v_{k_i}\}_{i\in\mathbb{N}}$ in $C^0(\overline{I})$ gegen u konvergiert. Mit Hilfe der ersten Variation und einer partiellen Integration lässt sich zeigen (vgl. Übungsaufgabe), dass

$$\int_I \big(\varphi'(u'(x)) - x\big)\,\eta'(x)\,\mathrm{d}x = 0$$

[4] Präziser gesagt besteht $\mathcal{G}$ aus einem wegen der Konvexität von $p \mapsto \varphi(p)$ nach Satz 3.5 schwach unterhalbstetigen und einem linearen also schwach stetigen Zusatzterm und ist deshalb schwach unterhalbstetig.

für alle $\eta \in C_0^\infty(I)$ gilt. Nach Lemma 1.10 gibt es also ein $c \in \mathbb{R}$ mit

$$\varphi'(u'(x)) - x = c \quad \text{für } \mathscr{L}^1\text{-fast alle } x \in I. \tag{3.9}$$

Da φ aber so gewählt war, dass $\varphi'(p) = 0$ für $|p| \leq 1$ gilt, muss $|u'| > 1$ $\mathscr{L}^1$-fast überall auf I sein[5]. Dann ist wegen $\varphi(p) + z \leq (1-p^2)^2 + z = F(z,p)$

$$\inf_{\mathcal{C}(\alpha,\beta)} \mathcal{F}(\cdot) \leq \mathcal{F}(u) = \int_I \big(\varphi(u'(x)) + u(x)\big)\,\mathrm{d}x = \mathcal{G}(u) = \inf_{\mathcal{C}(\alpha,\beta)} \mathcal{G}(\cdot) \leq \inf_{\mathcal{C}(\alpha,\beta)} \mathcal{F}(\cdot),$$

also

$$\mathcal{F}(u) = \inf_{\mathcal{C}(\alpha,\beta)} \mathcal{F}(\cdot).$$

Es bleibt noch die Eindeutigkeit des Minimierers zu zeigen. Nehmen wir an, es gebe ein $v \in \mathcal{C}(\alpha,\beta)$, $u \neq v$, mit $\mathcal{F}(v) = \inf_{\mathcal{C}(\alpha,\beta)} \mathcal{F}(\cdot)$. Dann ist

$$\inf_{\mathcal{C}(\alpha,\beta)} \mathcal{F}(\cdot) = \mathcal{F}(v) \geq \mathcal{G}(v) \geq \mathcal{G}(u) = \inf_{\mathcal{C}(\alpha,\beta)} \mathcal{G}(\cdot) = \mathcal{F}(u) = \inf_{\mathcal{C}(\alpha,\beta)} \mathcal{F}(\cdot),$$

und damit

$$\mathcal{G}(v) = \inf_{\mathcal{C}(\alpha,\beta)} \mathcal{G}(\cdot),$$

so dass wie zuvor aus der DuBois-Reymond-Gleichung (3.9) $|v'| > 1$ $\mathscr{L}^1$-fast überall auf I folgt. Da φ außerhalb von $[-1,+1]$ strikt konvex ist, gilt für $\lambda \in (0,1)$

$$\lambda\varphi(v'(x)) + (1-\lambda)\varphi(u'(x)) > \varphi(\lambda v'(x) + (1-\lambda)u'(x)) \tag{3.10}$$

für $\mathscr{L}^1$-fast alle $x \in I$ mit $v'(x) \neq u'(x)$. Das ist auch dann wahr, wenn $|\lambda v'(x) + (1-\lambda)u'(x)| \leq 1$, also diese Konvexkombination nicht im Bereich der strikten Konvexität von φ liegt, was z.B. nicht ohne Weiteres auszuschließen ist, wenn $u'(x) < -1$ und $v'(x) > 1$. Gäbe es dann tatsächlich ein $\lambda \in (0,1)$ mit Gleichheit in (3.10), dann würde wegen der Konvexität von φ auf $\mathbb{R}$ folgen, dass der Graph von φ auf dem Intervall $[u'(x), v'(y)]$ ein geradliniges Segment ist. Das widerspricht aber der strikten Konvexität von φ in einer offenen Umgebung des Punktes $u'(x) < -1$, da mit $\varphi'(p) = -4p + 4p^3$ die zweite Ableitung $\varphi''(p) = -4 + 12p^2 > 8$ erfüllt für alle $p < -1$.

Aus (3.10) folgt[6]

$$\begin{aligned}
\lambda\mathcal{G}(v) + (1-\lambda)\mathcal{G}(u) &= \lambda \int_I \varphi(v'(x))\,\mathrm{d}x + \lambda \int_I v(x)\,\mathrm{d}x \\
&\quad + (1-\lambda)\int_I \varphi(u'(x))\,\mathrm{d}x + (1-\lambda)\int_I u(x)\,\mathrm{d}x \\
&> \int_I \varphi(\lambda v'(x) + (1-\lambda)u'(x))\,\mathrm{d}x \\
&\quad + \int_I (\lambda v(x) + (1-\lambda)u(x))\,\mathrm{d}x \\
&= \mathcal{G}(\lambda v + (1-\lambda)u).
\end{aligned}$$

[5] Wäre $|u'| = 0$ auf einer Menge $E \subset I$ mit $\mathscr{L}^1(E) > 0$, dann wäre nach (3.9) und nach Definition von φ die Gleichung $0 = c + x$ für $\mathscr{L}^1$-fast alle $x \in E$ gültig. Damit könnte man schreiben $E = \{-c\} \cup N$ für eine Menge $N \subset I$ mit $\mathscr{L}^1(N) = 0$, so dass im Widerspruch zur Voraussetzung $\mathscr{L}^1(E) = 0$ folgen würde.

[6] Wäre $v'(x) = u'(x)$ für $\mathscr{L}^1$-fast alle $x \in I$, dann gäbe es nach Lemma 2.4 eine Konstante $c \in \mathbb{R}$, so dass $v(x) = u(x) + c$ für alle $x \in I$, woraus sofort $c = 0$ und damit $u = v$ im Widerspruch zur Voraussetzung folgt, da $v(a) = \alpha = u(a)$ ist.

Wählen wir nun $\lambda = \frac{1}{2}$, so folgt wie in Beispiel 3.2 wegen $\frac{1}{2}u + \frac{1}{2}v \in \mathcal{C}(\alpha, \beta)$ aus (3.8)

$$\mathcal{G}(u) = \frac{1}{2}(\mathcal{G}(u) + \mathcal{G}(v)) > \mathcal{G}(\frac{1}{2}u + \frac{1}{2}v) \underset{(3.8)}{\geq} \mathcal{G}(u).$$

Dies ist offensichtlich ein Widerspruch.

Dieses Beispiel mit dem Hilfsfunktional $\mathcal{G}$ zeigt gewisse Parallelen mit der erstmals von Morrey eingebrachten Idee allgemeiner *Dominanzfunktionen* für Integranden von geometrischen Variationsintegralen, vgl. [76, Chapter 9]. Die zugehörigen Hilfsfunktionale haben oft bessere Wachstumsbedingungen und Regularitätseigenschaften, die für Existenztheorie und Regularitätssätze benutzt werden können, vgl. z.B. [24, Chapter 4] für die Existenz von *Minimalflächen* und [55] für die Anwendung bei Cartan-Funktionalen.

Das folgende Beispiel ist die eindimensionale Variante einer typischen Problemstellung der *konformen Geometrie*, einem Teilgebiet der Differentialgeometrie. Hier erweist sich die Variationsrechnung als ein sehr nützliches Mittel zur Lösung. Weiterführende und grundlegende Arbeiten zu diesem Thema sind u.a. von Kazdan-Werner [60], Moser [77] für den Fall zweidimensionaler Mannigfaltigkeiten und von S.-Y. A. Chang, P. Young [9] Branson [5] oder Paneitz [84] für vier- und höherdimensionale Mannigfaltigkeiten erschienen, siehe auch die Referenzen in diesen Arbeiten und die Monographie von Chang [8]. Auch heute noch ist dieser Teilbereich der Differentialgeometrie ein Gebiet mit höchster Forschungsaktivität.

Beispiel $\boxed{3.5}$ [Vorgeschriebene Gauss-Krümmung in konformen Metriken]
Zur Motivation beschreiben wir kurz das Problem der vorgeschriebenen Gauss-Krümmung auf zweidimensionalen Mannigfaltigkeiten. Dazu betrachtet man eine zweidimensionale, orientierte, kompakte, geschlossene Mannigfaltigkeit $\mathscr{M}$ mit einer Riemannschen Metrik g_0, und man bezeichnet mit K_0 die Gausssche Krümmung von $\mathscr{M}$. Für $w \in C^2(\mathscr{M})$ ist dann $g := e^w g_0$ eine zu g_0 konforme Metrik.

Es stellt sich folgende Frage: *Gegeben sei eine Funktion $K : \mathscr{M} \to \mathbb{R}$. Gibt es ein $w : \mathscr{M} \to \mathbb{R}$, so dass $(\mathscr{M}, g)$ die Gausssche Krümmung K hat?*

Eine Lösung muss die *Gleichung vorgeschriebener* Gauss-*Krümmung*

$$\Delta_{g_0} w = K_0 - K e^w$$

erfüllen, wie man nachrechnen kann. Dies ist eine *partielle Differentialgleichung* mit einer exponentiellen Nichtlinearität, wobei der Hauptteil durch den Laplace-Beltrami-*Operator* Δ_{g_0} bezüglich der Riemannschen Metrik g_0 gegeben ist. Der Laplace-Beltrami-Operator hat Divergenzgestalt. Integrieren wir diese Differentialgleichung über $\mathscr{M}$, so erhalten wir deswegen mit dem Gaussschen Divergenzsatz und dem in der Differentialgeometrie behandelten Satz von Gauss-Bonnet

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\mathscr{M}} \Delta_{g_0} w \, \mathrm{d}v_0 \\ &= \int_{\mathscr{M}} K_0 \, \mathrm{d}v_0 - \int_{\mathscr{M}} K e^w \, \mathrm{d}v_0 \\ &= 2\pi \chi_{\mathscr{M}} - \int_{\mathscr{M}} K e^w \, \mathrm{d}v_0, \end{aligned}$$

wobei $\chi_{\mathscr{M}}$ die Euler-*Charakteristik*, also eine topologische Invariante der Mannigfaltigkeit $\mathscr{M}$ bezeichnet. Diese Identität liefert uns also eine für die Lösbarkeit des Problems *notwendige* Bedingung an die vorgegebene Funktion K, die die vorzuschreibende Gauss-Krümmung mit der Topologie der Mannigfaltigkeit verknüpft.

Im Folgenden beschränken wir uns der Einfachheit halber auf das *eindimensionale Modellproblem*

$$\begin{cases} w'' = K_0 - Ke^w & \text{in } I = (0,1) \\ w'(0) = w'(1) = 0, \end{cases}$$

bei dem wir auch notwendige Bedingungen für die Lösbarkeit des Problems beachten müssen. Diese Aufgabe lässt sich zunächst auf das Problem reduzieren, in dem K_0 konstant ist: Sei z die Lösung von

$$z'' = K_0 - \fint_I K_0(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{mit} \quad z'(0) = z'(1) = 0. \tag{3.11}$$

Falls w bekannt wäre, so kann $u := w - z$ definiert werden. Daraus resultiert nun zum einen $u'(0) = u'(1) = 0$ und außerdem

$$\begin{aligned} u'' &= w'' - z'' \\ &= K_0 - Ke^w - K_0 + \fint_I K_0(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \fint_I K_0(x)\,\mathrm{d}x - Ke^{u+z} \\ &= \fint_I K_0(x)\,\mathrm{d}x - Ke^z e^u. \end{aligned}$$

Das eigentliche Problem ist es also, die folgende Differentialgleichung zu lösen:

$$u'' = c - he^u \quad \text{mit} \quad u'(0) = u'(1) = 0, \tag{3.12}$$

wobei $c \in \mathbb{R}$ und $h \in C^0(\overline{I})$ gegeben sind. Hat man u als Lösung von (3.12) gefunden, dann ermittelt man z als Lösung von (3.11) durch einfache Integration und erhält durch $w := u + z$ die Lösung des ursprünglichen Problems.

$\boxed{\textbf{1. Fall: } c = 0.}$ Die Gleichung (3.12) vereinfacht sich zu

$$u'' = -he^u \quad \text{mit} \quad u'(0) = u'(1) = 0. \tag{3.13}$$

Der triviale Fall $h = 0$ führt sofort zu $u(x) = ax + b$ und wegen $a = u'(0) = 0$ zu $u(x) = b$ für alle $x \in \overline{I}$. Wir wollen also den Fall weiter untersuchen, in dem h nicht identisch verschwindet. Als erstes finden wir durch Integration die notwendige Bedingung

$$0 = u'(1) - u'(0) = -\int_0^1 h(x)e^{u(x)}\,\mathrm{d}x. \tag{3.14}$$

Das bedeutet, dass h in I mindestens einmal sein Vorzeichen wechseln muss. Weiterhin ergibt sich aus (3.13) durch Multiplikation mit der Funktion e^{-u} und nach partieller Integration

$$\begin{aligned} -\int_0^1 h(x)\,\mathrm{d}x &= \int_0^1 u''(x)e^{-u(x)}\,\mathrm{d}x \\ &= \underbrace{\Big[u'(x)e^{-u(x)}\Big]_0^1}_{=0} + \int_0^1 (u'(x))^2 e^{-u(x)}\,\mathrm{d}x > 0. \end{aligned} \tag{3.15}$$

Das letzte Integral ist strikt positiv, da sonst $u' \equiv 0$ und was den trivialen Fall $h \equiv 0$ impliziert.

Nun machen wir einen *Variationsansatz* zur Lösung von (3.13):

$$\mathcal{D}(v) := \frac{1}{2}\int_I |v'(x)|^2 \,\mathrm{d}x \longrightarrow \text{ min!}$$

in der Klasse

$$\mathcal{C}_{\mathrm{I}} := \{v \in W^{1,2}(I) : \int_0^1 v(x)\,\mathrm{d}x = 0, \int_0^1 h(x)e^{v(x)}\,\mathrm{d}x = 0\}.$$

Zur Motivation dieses Ansatzes bemerken wir, dass das Dirichlet-Integral mit der Euler-Lagrange-Gleichung den Hauptteil der Differentialgleichung (3.13) erzeugt, und die natürlichen Randbedingungen sind nach Proposition 1.12 genau $v'(0) = v'(1) = 0$. Da das Mittelwertintegral über v verschwindet, kann die Poincaré-Ungleichung 2.11 genutzt werden, so dass $\|v\|_{L^2(I)} \le c\|v'\|_{L^2(I)}$ für alle $v \in \mathcal{C}_{\mathrm{I}}$. Die Lagrange-Multiplikator-Regel in Verbindung mit der zweiten Nebenbedingung in der Klasse $\mathcal{C}_{\mathrm{I}}$ wird auf die richtige Form der Differentialgleichung (3.13) führen.

(i) $\mathcal{C}_{\mathrm{I}}$ **ist nicht die leere Menge.** Um zu zeigen, dass die Klasse $\mathcal{C}_{\mathrm{I}}$ nicht leer ist, konstruieren wir durch die Linearkombination zweier Funktionen ein $w \in W^{1,2}(I)$, das den Nebenbedingungen genügt. Dazu sei $v_1 \equiv 0$, so dass wegen der notwendigen Bedingung (3.15) an h gilt

$$\int_I h(x)e^{v_1(x)}\,\mathrm{d}x = \int_I h(x)\,\mathrm{d}x < 0.$$

Nun suchen wir ein $v_2 \in W^{1,2}(I)$, für welches $\int_I h(x)e^{v_2(x)}\,\mathrm{d}x > 0$ ist. Hierfür fixieren wir $x_0 \in I$ und $r \in \mathbb{R}$, so dass

$$B_r(x_0) \subset B_{2r}(x_0) \subset \{x \in I : h(x) > \frac{1}{2}\sup_I h(\cdot)\} \subset \{x \in I : h(x) > 0\},$$

was möglich ist, da h nach (3.14) irgendwo auf I positiv sein muss, und wählen ein $v_2 \in C_0^\infty(B_{2r}(x_0))$ mit

$$e^{v_2(x)} > \frac{2}{\sup_I h(\cdot)} \cdot \frac{\int_I |h(z)|\,\mathrm{d}z + 1}{\mathscr{L}^1(B_r(x_0))} \quad \forall\, x \in B_r(x_0).$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned}
\int_I h(x)e^{v_2(x)}\,\mathrm{d}x &= \int_{\{h\le 0\}} h(x)e^{v_2(x)}\,\mathrm{d}x + \underbrace{\int_{\{h>0\}\cap B_r(x_0)}}_{=B_r(x_0)} h(x)e^{v_2(x)}\,\mathrm{d}x \\
&\quad + \underbrace{\int_{\{h>0\}\setminus B_r(x_0)} h(x)e^{v_2(x)}\,\mathrm{d}x}_{>0} \\
&> \int_{\{h\le 0\}} h(x)\,\mathrm{d}x + \frac{2\mathscr{L}^1(B_r(x_0))}{\sup_I h(\cdot)}\frac{1}{2}\sup_I h(\cdot)\frac{\int_I |h(z)|\,\mathrm{d}z + 1}{\mathscr{L}^1(B_r(x_0))} \ge 1 > 0.
\end{aligned}$$

Wir definieren die stetige Funktion f durch

$$f(t) := \int_I h(x) e^{tv_1(x)+(1-t)v_2(x)}\,\mathrm{d}x \quad \text{für } t \in [0,1].$$

Es gilt also $f(0) > 0$ und $f(1) < 0$, so dass der Zwischenwertsatz garantiert, dass es ein $t^* \in [0,1]$ gibt mit $f(t^*) = 0$. Jetzt können wir setzen

$$\begin{aligned} w^* &:= t^* v_1 + (1-t^*) v_2 \in W^{1,2}(I) \quad \Rightarrow \quad \int_I h(x) e^{w^*(x)}\,\mathrm{d}x = 0, \\ w &:= w^* - ⨍_I w^*(x)\,\mathrm{d}x, \end{aligned}$$

wobei nun w auch die Nebenbedingungen erfüllt:

$$\int_I w(x)\,\mathrm{d}x = 0 \quad \text{und} \quad \int_I h(x) e^{w(x)}\,\mathrm{d}x = e^{-⨍_I w^*(y)\,\mathrm{d}y} \int_I h(x) e^{w^*(x)}\,\mathrm{d}x = 0,$$

also $w \in \mathcal{C}_{\mathrm{I}}$.

(ii) Existenz. Für eine Minimalfolge $\{v_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{C}_{\mathrm{I}}$,

$$\mathcal{D}(v_k) = \frac{1}{2} \int_I |v_k'(x)|^2\,\mathrm{d}x \xrightarrow{k\to\infty} \inf_{\mathcal{C}_{\mathrm{I}}} \mathcal{D}(\cdot) \in [0, \mathcal{D}(w)],$$

ergibt sich sofort, dass $\|v_k'\|_{L^2(I)}$ gleichmäßig beschränkt ist. Da $\int_I v_k(x)\,\mathrm{d}x = 0$, kann auch die POINCARÉ-Ungleichung, Lemma 2.11, angewandt werden, so dass $\|v_k\|_{W^{1,2}(I)}$ gleichmäßig beschränkt ist. Dann existiert nach Satz 2.15 eine Teilfolge $\{v_{k_i}\}$ und ein $v \in W^{1,2}(I)$ mit

$$\begin{aligned} v_{k_i} &\overset{i\to\infty}{\rightharpoonup} v \quad \text{in } W^{1,2}(I) \\ v_{k_i} &\xrightarrow{i\to\infty} v \quad \text{in } C^0(\overline{I}), \end{aligned}$$

so dass $v \in \mathcal{C}_{\mathrm{I}}$, denn[7]

$$\int_I h(x) e^{v(x)}\,\mathrm{d}x = \lim_{k\to\infty} \underbrace{\int_I h(x) e^{v_k(x)}\,\mathrm{d}x}_{=0} = 0$$

und natürlich auch

$$\int_I v(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{k\to\infty} \int_I v_k(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

Da aber $\mathcal{D}$ schwach unterhalbstetig in $W^{1,2}(I)$ ist, gilt schließlich $\mathcal{D}(v) = \inf_{\mathcal{C}_{\mathrm{I}}} \mathcal{D}(\cdot)$.

(iii) LAGRANGE-Multiplikatoren. Um die Nebenbedingungen

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_1(v) &:= \int_I v(x)\,\mathrm{d}x = 0, \\ \mathcal{G}_2(v) &:= \int_I h(x) e^{v(x)}\,\mathrm{d}x = 0 \end{aligned}$$

[7]Der Nachweis, dass diese hochgradig nichtlineare isoperimetrische Nebenbedingung für die Grenzfunktion v erfüllt ist, erfordert in höheren Dimensionen $n \geq 2$ erheblich mehr Aufwand, siehe z.B. [8, Chapter 2].

mit Hilfe der Regel der LAGRANGE-Multiplikatoren (Proposition 1.20 und zugehörige Übungsaufgaben) zu berücksichtigen, muss folgendes gelten:

$$\exists \psi_1, \psi_2 \in C^\infty(\overline{I}) : \ (\delta\mathcal{G}_i(v, \psi_j))_{i,j} \in \mathrm{GL}(2).$$

Wäre $\delta\mathcal{G}_2(v, \psi) = 0$ für alle $\psi \in C^\infty(\overline{I})$, dann bedeutete dies

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} \mathcal{G}_2(v + \varepsilon\psi) = \int_I h(x)\psi(x)e^{v(x)}\,\mathrm{d}x = 0 \quad \forall \psi \in C^\infty(\overline{I}).$$

Nach dem Fundamentallemma 1.5 folgt dann aber $h(x)e^{v(x)} = 0$ auf I, also $h \equiv 0$ auf I, was wir aber schon anfangs ausgeschlossen haben. Folglich gibt es mindestens ein $\psi \in C^\infty(\overline{I})$ mit $\delta\mathcal{G}_2(v, \psi) \neq 0$. Damit setzen wir

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}_2 &:= \frac{\psi}{\delta\mathcal{G}_2(v, \psi)} \quad \Rightarrow \quad \delta\mathcal{G}_2(v, \tilde{\psi}_2) = 1, \\ \psi_2 &:= \tilde{\psi}_2 - \fint_I \tilde{\psi}_2(x)\,\mathrm{d}x, \end{aligned}$$

und es folgt

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{G}_1(v, \psi_2) &= \int_I \tilde{\psi}_2(x) - \int_I \left(\fint_I \tilde{\psi}_2(y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = 0, \\ \delta\mathcal{G}_2(v, \psi_2) &= \int_I h(x) \left(\tilde{\psi}_2(x) - \fint_I \tilde{\psi}_2(y)\,\mathrm{d}y \right) e^{v(x)}\,\mathrm{d}x \\ &= \delta\mathcal{G}_2(v, \tilde{\psi}_2) - \left(\fint_I \tilde{\psi}_2(y)\,\mathrm{d}y \right) \underbrace{\int_I h(x)e^{v(x)}\,\mathrm{d}x}_{=0} = 1. \end{aligned}$$

Wählen wir nun noch ein $\psi_1 \in C^\infty(\overline{I})$ mit $\int_I \psi_1(x)\,\mathrm{d}x \neq 0$, also $\delta\mathcal{G}_1(v, \psi_1) \neq 0$, können wir die Matrix in der Form

$$(\delta\mathcal{G}_i(v, \psi_j))_{i,j} = \begin{pmatrix} \delta\mathcal{G}_1(v, \psi_1) & 0 \\ \delta\mathcal{G}_2(v, \psi_1) & 1 \end{pmatrix}$$

schreiben, aus der sofort ersichtlich ist, dass ihre Determinante nicht verschwindet.

Ähnlich wie in Proposition 1.20 zeigt man in einer Übungsaufgabe die Existenz von Zahlen $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ mit

$$\begin{aligned} & \delta\mathcal{D}(v, \varphi) + \lambda_1 \delta\mathcal{G}_1(v, \varphi) + \lambda_2 \delta\mathcal{G}_2(v, \varphi) = 0 \quad \forall\, \varphi \in C^\infty(\overline{I}) \qquad (3.16) \\ \Leftrightarrow \ & \int_I v'(x)\varphi'(x)\,\mathrm{d}x + \lambda_1 \int_I \varphi(x)\,\mathrm{d}x + \lambda_2 \int_I h(x)\varphi(x)e^{v(x)}\,\mathrm{d}x = 0 \quad \forall\, \varphi \in C^\infty(\overline{I}). \end{aligned}$$

Da wir aber eine starke Form der Differentialgleichung herleiten wollen, muss nun gezeigt werden, dass $v \in C^2(I)$. Dazu führen wir in der letzten Gleichung zwei partielle Integrationen aus:

$$\int_I \left[v'(x) - \lambda_1 x - \lambda_2 \int_0^x h(y)e^{v(y)}\,\mathrm{d}y \right] \varphi'(x)\,\mathrm{d}x = 0 \quad \forall\, \varphi \in C_0^\infty(I) \subset C^\infty(\overline{I}).$$

Nach dem Lemma von DuBois-Reymond, Lemma 1.10, gibt es ein $c_3 \in \mathbb{R}$, so dass

$$v'(x) - \lambda_1 x - \lambda_2 \int_0^x h(y) e^{v(y)} \, \mathrm{d}y = c_3 \quad \text{für } \mathscr{L}^1\text{-fast alle } x \in I; \tag{3.17}$$

hier stehen nun neben v' ausschließlich C^1-Funktionen von x, so dass auch v' selbst aus $C^1(\bar{I})$ sein muss, also $v \in C^2(\bar{I})$. Also haben wir (3.17) für alle $x \in \overline{I}$, und wir können in (3.17) differenzieren und erhalten die Euler-Lagrange-Gleichung

$$v''(x) - \lambda_1 - \lambda_2 h(x) e^{v(x)} = 0 \qquad \text{für alle } \ x \in \overline{I}. \tag{ELG$_{3.5_1}$}$$

(iv) Natürliche Randbedingungen. Da (3.16) für alle $\varphi \in C^\infty(\overline{I})$ gilt[8], können wir Proposition 1.12 anwenden und finden, dass das gestellte Variationsproblem wegen

$$\begin{aligned} F_p(0, v(0), v'(0)) + \lambda_1 G_{1\,p}(0, v(0), v'(0)) + \lambda_2 G_{2\,p}(0, v(0), v'(0)) &= 0, \\ F_p(1, v(1), v'(1)) + \lambda_1 G_{1\,p}(1, v(1), v'(1)) + \lambda_2 G_{2\,p}(1, v(1), v'(1)) &= 0 \end{aligned}$$

auch die Neumann-Randbedingungen

$$v'(0) = v'(1) = 0$$

liefert.

Um den Existenzbeweis für eine Lösung von (3.13) abzuschließen, betrachten wir jetzt noch die Lagrange-Multiplikatoren genauer. Aus (ELG$_{3.5_1}$) folgt durch Integration über $I = (0, 1)$:

$$\underbrace{v'(1) - v'(0)}_{=0} - \lambda_1 - \lambda_2 \underbrace{\int_I h(x) e^{v(x)} \, \mathrm{d}x}_{=0} = 0,$$

also $\lambda_1 = 0$. Multiplizieren wir (ELG$_{3.5_1}$) mit $e^{-v(x)}$ und integrieren abermals, so finden wir mit einer partiellen Integration

$$\begin{aligned} & \int_I v''(x) e^{-v(x)} \, \mathrm{d}x - \lambda_2 \int_I h(x) \, \mathrm{d}x = 0 \\ \Leftrightarrow \qquad & \underbrace{v'(x) e^{-v(x)} \Big|_0^1}_{=0} + \underbrace{\int_I (v'(x))^2 e^{-v(x)} \, \mathrm{d}x}_{>0} - \lambda_2 \underbrace{\int_I h(x) \, \mathrm{d}x}_{<0} = 0. \end{aligned}$$

Der erste Integralausdruck ist größer Null, da h nicht identisch verschwindet und damit lineare (und damit wegen der Randbedingungen konstante) Lösungen v bereits ausgeschlossen sind. Das zweite Integral ist nach (3.15) kleiner als Null. Also ist auch $\lambda_2 < 0$, und wir schreiben $\lambda_2 =: -e^\gamma$ und definieren $u := v + \gamma$. Dann folgt aus (ELG$_{3.5_1}$)

$$u'' = v'' = -e^\gamma h e^v = -h e^{v+\gamma} = -h e^u,$$

und natürlich gilt auch $u'(0) = u'(1) = 0$.

[8] Man beachte dabei, dass die Klasse $\mathcal{C}_\mathrm{I}$ neben den beiden isoperimetrischen Bedingungen keine Randbedingungen enthält, weswegen Störungen $\varphi \in C^\infty(\overline{I})$ zulässig sind. Dies hatten wir auch schon im Schritt (iii) genutzt, als wir die Funktionen $\psi_1, \psi_2 \in C^\infty(\overline{I})$ gewählt haben.

$\boxed{\textbf{2. Fall: } c = 1.}$ Auch für das Problem

$$u'' = 1 - he^u \quad \text{mit} \quad u'(0) = u'(1) = 0 \tag{3.18}$$

finden wir durch Integration eine notwendige Bedingung an h:

$$0 = 1 - \int_I h(x)e^{u(x)}\,\mathrm{d}x,$$

h muss also zumindest auf einem gewissen Teilintervall I_0 positiv sein. Speziell wissen wir damit, dass $h \equiv 0$ ausgeschlossen werden kann.

Der Variationsansatz lautet nun

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(u) &:= \mathcal{D}(u) + \int_I u(x)\,\mathrm{d}x \longrightarrow \text{min!} \quad \text{in der Klasse} \\ \mathcal{C}_{\mathrm{II}} &:= \{v \in W^{1,2}(I) : \int_I h(x)e^{v(x)}\,\mathrm{d}x = 1\}. \end{aligned}$$

(i) $\mathcal{C}_{\mathrm{II}}$ ist nicht die leere Menge. Wie im ersten Fall zeigt man, dass die Klasse nicht leer ist, da es ein v_2 gibt mit $\int_I h(x)e^{v_2(x)}\,\mathrm{d}x > 0$. Dann ist

$$\tilde{v}_2 := \log\left(\frac{1}{\int_I h(y)e^{v_2(y)}\,\mathrm{d}y}\right) + v_2 \quad \in \mathcal{C}_{\mathrm{II}}.$$

(ii) Beschränktheit. Sei $v \in \mathcal{C}_{\mathrm{II}}$ und $w := v - \int_I v(x)\,\mathrm{d}x$. Dann gilt $\int_I w(x)\,\mathrm{d}x = 0$ und $\mathcal{D}(v) = \mathcal{D}(w)$, und wir schreiben

$$1 = \int_I h(x)e^{v(x)}\,\mathrm{d}x = \int_I h(x)e^{\int_I v(y)\,\mathrm{d}y + w(x)}\,\mathrm{d}x = e^{\int_I v(y)\,\mathrm{d}y}\int_I h(x)e^{w(x)}\,\mathrm{d}x,$$

so dass

$$e^{\int_I v(y)\,\mathrm{d}y} = \left[\int_I h(x)e^{w(x)}\,\mathrm{d}x\right]^{-1}$$

beziehungsweise

$$\int_I v(y)\,\mathrm{d}y = -\log\left[\int_I h(x)e^{w(x)}\,\mathrm{d}x\right].$$

Das Funktional $\mathcal{F}$ lässt sich also auch folgendermaßsen schreiben:

$$\mathcal{F}(v) = \mathcal{D}(v) - \log\left[\int_I h(x)e^{w(x)}\,\mathrm{d}x\right].$$

Um zu untersuchen, ob $\mathcal{F}$ nach unten beschränkt ist, gilt es nun zwei Fälle zu unterscheiden. Ist das Argument des Logarithmus kleiner oder gleich eins, so ist $\mathcal{F}(v) \geq \mathcal{D}(v) \geq 0$.

Falls aber $\int_I h(x)e^{w(x)}\,\mathrm{d}x > 1$, so können wir mit Hilfe von Satz 2.15 und der Poincaré-Ungleichung abschätzen, da $\mathscr{L}^1(I)^{-1}\int_I w(x)\,\mathrm{d}x = 0$:

$$\|w\|_{C^0(\bar{I})} \leq c'\|w\|_{W^{1,2}(I)} \leq c''\|w'\|_{L^2(I)} \leq c\|v'\|_{L^2(I)}.$$

Es ist also $\|he^w\|_{C^0(\bar{I})} \leq \|h\|_{C^0(\bar{I})} e^{c\|v'\|_{L^2(I)}}$, so dass für beliebiges $v \in \mathcal{C}_{\mathrm{II}}$

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(v) &\geq \mathcal{D}(v) - |\log\|h\|_{C^0(\bar{I})}| - c\|v'\|_{L^2(I)} \\
&\geq \mathcal{D}(v) - |\log\|h\|_{C^0(\bar{I})}| - c(\varepsilon) - \varepsilon\|v'\|^2_{L^2(I)} \\
&\geq \frac{1}{4}\|v'\|^2_{L^2(I)} - \tilde{c},
\end{aligned} \tag{3.19}$$

wobei im zweiten Schritt die YOUNGsche Ungleichung benutzt und im dritten $\varepsilon := 1/4$ gesetzt wurde.

Insgesamt folgt also

$$\inf_{\mathcal{C}_{\mathrm{II}}} \mathcal{F}(\cdot) \in [-\tilde{c}\,,\, \mathcal{F}(\tilde{v}_2)].$$

(iii) Existenz. Wir können nun eine Minimalfolge $\{v_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ wählen mit $\mathcal{F}(v_k) \xrightarrow{k\to\infty} \inf_{\mathcal{C}_{\mathrm{II}}} \mathcal{F}(\cdot)$ und sehen aufgrund der Abschätzung (3.19), dass $\|v_k'\|_{L^2(I)} \leq c$ unabhängig von k ist. Um auch die gleichmäßige Beschränktheit von $\|v_k\|_{L^2(I)}$ und somit von $\|v_k\|_{W^{1,2}(I)}$ einzusehen, schätzen wir für beliebiges $x \in I = (0,1)$ ab:

$$\begin{aligned}
|v_k(x)| &= |v_k(x) - \fint_I v_k(y)\,\mathrm{d}y + \int_I v_k(y)\,\mathrm{d}y| \\
&= |v_k(x) - \fint_I v_k(y)\,\mathrm{d}y + \mathcal{F}(v_k) - \mathcal{D}(v_k)| \\
&\leq |v_k(x) - \fint_I v_k(y)\,\mathrm{d}y| + \underbrace{|\mathcal{F}(v_k)|}_{\leq c} + \underbrace{|\mathcal{D}(v_k)|}_{\leq c}.
\end{aligned}$$

Auf den ersten Summanden können wir die POINCARÉ-Ungleichung, Korollar 2.11, anwenden, so dass

$$\begin{aligned}
\int_I |v_k(x)|^2\,\mathrm{d}x &\leq c\int_I \Big|v_k(x) - \fint_I v_k(y)\,\mathrm{d}y\Big|^2\,\mathrm{d}x + c \\
&\leq c\int_I |v_k'(x)|^2\,\mathrm{d}x + c\,,
\end{aligned}$$

womit $\|v_k\|_{W^{1,2}(I)} \leq c$ unabhängig von k folgt. Nach Satz 2.15, Satz A.10 und dem Satz von ARZELÀ-ASCOLI gibt es also eine Teilfolge $\{v_{k_i}\}_{i\in\mathbb{N}}$ und ein $v \in W^{1,2}(I)$ mit

$$\begin{aligned}
v_{k_i} &\overset{i\to\infty}{\rightharpoonup} v \quad \text{in } W^{1,2}(I), \\
v_{k_i} &\xrightarrow{i\to\infty} v \quad \text{in } C^0(\bar{I}),
\end{aligned}$$

wobei auch $v \in \mathcal{C}_{\mathrm{II}}$, da $\int_I h(x)e^{v(x)}\,\mathrm{d}x = \lim_{i\to\infty}\int_I h(x)e^{v_{k_i}(x)}\,\mathrm{d}x = 1$.

Nun ist $\mathcal{D}$ schwach unterhalbstetig und $\int_I u(x)\,\mathrm{d}x$ sogar schwach stetig in $W^{1,2}(I)$, so dass $\mathcal{F}$ schwach unterhalbstetig ist. Folglich gilt

$$\mathcal{F}(v) = \inf_{\mathcal{C}_{\mathrm{II}}} \mathcal{F}(\cdot).$$

(iv) Lagrange-Multiplikator. Ähnlich wie in Proposition 1.20 und in einer Übungsaufgabe können wir auf die Existenz eines Lagrange-Multiplikators $\lambda \in \mathbb{R}$ mit

$$\delta\mathcal{F}(v,\varphi) + \lambda\delta\mathcal{G}(v,\varphi) = 0 \quad \forall\, \varphi \in C^\infty(\bar{I})$$

schließen, wobei $\mathcal{G}(u) := \int_I G(x,u(x),u'(x))\,\mathrm{d}x := \int_I h(x)e^{u(x)}\,\mathrm{d}x$. Dazu ist ähnlich wie im ersten Fall zu zeigen, dass es ein $\psi \in C^\infty(\bar{I})$ gibt, so dass $\delta\mathcal{G}(v,\psi) \neq 0$, was in diesem Fall wegen $h \not\equiv 0$ möglich ist. Außerdem ergibt sich aus Regularitätsbetrachtungen wie im ersten Fall, dass $v \in C^2(\bar{I})$, so dass wir wegen

$$F_z(x,z,p) = 1\,, \quad F_p(x,z,p) = p\,, \quad G_z(x,z,p) = h(x)e^z\,, \quad G_p(x,z,p) = 0$$

die Euler-Lagrange-Gleichung in ihrer starken Form erhalten:

$$v'' - 1 - \lambda h e^v = 0. \tag{ELG$_{3.5_2}$}$$

(v) Natürliche Randbedingungen. Wir wenden nun erneut Proposition 1.12 an und finden so die natürlichen Randbedingungen

$$v'(0) = v'(1) = 0$$

des Variationsproblems. Durch Integration von (ELG$_{3.5_2}$) über $I = (0,1)$ ergibt sich

$$0 = v'(1) - v'(0) - 1 - \lambda \int_I h(x)e^{v(x)}\,\mathrm{d}x = -1 - \lambda \int_I h(x)e^{v(x)}\,\mathrm{d}x = -1 - \lambda,$$

also $\lambda = -1$, womit v die gegebene Differentialgleichung (3.18) löst:

$$v'' = 1 - he^v \quad \text{mit} \quad v'(0) = v'(1) = 0.$$

3. Fall: $c = -1$. Zu lösen ist das Problem

$$u'' = -1 - he^u \quad \text{mit} \quad u'(0) = u'(1) = 0.$$

Auch hier gilt $h \not\equiv 0$, da sonst $u'(x) = -x + d$, was wegen $0 = u'(0)$ zunächst auf $d = 0$ führt, woraus aber wegen $0 = u'(1) = -1 + d$ ein Widerspruch folgt. Durch Multiplikation mit e^{-u} und anschließender Integration werden wir auch hier auf eine notwendige Bedingung an h geführt (für den Fall, dass h nicht identisch verschwindet), denn es gilt

$$0 < \int_I (u'(x))^2 e^{-u(x)}\,\mathrm{d}x + \int_I e^{-u(x)}\,\mathrm{d}x = -\int_I h(x)\,\mathrm{d}x.$$

Jedoch lässt sich das Problem nach bisherigem Erkenntnisstand nicht mit einem Variationsansatz lösen. Stattdessen führt die Perronsche Methode zum Erfolg, siehe [60, Section 9].

Bemerkung:
Die direkte Methode der Variationsrechnung erfordert im Allgemeinen, dass man das Minimierungsproblem auf größere Funktionenräume ausdehnen muss, etwa von C^1 auf den SOBOLEVraum $W^{1,q}$ für einen geeigneten, dem Variationsintegral angepassten Integrabilitätskoeffizienten q. Damit ist aber nicht ausgeschlossen, dass das Infimum über dieser größeren Funktionenklasse *echt* kleiner ist als das Infimum über dem klassischen Funktionenraum, in dem man eigentlich die Lösung sucht. Dieser Effekt heißt LAVRENTIEV-Phänomen und kann tatsächlich eintreten, wie das folgende Beispiel von MANIÀ zeigt. Das LAVRENTIEV-Phänomen kann sogar dann auftreten, wenn man eine polynomiale Schranke in p von unten für den Integranden hat, wie wir beispielsweise in Proposition 4.7 sehen werden. Polynomiales Wachstum in p nach oben verhindert das LAVRENTIEV-Phänomen, was wir in Satz 3.8 beweisen werden.

Beispiel $\boxed{3.6}$ [Manià [69]]
Die Funktion

$$x \mapsto u(x) := x^{1/3} \in \mathcal{C}(0,1) := \{v \in W^{1,1}((0,1)) : v(0) = 0,\, v(1) = 1\}$$

genügt der Identität

$$\mathcal{F}(u) = 0 = \inf_{\mathcal{C}(0,1)} \mathcal{F}$$

für

$$\mathcal{F}(v) := \int_0^1 ((v(x))^3 - x)^2 (v'(x))^6 \,\mathrm{d}x, \quad v \in \mathcal{C}(0,1).$$

Andererseits kann man zeigen (siehe z.B. [7, Chapter 4.3]), dass es eine Konstante $\sigma > 0$ gibt, so dass $\mathcal{F}(w) \geq \sigma$ für alle $w \in C^1([0,1]) \cap \mathcal{C}(0,1)$.

Lemma 3.7
Sei $q \in [1,\infty)$ und

(i) $F \in C^0(\overline{I} \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N)$ *(oder alternativ F eine* CARATHÉODORY*-Funktion).*

(ii) *Es gebe $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ mit $0 < c_1, 0 \leq c_2$, so dass*

$$|F(x,z,p)| \leq c_1 |p|^q + c_2 \quad \forall\ (x,z,p) \in \overline{I} \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N.$$

Falls dann eine Folge $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset W^{1,q}(I,\mathbb{R}^N)$ gegen $u \in W^{1,q}(I,\mathbb{R}^N)$ konvergiert, $u_k \xrightarrow{k\to\infty} u$, so gilt auch

$$\mathcal{F}(u_k) \xrightarrow{k\to\infty} \mathcal{F}(u),$$

d.h. $\mathcal{F}$ ist stetig bezüglich der (starken) $W^{1,q}$-Topologie.

Beweis. Wir wählen eine Teilfolge mit

$$\begin{aligned} u_{k_i} &\xrightarrow{i\to\infty} u && \mathscr{L}^1\text{-fast überall in } I, \\ u'_{k_i} &\xrightarrow{i\to\infty} u' && \mathscr{L}^1\text{-fast überall in } I, \end{aligned}$$

so dass wegen der Stetigkeit von $F(x,\cdot,\cdot)$

$$F(x, u_{k_i}(x), u'_{k_i}(x)) \xrightarrow{i\to\infty} F(x,u(x),u'(x)) \quad \text{für } \mathscr{L}^1\text{-fast alle } x \in I. \tag{3.20}$$

Nun lässt sich die Wachstumsbedingung (ii) anwenden, um zu schließen, dass mit dem Konvergenzsatz von Vitali [3, Satz 1.21] wegen $u'_{k_i} \to u'$ in $L^q(I,\mathbb{R}^N)$ für $i \to \infty$

$$\sup_{i\in\mathbb{N}} \int_E |F(x,u_{k_i}(x),u'_{k_i}(x))|\,dx \quad\le\quad \sup_{i\in\mathbb{N}} \int_E \Big[c_1|u'_{k_i}(x)|^q + c_2\Big]\,dx \to 0 \text{ für } \; E \subset I, \mathscr{L}^1(E) \to 0.$$

Zusammen mit (3.20) ergibt dies wieder mit dem Satz von Vitali, dass $F(\cdot,u_{k_i}(\cdot),u'_{k_i}(\cdot)) \to F(\cdot,u(\cdot),u'(\cdot))$ in $L^1(I)$ für $i \to \infty$, und es folgt mit dem Teilfolgenprinzip für die ganze Folge $\{u_k\}$

$$\mathcal{F}(u_k) \xrightarrow{k\to\infty} \mathcal{F}(u).$$

$\square$

Satz 3.8 [Ausschluss des Lavrentiev-Phänomens]
Sei $q \in (1,\infty)$ und

(i) $F, F_p \in C^0(\overline{I} \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N)$.

(ii) *F weise ein* polynomiales Wachstum *auf, d. h. es gebe Konstanten $c_0,c_1,c_2,c_3 \in \mathbb{R}$ mit $0 < c_0 \le c_1,\; 0 \le c_2, c_3$, so dass*

$$c_0|p|^q - c_3 \le F(x,z,p) \le c_1|p|^q + c_2 \quad \forall\ (x,z,p) \in \overline{I} \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N.$$

(iii) *$F(x,z,\cdot)$ sei konvex (in p).*

Dann gibt es für alle $u \in W^{1,q}(I,\mathbb{R}^N)$ eine Folge $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset C^\infty(\overline{I},\mathbb{R}^N)$ mit $u_k(a) = u(a), u_k(b) = u(b)$ für alle k, so dass

$$\|u_k - u\|_{W^{1,q}(I,\mathbb{R}^N)} \xrightarrow{k\to\infty} 0 \quad \text{und} \quad \mathcal{F}(u_k) \xrightarrow{k\to\infty} \mathcal{F}(u).$$

Außerdem stimmt $\mathcal{F}$ mit seiner Relaxation *überein, d.h. es gilt*

$$\mathcal{F}(u) = \inf\,\{\liminf_{k\to\infty} \mathcal{F}(v_k) : v_k \in C^1(\overline{I},\mathbb{R}^N), v_k(a) = u(a), v_k(b) = u(b), v_k \overset{k\to\infty}{\rightharpoonup} u \text{ in } W^{1,q}\},$$

und schließlich für $\alpha,\beta \in \mathbb{R}^N$ und $\mathcal{C}(\alpha,\beta) := \{w \in W^{1,q}(I,\mathbb{R}^N) : w(a) = \alpha,\, w(b) = \beta\}$

$$\inf_{\mathcal{C}(\alpha,\beta)} \mathcal{F}(\cdot) = \inf\,\{\mathcal{F}(v) : v \in C^1(\overline{I},\mathbb{R}^N), v(a) = \alpha, v(b) = \beta\}.$$

Bemerkung:
Das Infimum auf der linken Seite der letzten Identität wird aufgrund von Satz 3.6 angenommen. Falls man zeigen kann, dass der zugehörige Minimierer von der Klasse $C^1(\overline{I},\mathbb{R}^N)$ ist, dann weiß man auch, dass das Infimum auf der rechten Seite angenommen wird. Dies ist also eine Fragestellung der Regularitätstheorie, die wir in Kapitel 4 behandeln.

Beweis. Für die Approximation von u betrachtet man die Funktion $\tilde{u} := u - l$, wobei l linear ist mit $l(a) = u(a), l(b) = u(b)$. Nach dem Resultat einer Übungsaufgabe ist $\tilde{u} \in W_0^{1,q}(I,\mathbb{R}^N)$ und wird demnach nach Definition 2.3 (i) durch eine Folge $\{\tilde{u}_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset C_0^\infty(I,\mathbb{R}^N)$ bezüglich der $W^{1,q}$-Norm approximiert. Die Funktionen $u_k := \tilde{u}_k + l \in C^\infty(\overline{I},\mathbb{R}^N)$ bilden dann eine

Folge mit den vorgegebenen Randwerten und den gewünschten Konvergenzeigenschaften[9]. Lemma 3.7 liefert wegen der starken Konvergenz in $W^{1,q}(I,\mathbb{R}^N)$ dann $\mathcal{F}(u_k) \xrightarrow{k\to\infty} \mathcal{F}(u)$. Die Ungleichung

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(u) &= \lim_{k\to\infty} \mathcal{F}(u_k) = \liminf_{k\to\infty} \mathcal{F}(u_k)\\ &\geq \inf \{\liminf_{k\to\infty} \mathcal{F}(v_k) : v_k \in C^1(\overline{I},\mathbb{R}^N), v_k(a) = u(a), v_k(b) = u(b), v_k \overset{k\to\infty}{\rightharpoonup} u\}\end{aligned}$$

folgt damit sofort, da stark konvergente Folgen auch schwach konvergent sind, vgl. Lemma A.8 im Anhang.

Umgekehrt sind die Voraussetzungen von Satz 3.5 erfüllt, so dass $\mathcal{F}$ schwach unterhalbstetig ist, d.h.

$$\mathcal{F}(u) \leq \liminf_{k\to\infty} \mathcal{F}(\tilde{v}_k) \quad \text{für alle } \{\tilde{v}_k\}_{k\in\mathbb{N}} \text{ mit } \tilde{v}_k \overset{k\to\infty}{\rightharpoonup} u \text{ in } W^{1,q}(I,\mathbb{R}^N).$$

Daher gilt auch

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(u) &\leq \inf \{\liminf_{k\to\infty} \mathcal{F}(\tilde{v}_k) : \tilde{v}_k \overset{k\to\infty}{\rightharpoonup} u \text{ in } W^{1,q}(I,\mathbb{R}^N)\}\\ &\leq \inf \{\liminf_{k\to\infty} \mathcal{F}(\tilde{v}_k) : \tilde{v}_k \in C^1(\overline{I},\mathbb{R}^N), \tilde{v}_k(a) = u(a), \tilde{v}_k(b) = u(b), \tilde{v}_k \rightharpoonup u \text{ in } W^{1,q}(I,\mathbb{R}^N)\}.\end{aligned}$$

Schließlich gibt es nach Satz 3.6 ein $u \in \mathcal{C}(\alpha,\beta)$ mit $\mathcal{F}(u) = \inf_{\mathcal{C}(\alpha,\beta)} \mathcal{F}(\cdot)$, und nach dem schon bewiesenen Teil existiert eine Folge $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset C^1(\overline{I},\mathbb{R}^N)$ mit $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{C}(\alpha,\beta)$ und $u_k \xrightarrow{k\to\infty} u$ in $W^{1,q}(I,\mathbb{R}^N)$, für welche nach Lemma 3.7 auch $\mathcal{F}(u_k) \xrightarrow{k\to\infty} \mathcal{F}(u)$ gilt. Durch die Abschätzung

$$\begin{aligned}\inf_{\mathcal{C}(\alpha,\beta)} \mathcal{F}(\cdot) = \mathcal{F}(u) &= \lim_{k\to\infty} \mathcal{F}(u_k)\\ &\geq \inf \{\mathcal{F}(v) : v \in C^1(\overline{I},\mathbb{R}^N), v(a) = \alpha, v(b) = \beta\} \geq \inf_{\mathcal{C}(\alpha,\beta)} \mathcal{F}(\cdot)\end{aligned}$$

ergibt sich

$$\inf_{\mathcal{C}(\alpha,\beta)} \mathcal{F}(\cdot) = \inf \{\mathcal{F}(v) : v \in C^1(\overline{I},\mathbb{R}^N), v(a) = \alpha, v(b) = \beta\}.$$

□

Unter gewissen Umständen kann die schwache Konvergenz (z.B. von Minimalfolgen) zusammen mit der Konvergenz der Werte des Funktionals die starke Konvergenz implizieren.

Proposition 3.9 [Reshetnyak]
Sei $q \in (1,\infty)$ und

(i) $F, F_p \in C^0(\overline{I} \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N)$.

(ii) *Es gebe $c_0, c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$ mit $0 < c_0 \leq c_1, 0 \leq c_2, c_3$, so dass*

$$c_0|p|^q - c_3 \leq F(x,z,p) \leq c_1|p|^q + c_2 \quad \forall\ (x,z,p) \in \overline{I} \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N.$$

[9] Mit diesem Argument haben wir auch einen Alternative zur zweiten Bemerkung nach dem Hebbarkeitsresultat Lemma 2.17, um Sobolevfunktionen global durch glatte Funktionen zu approximieren, ohne die Funktion zuvor fortzusetzen. In höheren Dimensionen ist das allerdings nicht so einfach möglich.

(iii) *Es gebe ein* $\mu_0 > 0$, *so dass* $p \mapsto F(x,z,p) - \mu_0|p|^q$ *konvex ist.*

Dann gilt für alle Folgen $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ *mit* $u_k \overset{k\to\infty}{\rightharpoonup} u$ *in* $W^{1,q}(I,\mathbb{R}^N)$ *und* $\mathcal{F}(u_k) \xrightarrow{k\to\infty} \mathcal{F}(u)$, *dass diese Folgen auch stark konvergieren:*

$$u_k \xrightarrow{k\to\infty} u \text{ in } W^{1,q}(I,\mathbb{R}^N).$$

Die obere Schranke in Voraussetzung (ii) ist nicht nötig, wenn man der Konvention folgt, dass die vorausgesetzte Konvergenz $\mathcal{F}(u_k) \to \mathcal{F}(u)$ insbesondere beinhaltet, dass alle dort auftretenden Werte des Funktionals wohldefiniert und endlich sind. Y.G. Reshetnyak konnte das Resultat ohne Voraussetzung (iii) beweisen [89], der Einfachheit halber haben wir aber diese Bedingung einer *gleichmäßig strikten Konvexität* hier eingefügt. Doch vor dem Beweis betrachten wir

Beispiel $\boxed{3.7}$
Vergleichbare Voraussetzungen wie in Proposition 3.9 führen für *parametrische Variationsprobleme* für Flächen im $\mathbb{R}^3$ zur Existenz konformer Lösungen, wobei man beim Existenzbeweis ausnutzt, dass schwach konvergente Folgen mit speziellen Eigenschaften tatsächlich auch stark konvergieren. Zur Erläuterung unternehmen wir nun einen kurzen Ausflug in die Flächentheorie. Sei also $u \in W^{1,2}(B,\mathbb{R}^3)$ die Parametrisierung einer Fläche über der Einheitskreisscheibe $B := B_1(0) \subset \mathbb{R}^2$. Man betrachtet dann sogenannte *parametrische Funktionale* oder Cartan-*Funktionale*

$$\mathcal{F}_B(u) := \int_B F(u(x), u_{x^1}(x) \wedge u_{x^2}(x))\, \mathrm{d}x^1\, \mathrm{d}x^2$$

mit

$$F(z,t\nu) = tF(x,\nu) \quad \text{für alle } t>0,\ z\in\mathbb{R}^3,\ \nu\in\mathbb{R}^3. \tag{3.21}$$

Wegen der Bedingung (3.21) an F folgt (siehe z.B. [76, Ch. 9.1] und vgl. mit der zugehörigen Übungsaufgabe)

$$\mathcal{F}_B(u) = \mathcal{F}_\Omega(u\circ\tau) \quad \text{für alle } C^1\text{-Diffeomorphismen } \tau : \Omega \longrightarrow B\,.$$

Man betrachtet das Variationsproblem

$$\mathcal{F}_B(u) \longrightarrow \text{min!} \quad \text{in der Klasse} \quad \mathcal{C}(\Gamma) := \{u \in W^{1,2}(B,\mathbb{R}^3) \cap C^0(\partial B,\mathbb{R}^3) : u(\partial B) = \Gamma\},$$

wobei Γ eine vorgegebene geschlossene Jordankurve in $\mathbb{R}^3$ ist. Für den Fall, dass $F = F(z) = |z|$ gilt, ist $\mathcal{F} = \mathcal{A}$ mit $\mathcal{A}(u) := \int_B |u_{x^1} \wedge u_{x^2}|\, \mathrm{d}x^1\, \mathrm{d}x^2$, das klassische *Flächenfunktional.*

Die Idee zur Lösung des allgemeinen Falls ist es nun, vorerst zu versuchen, das Funktional $\mathcal{F}^\varepsilon := \mathcal{F} + \varepsilon\mathcal{D}$ zu minimieren, und dann später den Grenzwert $\varepsilon \to 0$ zu bilden. Hierbei bezeichnet $\mathcal{D}$ wie schon im eindimensionalen Fall das Dirichlet-*Integral* (vgl. z.B. mit der zugehörigen Übungsaufgabe)

$$\mathcal{D}(u) := \mathcal{D}_B(u) := \int_B |\nabla u(x)|^2\, \mathrm{d}x^1\, \mathrm{d}x^2.$$

Dabei zeigt sich, dass es $u^\varepsilon \in \mathcal{C}(\Gamma)$ gibt mit $\mathcal{F}^\varepsilon(u^\varepsilon) = \inf_{\mathcal{C}(\Gamma)} \mathcal{F}^\varepsilon(\cdot)$, und es gilt $u^\varepsilon \overset{\varepsilon\to 0}{\rightharpoonup} u$, wobei $u \in \mathcal{C}(\Gamma)$ und $\mathcal{F}(u) = \inf_{\mathcal{C}(\Gamma)} \mathcal{F}(\cdot)$. Darüberhinaus übertragen sich „schöne“ Eigenschaften von u^ε auf u; so ist u^ε zum Beispiel konform für alle $\varepsilon > 0$, d.h. $|u^\varepsilon_{x^1}| = |u^\varepsilon_{x^2}|$

und $u^\varepsilon_{x^1} \cdot u^\varepsilon_{x^2} = 0$ $\mathscr{L}^2$-fast überall auf B, was man mit Hilfe innerer Variationen beweisen kann, vgl. Abschnitt 1.2. Hierbei spielt das DIRICHLETintegral $\mathcal{D}$ die entscheidende Rolle, da $\mathcal{F}$ als parameterinvariantes Funktional unter inneren Variationen invariant ist. Aus einer Voraussetzung an $\mathcal{F}$ ähnlich wie in Proposition 3.9 (iii) ergibt sich die starke Konvergenz $u^\varepsilon \to u$ in $W^{1,2}(B, \mathbb{R}^3)$ für $\varepsilon \to 0$, und damit auch $|u_{x^1}| = |u_{x^2}|$ und $u_{x^1} \cdot u_{x^2} = 0$, also die Konformität des Minimierers, vgl. [54]. (Tatsächlich kann man mit einem Trick auf diese der Voraussetzung (iii) vergleichbare Annahme verzichten, siehe dazu die Verschärfung in [55] und Kapitel 5.1, wo wir das in *einer* Dimension vorführen werden.)

Beweis zu Proposition 3.9. Ohne Einschränkung dürfen wir annehmen, dass $\mu_0 \in (0, c_0]$; denn wäre $\mu_0 > c_0$, dann wäre schon

$$p \mapsto F(x,z,p) - c_0|p|^q = F(x,z,p) - \mu_0|p|^q + \underbrace{(\mu_0 - c_0)}_{>0}|p|^q$$

als Summe zweier konvexer Funktion selbst konvex.

Nach Voraussetzung (ii) wissen wir also

$$F(x,z,p) - \mu_0|p|^q \geq (c_0 - \mu_0)|p|^q - c_3 \geq -c_3,$$

und $F(x,z,\cdot) - \mu_0|\cdot|^q$ ist konvex in p und genügend glatt. Nach Satz 3.5 (für die in diesem Satz zugelassene Variante mit der L^1-Funktion $g(x) := -c_3$) ist also das Funktional $u \mapsto \mathcal{F}(u) - \mu_0 \int_I |u'(x)|^q \, \mathrm{d}x$ schwach unterhalbstetig in $W^{1,q}(I, \mathbb{R}^N)$, so dass für $\{u_k\}_k \subset W^{1,q}(I, \mathbb{R}^N)$ mit $u_k \overset{k\to\infty}{\rightharpoonup} u$ in $W^{1,q}(I, \mathbb{R}^N)$ und $\mathcal{F}(u_k) \xrightarrow{k\to\infty} \mathcal{F}(u)$ gilt

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(u) - \mu_0 \int_I |u'(x)|^q \, \mathrm{d}x &\leq \liminf_{k\to\infty} \left[\mathcal{F}(u_k) - \mu_0 \int_I |u_k'(x)|^q \, \mathrm{d}x \right] \\
&= \lim_{k\to\infty} \mathcal{F}(u_k) - \mu_0 \limsup_{k\to\infty} \int_I |u_k'(x)|^q \, \mathrm{d}x \\
&= \mathcal{F}(u) - \mu_0 \limsup_{k\to\infty} \int_I |u_k'(x)|^q \, \mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Da $\mu_0 > 0$, folgt also

$$\limsup_{k\to\infty} \int_I |u_k'(x)|^q \, \mathrm{d}x \leq \int_I |u'(x)|^q \, \mathrm{d}x \leq \liminf_{k\to\infty} \int_I |u_k'(x)|^q \, \mathrm{d}x;$$

denn auch die L^q-Norm ist schwach unterhalbstetig, vgl. mit der zugehörigen Übungsaufgabe. Es ergibt sich somit

$$\lim_{k\to\infty} \int_I |u_k'(x)|^q \, \mathrm{d}x = \int_I |u'(x)|^q \, \mathrm{d}x,$$

und da $L^q(I, \mathbb{R}^N)$ für $q \in (1, \infty)$ *uniform konvex* ist (vgl. Übungsaufgaben), gilt mit dem Resultat einer Übungsaufgabe

$$u_k' \xrightarrow{k\to\infty} u' \quad \text{in } L^q(I, \mathbb{R}^N). \tag{3.22}$$

Außerdem ist $\|u_k\|_{W^{1,q}(I,\mathbb{R}^N)}$ beschränkt, da $u_k \overset{k\to\infty}{\rightharpoonup} u$ in $W^{1,q}(I, \mathbb{R}^N)$, und aufgrund von Satz 2.15 gilt dann auch $\|u_k\|_{C^{0,1-\frac{1}{q}}(\bar{I},\mathbb{R}^N)} < c$ unabhängig von k. Nach dem Satz von

Arzelà-Ascoli existiert also eine Teilfolge mit $u_{k_i} \xrightarrow{i\to\infty} u$ in $C^0(\overline{I}, \mathbb{R}^N)$, und nach dem Teilfolgenprinzip ist sogar $u_k \xrightarrow{k\to\infty} u$ in $C^0(\overline{I}, \mathbb{R}^N)$, also insbesondere $u_k \xrightarrow{k\to\infty} u$ in $L^q(I, \mathbb{R}^N)$. Zusammen mit (3.22) folgt schließlich

$$u_k \xrightarrow{k\to\infty} u \quad \text{in } W^{1,q}(I, \mathbb{R}^N).$$

$\square$

Kapitel 4

Regularitätstheorie und Singularitäten

Wir beginnen zunächst mit einem einfachen Beispiel, bei dem man die Regularität direkt nachweisen kann.

Beispiel $\boxed{4.1}$
Sei $I = (a, b) \subset \mathbb{R}$ ein beschränktes Intervall, $c \in C^0(\overline{I})$ mit Werten in $[0, \infty)$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^N$ vorgegeben. Wir betrachten das Funktional

$$\mathcal{F}(v) := \int_I F(x, v(x), v'(x))\,\mathrm{d}x := \int_I \Big[|v'(x)|^2 + c(x)|v(x)|^6 \Big]\,\mathrm{d}x,$$

für welches man mit den Techniken aus Kapitel 3 die Existenz eines Minimierers u in der Klasse

$$\mathcal{C}(\alpha, \beta) := \{ v \in W^{1,2}(I, \mathbb{R}^N) : v(a) = \alpha,\ v(b) = \beta \}$$

nachweisen kann. Wir nutzen die Minimalität von u nun aus, um zu zeigen, dass $u \in C^2(\overline{I}, \mathbb{R}^N)$. Tatsächlich folgt aus der Beziehung

$$\mathcal{F}(u) \leq \mathcal{F}(u + \varepsilon\varphi) \qquad \text{für alle } \ \varepsilon \in \mathbb{R},\ \varphi \in C_0^\infty(I, \mathbb{R}^N),$$

dass[1] $\delta\mathcal{F}(u, \varphi) = 0$ und damit die schwache Euler-Lagrange-Gleichung

$$\int_I \Big[F_p(x, u(x), u'(x)) \cdot \varphi'(x) + F_z(x, u(x), u'(x)) \cdot \varphi(x) \Big]\,\mathrm{d}x = 0 \qquad \text{für alle } \ \varphi \in C_0^\infty(I, \mathbb{R}^N)$$

und damit durch partielle Integration (vgl. mit der Herleitung der DuBois-Reymond-Gleichung in Proposition 1.9) für $d \in I$

$$\int_I \Big[F_p(x, u(x), u'(x)) - \int_d^x F_z(y, u(y), u'(y))\,\mathrm{d}y \Big] \cdot \varphi'(x)\,\mathrm{d}x = 0 \ \text{ für alle } \ \varphi \in C_0^\infty(I, \mathbb{R}^N).$$

Nach Lemma 1.10 existiert demnach ein konstanter Vektor $c_d \in \mathbb{R}^N$, so dass

$$F_p(x, u(x), u'(x)) = c_d + \int_d^x F_z(y, u(y), u'(y))\,\mathrm{d}y \quad \text{für } \mathscr{L}^1\text{-fast alle } x \in I.$$

[1] Bei der Herleitung der schwachen Euler-Lagrange-Gleichung und der DuBois-Reymond-Gleichung muss man lediglich beachten, dass für dieses Beispiel sämtliche Integralausdrücke existieren, was mit $u \in W^{1,2}(I, \mathbb{R}^N) \subset C^{0,1/2}(\overline{I}, \mathbb{R}^N)$ (Satz 2.15) leicht nachzuweisen ist.

Mit $F_z(\cdot, u(\cdot), u'(\cdot)) = 6c(\cdot)|u(\cdot)|^4 u(\cdot) \in C^0(\overline{I}, \mathbb{R}^N)$ folgt

$$2u'(x) = F_p(x, u(x), u'(x)) \in C^1(\overline{I}, \mathbb{R}^N),$$

also $u \in C^2(\overline{I}, \mathbb{R}^N)$. Die Regularität folgt also in diesem Beispiel aus der Tatsache, dass der Ausdruck $F_p(x, z, p)$ die Isolation der p-Variablen explizit (und hier in sehr einfacher Weise) erlaubt. Der nun folgende Regularitätssatz gibt allgemeinere Bedingungen an, unter denen eine solche Schlussweise noch möglich ist. Diese Bedingungen können in vielerlei Weise noch abgeschwächt werden, worauf wir später eingehen werden, ohne Beweise dieser schärferen Aussagen hier anzugeben.

Satz 4.1
Seien $I = (a, b)$ mit $-\infty < a < b < +\infty, q \in (1, \infty)$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^N$, außerdem gelte:

(R1) $F \in C^2(\overline{I} \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N)$.

(R2) *Es gebe $c_0, c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$ mit $0 < c_0 \le c_1, 0 \le c_2, c_3$, so dass*

$$c_0|p|^q - c_3 \le F(x, z, p) \le c_1|p|^q + c_2 \qquad \textit{für alle} \;\; (x, z, p) \in \overline{I} \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$$

(polynomiales Wachstum).

(R3) $\sum_{i,k=1}^N F_{p^i p^k}(x, z, p)\xi^i \xi^k > 0 \quad \forall\, (x, z, p) \in \overline{I} \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N,\ \forall\, \xi \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$ *(Elliptizität).*

(R4) *Es gebe eine Funktion $M = M(R) > 0$, so dass für alle $(x, z, p) \in \overline{I} \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$ mit $x^2 + |z|^2 \le R^2$ gilt*

$$|F_z(x, z, p)| + |F_p(x, z, p)| \le M(R)\,(1 + |p|^q)\,.$$

Dann gilt für alle

$$u \in \mathcal{C}(\alpha, \beta) := \{v \in W^{1,q}(I, \mathbb{R}^N) : v(a) = \alpha, v(b) = \beta\}$$

mit $\mathcal{F}(u) = \inf_{\mathcal{C}(\alpha,\beta)} \mathcal{F}(\cdot)$

$$u \in C^2(\overline{I}, \mathbb{R}^N) \quad \textit{und} \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F_p(x, u(x), u'(x)) - F_z(x, u(x), u'(x)) = 0 \quad \forall\, x \in \overline{I}.$$

Falls $F \in C^k(\overline{I} \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N)$ für $k \ge 2$ bzw. $F \in C^\omega(\overline{I} \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N)$, dann ist auch $u \in C^k(\overline{I}, \mathbb{R}^N)$ bzw. $u \in C^\omega(\overline{I}, \mathbb{R}^N)$, wobei $C^\omega(\overline{I}, \mathbb{R}^N)$ die Klasse der auf I reell analytischen Funktionen mit Werten in $\mathbb{R}^N$ bezeichnet, die sich analytisch über $\overline{I}$ hinaus fortsetzen lassen.

Auf den Beweis der Analytizität verzichten wir hier, den Beweis der Differenzierbarkeit führen wir in mehreren Schritten: Zunächst beweisen wir, dass aus C^1-Regularität die C^2-Regularität folgt, dann aber auch höhere Regularität, falls F genügend glatt ist, und schließlich beweisen wir die C^1-Regularität für schwache kritische Punkte von $\mathcal{F}$. Abschließend bleibt dann nur zu zeigen, dass unter den Voraussetzungen von Satz 4.1 jeder Minimierer ein schwacher kritischer Punkt ist.

Proposition 4.2 [“ $C^1 \;\Rightarrow\; C^2$ ”]
Sei $u \in C^1(\overline{I}, \mathbb{R}^N)$ ein schwacher kritischer Punkt von $\mathcal{F}$, wobei $F, F_{p^i} \in C^1(\overline{I} \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N)$ für $i = 1, \ldots, N$, und wobei die Matrix $F_{pp}(x, u(x), u'(x))$ für alle $x \in \overline{I}$ invertierbar sei. Dann ist $u \in C^2(\overline{I}, \mathbb{R}^N)$.

Beweis. Zuerst bemerken wir, dass nach den Regularitätsvoraussetzungen an F und an u ein $\varepsilon > 0$ existiert, so dass $F, F_{p_i} \in C^1(B_\varepsilon(I) \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N)$ für alle $i = 1, \ldots, N$, und $u \in C^1(B_\varepsilon(I), \mathbb{R}^N)$, wobei $B_\varepsilon(I) := (a - \varepsilon, b + \varepsilon)$. Wir betrachten die Abbildung $\Psi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$ definiert durch

$$\Psi(x, z, p) := (x, z, F_p(x, z, p)),$$

mit der Jakobischen Matrix

$$D\Psi(x, z, p) = \left(\begin{array}{c|c} \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^{N+1}} & 0 \\ \hline F_{px} \mid F_{pz} & F_{pp} \end{array} \right).$$

Nach Voraussetzung ist die Funktionaldeterminante

$$\det D\Psi(x_0, u(x_0), u'(x_0)) = \det F_{pp}(x_0, u(x_0), u'(x_0)) \neq 0 \ \text{ für alle } \ x_0 \in \overline{I},$$

so dass es nach dem Satz über Inverse Funktionen zu jedem solchen Punkt $x_0 \in \overline{I}$ eine offene Umgebung $V_0 \subset \mathbb{R}^{2N+1}$ des Punktes $(x_0, u(x_0), u'(x_0)) \in \mathbb{R}^{2N+1}$ gibt, so dass $\Psi|_{V_0} : V_0 \to \Psi(V_0)$ ein Diffeomorphismus ist. Insbesondere ist die Umkehrabbildung $\Psi^{-1} \in C^1(\Psi(V_0), \mathbb{R}^{2N+1})$ und erfüllt $\Psi^{-1}(\Psi(v)) = v$ für alle $v \in V_0$. Nun ist wegen $u \in C^1(B_\varepsilon(I), \mathbb{R}^N)$ für alle x hinreichend nah an x_0 auch $(x, u(x), u'(x)) \in V_0$, so dass für alle solchen x gilt:

$$\begin{aligned} (x, u(x), u'(x)) &= \Psi^{-1}\big(\Psi((x, u(x), u'(x)))\big) \\ &= \Psi^{-1}\big(x, u(x), F_p(x, u(x), u'(x))\big) \\ &= \Psi^{-1}\Big(x, u(x), c_a + \int_a^x F_z(y, u(y), u'(y))\, \mathrm{d}y\Big), \end{aligned} \tag{4.1}$$

für einen konstanten Vektor $c_a \in \mathbb{R}^N$, da u als schwache Extremale nach Proposition 1.9 die DuBois-Reymond-Gleichung erfüllt. Die Abbildung Ψ^{-1} und das Argument von Ψ^{-1} in (4.1) ist als Funktion von x (nahe x_0) in allen Komponenten einmal stetig differenzierbar, damit auch die gesamte rechte Seite in (4.1). Insbesondere ist die dritte Komponente dieser Vektorgleichung von der Klasse C^1 nahe x_0, und damit auch die dritte Komponente $u'(\cdot)$. Das impliziert, dass $u \in C^2$ nahe x_0, und da $x_0 \in \overline{I}$ beliebig gewählt war, folgt $u \in C^2(\overline{I}, \mathbb{R}^N)$. □

Proposition 4.3 [“ $C^1 \Rightarrow C^k$ ”]
Sei $u \in C^1(\overline{I}, \mathbb{R}^N)$ ein schwacher kritischer Punkt von $\mathcal{F}$, wobei $F \in C^k(\overline{I} \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N)$ mit $k \geq 2$ bzw. $F \in C^\omega(\overline{I} \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N)$, und $F_{pp}(x, u(x), u'(x))$ sei invertierbar für alle $x \in \overline{I}$. Dann ist $u \in C^k(\overline{I}, \mathbb{R}^N)$ bzw. $u \in C^\omega(\overline{I}, \mathbb{R}^N)$.

Beweis. Für $k = 2$ folgt $u \in C^2(\overline{I}, \mathbb{R}^N)$ aus Proposition 4.2. Für $k = 3$ verfahren wir genauso wie im Beweis von Proposition 4.2 und beobachten, dass die Funktion Ψ von der Klasse $C^2(\mathbb{R}^{2N+1}, \mathbb{R}^{2N+1})$ ist, so dass der Satz über Inverse Funktionen in diesem Fall impliziert, dass Ψ lokal sogar ein C^2-Diffeomorphismus ist. Da mit der nun verbesserten Regularität von F und der nach Proposition 4.2 nun schon bekannten Regularität $u \in C^2(\overline{I}, \mathbb{R}^N)$ auch die Ausdrücke im Argument von Ψ^{-1} in (4.1) selbst C^2-Funktionen sind, folgt für die linke Seite in (4.1) die C^2-Regularität. Insbesondere ist also $u' \in C^2$, und damit folgt $u \in C^3(\overline{I}, \mathbb{R}^N)$. Die Aussage für alle größeren $k \in \mathbb{N}$ beweist man analog. □

Proposition 4.4 [“ $W^{1,q} \;\Rightarrow\; C^1$ ”]
Sei $q \in (1,\infty)$, $I=(a,b)\subset\mathbb{R}$ und es gelten die folgenden Bedingungen:

(i) $F, F_{p^i} \in C^1(\overline{I}\times\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^N)$ *für* $i=1,\ldots,N$.

(ii) *Es gibt Konstanten* $c_0>0$, $c_3\geq 0$, *so dass*

$$c_0|p|^q - c_3 \leq F(x,z,p) \quad \text{für alle } (x,z,p)\in\overline{I}\times\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^N.$$

(iii)

$$\sum_{i,k=1}^N F_{p^ip^k}(x,z,p)\,\xi^i\xi^k > 0 \quad \text{für alle } \xi\in\mathbb{R}^N\setminus\{0\},\,(x,z,p)\in\overline{I}\times\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^N.$$

(iv) *Für alle $R>0$ gibt es eine Konstante $M=M(R)>0$, so dass*

$$|F_z(x,z,p)|+|F_p(x,z,p)| \leq M(R)\,(1+|p|^q) \quad \forall\,(x,z,p)\in\overline{I}\times\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^N \text{ mit } x^2+|z|^2\leq R^2.$$

Weiterhin sei $u\in W^{1,q}(I,\mathbb{R}^N)$ ein schwacher kritischer Punkt von $\mathcal{F}$. Dann ist $u\in C^1(\overline{I},\mathbb{R}^N)$.

Beweis. Ohne Einschränkung sei $c_3=0$; denn sonst wäre u auch ein schwacher kritischer Punkt für das modifizierte Funktional $\tilde{\mathcal{F}}$ mit dem Integranden $\tilde{F}(x,z,p):=F(x,z,p)+c_3$, und $\tilde{F}$ würde dann auch alle anderen Voraussetzungen dieser Proposition erfüllen.

Nach Satz 2.15 gilt $W^{1,q}(I,\mathbb{R}^N)\subset C^{0,1-\frac{1}{q}}(\overline{I},\mathbb{R}^N)$ (d.h. es gibt HÖLDERstetige Repräsentanten in $W^{1,q}(I,\mathbb{R}^N)$), also existiert ein $R>0$ mit

$$x^2+|u(x)|^2\leq R^2 \quad \forall\, x\in\overline{I}.$$

Wegen Voraussetzung (iv) gilt dann

$$|F_z(x,u(x),u'(x))| \leq M(R)\left(1+|u'(x)|^q\right) \quad \text{für } \mathscr{L}^1\text{-fast alle } x\in\overline{I},$$

so dass $F_z(\cdot,u(\cdot),u'(\cdot))\in L^1(I,\mathbb{R}^N)$. Damit ist die Funktion

$$f(x) := \int_a^x F_z(y,u(y),u'(y))\,\mathrm{d}y, \quad x\in I,$$

in $W^{1,1}(I,\mathbb{R}^N)$ mit schwacher Ableitung $f'(\cdot)=F_z(\cdot,u(\cdot),u'(\cdot))\in L^1(I,\mathbb{R}^N)$ (vgl. Übungsaufgabe). Nach Definition 2.1 hat man also

$$\int_I F_z(x,u(x),u'(x))\cdot\varphi(x)\,\mathrm{d}x = -\int_I\left(\int_a^x F_z(\tilde{x},u(\tilde{x}),u'(\tilde{x}))\,\mathrm{d}\tilde{x}\right)\cdot\varphi'(x)\,\mathrm{d}x \tag{4.2}$$

für alle $\varphi\in C_0^\infty(I,\mathbb{R}^N)$. Da u schwach $\mathcal{F}$-kritisch ist (vgl. Definition 1.2 und die sich dort anschließende Bemerkung), gilt

$$0=\int_I F_p(x,u(x),u'(x))\cdot\varphi'(x)\,\mathrm{d}x+\int_I F_z(x,u(x),u'(x))\cdot\varphi(x)\,\mathrm{d}x \quad \forall\varphi\in C_0^\infty(I,\mathbb{R}^N),$$

wobei die Existenz aller auftretenden Integrale durch Voraussetzung (iv) gesichert ist. Unter Ausnutzung von (4.2) folgt aus dem Fundamentallemma von DuBois-Reymond (Lemma 1.10) die Existenz eines Vektors $c \in \mathbb{R}^N$, so dass

$$F_p(x, u(x), u'(x)) = c + \int_a^x F_z(y, u(y), u'(y))\,\mathrm{d}y \quad \text{für } \mathscr{L}^1\text{-fast alle } x \in I.$$

Da aber u a priori nicht genügend glatt ist, können wir an dieser Stelle den Satz über Inverse Funktionen nicht ohne Weiteres anwenden. Wir definieren also

$$\begin{aligned}
\pi(x) &:= \underbrace{c + \int_a^x \underbrace{F_z(y, u(y), u'(y))}_{\in L^1}\,\mathrm{d}y}_{\in W^{1,1}(I,\mathbb{R}^N)\subset C^0(\bar{I},\mathbb{R}^N)}, \quad x \in \overline{I},\\
\sigma(x) &:= (x, u(x), u'(x)) \quad \text{für } \mathscr{L}^1\text{-fast alle } x \in I,\\
e(x) &:= (x, u(x), \pi(x)) \quad \text{für } \ x \in \overline{I},\\
\psi(x,z,p) &:= (x, z, F_p(x,z,p)) \quad \text{für } \ (x,z,p) \in \overline{I} \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N,
\end{aligned}$$

woraus

$$\psi(\sigma(x)) = e(x) \quad \text{für } \mathscr{L}^1\text{-fast alle } x \in I \tag{4.3}$$

folgt. Nun gilt es, den Ausdruck $\sigma(x)$ in dieser Relation freizustellen, um am Ende des Beweises schließlich einzusehen, dass σ (und damit auch u') fast überall mit einer stetigen Funktion übereinstimmt. Dazu werden wir die Existenz einer stetigen Umkehrfunktion ψ^{-1} von ψ zeigen. Zunächst müssen wir die Bijektivität von ψ einsehen.

Um zu zeigen, dass ψ injektiv ist, betrachten wir zwei Vektoren $(x_1, z_1, p_1) \neq (x_2, z_2, p_2)$. Dann gilt auch $\psi(x_1, z_1, p_1) \neq \psi(x_2, z_2, p_2)$, denn selbst wenn $(x_1, z_1) = (x_2, z_2)$ folgt aus der Elliptizität von F (Voraussetzung (iii)) für die dritte Komponente von ψ

$$\begin{aligned}
\psi^3(x_1, z_1, p_1) - \psi^3(x_2, z_2, p_2) &= F_p(x_1, z_1, p_1) - F_p(x_1, z_1, p_2)\\
&= \int_0^1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} F_p(x_1, z_1, tp_1 + (1-t)p_2)\,\mathrm{d}t\\
&= \left(\int_0^1 F_{pp}(x_1, z_1, tp_1 + (1-t)p_2)\,\mathrm{d}t\right)(p_1 - p_2),
\end{aligned}$$

und damit, falls $p_1 \neq p_2$,

$$\begin{aligned}
&(p_1 - p_2) \cdot [\psi^3(x_1, z_1, p_1) - \psi^3(x_2, z_2, p_2)]\\
= \ &(p_1 - p_2) \cdot \left(\int_0^1 F_{pp}(x_1, z_1, tp_1 + (1-t)p_2)\,\mathrm{d}t\right)(p_1 - p_2) > 0,
\end{aligned}$$

also $\psi(x_1, z_1, p_1) - \psi(x_2, z_2, p_2) \neq 0$ für $(x_1, z_1) = (x_2, z_2)$ und $p_1 \neq p_2$. Für $(x_1, z_1) \neq (x_2, z_2)$ ist offensichtlich $\psi(x_1, z_1, p_1) \neq \psi(x_2, z_2, p_2)$.

Für den Nachweis der Surjektivität beachten wir, dass nach Voraussetzung (ii) (mit $c_3 = 0$ wie zu Beginn des Beweises angenommen) $F(x, z, p) \geq c_0|p|^q$ gilt, und nach einer Übungsaufgabe gilt dann $F_p(x, z, \mathbb{R}^N) = \mathbb{R}^N$ für alle $(x, z) \in \overline{I} \times \mathbb{R}^N$. Daraus folgt $\psi(\overline{I} \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N) = \overline{I} \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$.

Wir können nun also in der Gleichung $\psi(\sigma(x)) = e(x)$, die nur für $\mathscr{L}^1$-fast alle $x \in I$ gilt, den Ausdruck $\sigma(x)$ für diese x freistellen, was uns aber noch nicht direkt zum Ziel führt. Mit $u \in C^0(\overline{I}, \mathbb{R}^N)$ ist die Menge

$$(\sigma^1, \sigma^2)(\overline{I}) = \overline{I} \times u(\overline{I}) \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$$

zwar kompakt, aber die dritte Komponente $\sigma^3(\overline{I})$ ist im Allgemeinen keine kompakte Teilmenge des $\mathbb{R}^N$, womit die Stetigkeit von ψ^{-1} noch nicht gesichert[2] ist. Deswegen betrachten wir ψ auf der 1-Punktkompaktifizierung

$$(\overline{I} \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N) \cup \{\infty\} \cong \mathbb{S}^{2N+1} \subset \mathbb{R}^{2N+2}$$

durch die Fortsetzung $\psi(\infty) := \infty$, womit ψ als bijektive (also umkehrbare) Funktion stetig fortgesetzt ist; denn wegen der Voraussetzungen (ii) und (iii) gilt nach einer Übungsaufgabe tatsächlich $|F_p(x, z, p)| \to \infty$ (gleichmäßig in $(x, z) \in \overline{I} \times \mathbb{R}^N$) für $|p| \to \infty$ und damit auch

$$|\psi(x, z, p)| = |(x, z, F_p(x, z, p))| \underset{|(x,z,p)| \to \infty}{\longrightarrow} \infty.$$

Damit ist die Umkehrfunktion

$$\psi^{-1} : \psi(\mathbb{S}^{2N+1}) = \mathbb{S}^{2N+1} \longrightarrow \mathbb{S}^{2N+1}$$

stetig (vgl. z.B. [53, Satz 4, S. 147]).

Wenden wir nun die Umkehrfunktion ψ^{-1} auf die $x \in \overline{I}$ an, für die (4.3) gilt, so erhält man

$$\begin{aligned}
(x, u(x), u'(x)) &= \sigma(x) = \psi^{-1}(\psi(\sigma(x))) \\
&\underset{(4.3)}{=} \psi^{-1}(e(x)) = \psi^{-1}(x, u(x), \pi(x)) \\
&= (x, u(x), \underbrace{(\psi^{-1})^3(x, u(x), \pi(x))}_{\in C^0(\overline{I}, \mathbb{R}^N)}).
\end{aligned}$$

Durch Vergleich der letzten N Einträge dieser vektoriellen Gleichung erkennt man, dass u' fast überall auf $\overline{I}$ mit einer auf $\overline{I}$ stetigen Funktion übereinstimmt, so dass wir diese Funktion als stetigen Vertreter für u' wählen dürfen. □

Nach diesen vorbereitenden Propositionen können wir nun den Beweis von Satz 4.1 abschließen. Im Wesentlichen geht es um den Nachweis, dass die minimierende Funktion $u \in \mathcal{C}(\alpha, \beta)$ ein schwacher kritischer Punkt von $\mathcal{F}$ ist.

Beweis von Satz 4.1. Zuerst bemerken wir, dass $\mathcal{F}(v)$ wegen der Voraussetzung (R2) des Satzes für alle $v \in \mathcal{C}(\alpha, \beta)$ nicht nur wohldefiniert (vgl. Proposition 3.1) sondern auch endlich ist. Sei u ein Minimierer von $\mathcal{F}$, dann hat man für eine beliebige Funktion $\varphi \in C_0^\infty(I, \mathbb{R}^N)$ die Inklusion

$$u + \varepsilon\varphi \in \mathcal{C}(\alpha, \beta) \qquad \text{für alle } \ \varepsilon \in \mathbb{R},$$

[2]Da die Funktion e stetig auf $\overline{I}$ ist, ist $e(\overline{I})$ nach (4.3) immerhin im Abschluss von $\Psi(\overline{I} \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N)$ und damit in der Kompaktifizierung $\mathbb{S}^{2N+1} \cong (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N) \cup \{\infty\}$ von $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$ enthalten. Man prüft zwar leicht nach, dass $\det D\Psi \neq 0$ in $\overline{I} \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$, so dass mit dem Umkehrsatz sofort folgt, dass Ψ^{-1} stetig differenzierbar auf $\Psi(\overline{I} \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N)$ ist, nicht aber notwendig auf dem Abschluss des Bildes von Ψ.

und wir setzen $Q := \|\varphi\|_{C^1(\overline{I},\mathbb{R}^N)}$. Nach Satz 2.15 ist $u + \varepsilon\varphi$ beschränkt, und zu $\varepsilon_0 > 0$ gibt es eine Zahl $R > 0$ mit

$$x^2 + |u(x) + \varepsilon\varphi(x)|^2 \le R^2 \qquad \text{für alle } \; x \in \overline{I},\ |\varepsilon| < \varepsilon_0.$$

Wegen Bedingung (R4) gilt

$$\begin{aligned} |F_z(x, u(x) + \varepsilon\varphi(x), u'(x) + \varepsilon\varphi'(x))| \quad &+ \quad |F_p(x, u(x) + \varepsilon\varphi(x), u'(x) + \varepsilon\varphi'(x))| \\ &\le \quad M(R)(1 + |u'(x) + \varepsilon\varphi'(x)|^q), \end{aligned}$$

und weiterhin können wir abschätzen

$$\begin{aligned} |u'(x) + \varepsilon\varphi'(x)|^q \quad &\le \quad 2^{q-1}\Big(|u'(x)|^q + \varepsilon_0^q|\varphi'(x)|^q\Big) \\ &\le \quad 2^{q-1}\Big(|u'(x)|^q + \varepsilon_0^q Q^q\Big), \end{aligned}$$

so dass wir erhalten

$$|F_z(x, u(x) + \varepsilon\varphi(x), u'(x) + \varepsilon\varphi'(x))| + |F_p(x, u(x) + \varepsilon\varphi(x), u'(x) + \varepsilon\varphi'(x))| \le c(1 + |u'(x)|^q).$$

Daraus folgt die Ungleichung

$$\begin{aligned} \Bigg|\int_0^1 \Big(&F_z(x, u(x) + \varepsilon t\varphi(x), u'(x) + \varepsilon t\varphi'(x)) \cdot \varphi(x) \\ &+F_p(x, u(x) + \varepsilon t\varphi(x), u'(x) + \varepsilon t\varphi'(x)) \cdot \varphi'(x)\Big)\, \mathrm{d}t\Bigg| \\ \le \quad &C(Q)(1 + |u'(x)|^q) \end{aligned} \tag{4.4}$$

Jetzt können wir zeigen, dass der Minimierer $u \in W^{1,q}(I, \mathbb{R}^N)$ auch ein schwacher kritischer Punkt von $\mathcal{F}$ ist. Für $\varepsilon > 0$ gilt wegen der Minimaleigenschaft

$$\begin{aligned} 0 \quad &\le \quad \frac{\mathcal{F}(u + \varepsilon\varphi) - \mathcal{F}(u)}{\varepsilon} \\ &= \quad \frac{1}{\varepsilon}\left[\int_I \big(F(x, u(x) + \varepsilon\varphi(x), u'(x) + \varepsilon\varphi'(x)) - F(x, u(x), u'(x))\big)\, \mathrm{d}x\right] \\ &= \quad \frac{1}{\varepsilon}\int_I\int_0^1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\, F(x, u(x) + \varepsilon t\varphi(x), u'(x) + \varepsilon t\varphi'(x))\, \mathrm{d}t\, \mathrm{d}x \\ &= \quad \frac{1}{\varepsilon}\int_I\int_0^1 [F_z(x, u(x) + \varepsilon t\varphi(x), u'(x) + \varepsilon t\varphi'(x)) \cdot \varepsilon\varphi(x) \\ &\qquad + F_p(x, u(x) + \varepsilon t\varphi(x), u'(x) + \varepsilon t\varphi'(x)) \cdot \varepsilon\varphi'(x)]\, \mathrm{d}t\, \mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Da für $\mathscr{L}^1$-fast alle $x \in I$ die Funktion

$$\xi \mapsto F_z(x, u(x) + \xi\varphi(x), u'(x) + \xi\varphi'(x)) \cdot \varphi(x) + F_p(x, u(x) + \xi\varphi(x), u'(x) + \xi\varphi'(x)) \cdot \varphi'(x)$$

stetig ist, erhalten wir mit der Substitution $\xi = \varepsilon t$ mit $\mathrm{d}\xi = \varepsilon\, \mathrm{d}t$, $\xi(0) = 0$ und $\xi(1) = \varepsilon$ aus dem Mittelwertsatz der Integralrechnung

$$\begin{aligned} &\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^1 [F_z(x, u(x) + \varepsilon t\varphi(x), u'(x) + \varepsilon t\varphi'(x)) \cdot \varphi(x) \\ &\qquad + F_p(x, u(x) + \varepsilon t\varphi(x), u'(x) + \varepsilon t\varphi'(x)) \cdot \varphi'(x)]\, \mathrm{d}t \\ = \quad &\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\int_0^\varepsilon [F_z(x, u(x) + \xi\varphi(x), u'(x) + \xi\varphi'(x)) \cdot \varphi(x) \\ &\qquad + F_p(x, u(x) + \xi\varphi(x), u'(x) + \xi\varphi'(x)) \cdot \varphi'(x)]\, \mathrm{d}\xi \\ = \quad &F_z(x, u(x), u'(x)) \cdot \varphi(x) + F_p(x, u(x), u'(x)) \cdot \varphi'(x) \quad \text{für } \mathscr{L}^1\text{-fast alle } x \in I, \end{aligned} \tag{4.5}$$

nämlich für alle LEBESGUE-Punkte x der nach Voraussetzung integrablen Funktion

$$x \mapsto F_z(x, u(x), u'(x)) \cdot \varphi(x) + F_p(x, u(x), u'(x)) \cdot \varphi'(x).$$

Wegen (4.4) folgt dann nach dem LEBESGUEschen Satz über dominierte Konvergenz, dass

$$\int_I [F_z(x, u(x), u'(x)) \cdot \varphi(x) + F_p(x, u(x), u'(x)) \cdot \varphi'(x)] \, dx \geq 0. \tag{4.6}$$

Die Beziehung (4.6) gilt für alle $\varphi \in C_0^\infty(I, \mathbb{R}^N)$, insbesondere auch wenn wir von φ zu $-\varphi$ übergehen, so dass wegen der Linearität des Ausdrucks in φ tatsächlich Gleichheit gilt:

$$\int_I [F_z(x, u(x), u'(x)) \cdot \varphi(x) + F_p(x, u(x), u'(x)) \cdot \varphi'(x)] \, dx \; = 0,$$

d.h. u ist ein schwacher kritischer Punkt von $\mathcal{F}$. Die Aussage des Satzes folgt nun sofort durch Anwenden der vorherigen Propositionen: Nach Proposition 4.4 ist $u \in C^1(\overline{I}, \mathbb{R}^N)$, nach Proposition 4.2 ist dann $u \in C^2(\overline{I}, \mathbb{R}^N)$, und falls $F \in C^k(\overline{I} \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N)$ für $k \geq 2$, gilt nach Proposition 4.3 auch $u \in C^k(\overline{I}, \mathbb{R}^N)$. $\square$

Die beiden folgenden Beispiele illustrieren die Schärfe der Voraussetzungen von Satz 4.1:

Beispiel $\boxed{4.2}$
Wir betrachten für $N = 1$ das Variationsproblem

$$\mathcal{F}(u) := \int_0^1 \left[(u'(x))^2 - 1\right]^2 \, dx \longrightarrow \text{min!}$$

in der Klasse

$$\mathcal{C}(0,0) := \{v \in W^{1,4}(I) : v(0) = v(1) = 0\}.$$

Offenbar ist $\inf_{\mathcal{C}(0,0)} \mathcal{F}(\cdot) = 0$, und die Zackenfunktion $\tilde{\varphi} \notin C^2(\overline{I})$ aus Beispiel 3.3 ist ein Minimierer. Dies widerspricht jedoch *nicht* der Aussage des Regularitätssatzes, Satz 4.1; denn F ist nicht konvex in p:

$$F_{pp}(p) = 12p^2 - 4 < 0 \qquad \text{für} \;\; |p| < \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

(Ein nur leicht modifiziertes Variationsproblem in einer Übungsaufgabe besitzt sogar gar keine Lösung in $\mathcal{C}(0,0)$.)

Beispiel $\boxed{4.3}$
Wie in Beispiel 1.4 (und Übungsaufgabe) betrachten wir für $N = 1$ das Variationsproblem

$$\mathcal{F}(u) := \int_{-1}^{+1} u^2(x)(2x - u'(x))^2 \, dx \longrightarrow \text{min!},$$

jedoch nun in der Klasse

$$\mathcal{C}(0,1) := \{v \in W^{1,2}(I) : v(-1) = 0, \; v(+1) = 1\}.$$

Dann ist

$$u^*(x) := \begin{cases} 0 & \text{für } x \in [-1, 0) \\ x^2 & \text{für } x \in [0, 1] \end{cases}$$

ein Minimierer, $\mathcal{F}(u^*) = \inf_{\mathcal{C}(0,1)} \mathcal{F}(\cdot) = 0$, und nach dem Hebbarkeitssatz (Lemma 2.17) ist $u^* \in W^{1,2}((-1,+1))$. Aber auch hier ist u nicht aus $C^2([-1,+1])$. Satz 4.1 ist nicht anwendbar, weil hier die *strikte* Konvexität nicht gegeben ist:

$$F_{pp}(x,z,p) = 2z^2 \not> 0.$$

Ähnliche Beispiele haben wir im Kapitel 3 kennengelernt. In Beispiel 3.3 konnten wir Nichtexistenz von Minimierern nachweisen, während in Beispiel 3.4 zwar die Existenz von eindeutigen Minimierern $u \in W^{1,4}(I, \mathbb{R}^N)$ bewiesen wurde, ohne allerdings Aussagen über höhere Regularität zu gewinnen. Auch die Tatsache, dass man dort mit $|u'| > 1$ fast überall automatisch im Bereich strikter Konvexität des Integranden landete, reicht nicht, weil dessen zweite Ableitungen nach der p-Variablen entlang der Lösung u nicht gleichmäßig nach unten abschätzbar sind.

Im Rahmen dieser Vorlesung begnügen wir uns mit dem Beweis dieses einen zentralen Regularitätssatzes, Satz 4.1, wollen aber zum Abschluss dieses Kapitels einen Ausblick auf weitere Resultate und Phänomene der Regularitätstheorie geben, allerdings ohne Beweis.

Die Voraussetzungen des Satzes 4.1 können in der folgenden Weise abgeschwächt werden, um trotzdem noch die volle Regularität des Minimierers zu garantieren.

Korollar 4.5 [Volle Regularität]
Seien $N = 1$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, und $F \in C^\infty(\overline{I} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R})$ mit $F \geq 0$ wachse superlinear*, d.h.*

$$\lim_{|p|\to\infty} \frac{F(x,z,p)}{|p|} = \infty,$$

und es gelte $F_{pp}(x,z,p) > 0$ für alle $(x,z,p) \in \overline{I} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, sowie

$$F_z(\cdot, u(\cdot), u'(\cdot)) \in L^1(I) \quad \text{oder } F_x(\cdot, u(\cdot), u'(\cdot)) \in L^1(I),$$

und es existiere $u \in \mathcal{C}(\alpha,\beta)$ mit $\mathcal{F}(u) = \inf_{\mathcal{C}(\alpha,\beta)} \mathcal{F}$ mit der Klasse

$$\mathcal{C}(\alpha,\beta) := \{v \in W^{1,1}(I) : v(a) = \alpha, v(b) = \beta\}.$$

Dann gilt $u \in C^\infty(\overline{I})$ und u erfüllt die (starke) Euler-Lagrange-*Gleichung in $\overline{I}$.*

Selbst in einer Dimension muss man mit singulären Lösungen rechnen, wie Beispiel 4.2 zeigt. Tatsächlich kann man aber zeigen, dass unter geeigneten milden Voraussetzungen die Singularitätenmenge eines Minimierers sehr klein ist, was man unter dem Begriff der *partiellen Regularität* zusammenfasst. Das Phänomen partieller Regularität und die tatsächliche Größe der singulären Menge von Lösungen von Variationsproblemen ist insbesondere in der Theorie harmonischer und biharmonischer Abbildungen in mehreren Dimensionen auch heute noch Gegenstand zahlreicher Untersuchungen, siehe z.B. [99], [66], [79], [90] und die jüngeren Arbeiten [91], [101], [93]. Hier beschränken wir uns auf nur einen solchen partiellen Regularitätssatz, bei dem im Unterschied zu Satz 4.1 die Voraussetzungen des polynomialen Wachstums und die Strukturbedingungen (Voraussetzungen (R2) und (R4) von Satz 4.1) fehlen, die uns die Herleitung der schwachen Euler-Lagrange-Gleichung ermöglicht haben.

Satz 4.6 [Partielle Regularität]
Seien $N = 1$, $q \in [1, \infty)$ und $I = (a,b) \subset \mathbb{R}$ ein beschränktes Intervall, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ gegebene

Konstanten und $F \in C^\infty(\overline{I} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R})$ *mit* $F(x,z,p) \geq 0$ *and* $F_{pp}(x,z,p) > 0$ *für alle* $(x,z,p) \in \overline{I} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. *Dann gilt für*

$$u \in \mathcal{C}(\alpha,\beta) := \{v \in W^{1,q}(I) : v(a) = \alpha,\, v(b) = \beta\}$$

mit

$$\mathcal{F}(u) = \inf_{\mathcal{C}(\alpha,\beta)} \mathcal{F}(\cdot)$$

(i) *Die Ableitung* u' *existiert mit Werten in* $\mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ *überall auf* I *und ist stetig.*

(ii) $u \in C^\infty(\overline{I} \setminus \operatorname{Sing}(u))$, *wobei die* singuläre Menge *Sing*$(u) := \{x \in \overline{I} : u'(x) = \pm\infty\}$ *abgeschlossen ist und* $\mathscr{L}^1(\operatorname{Sing}(u)) = 0$ *gilt.*

Der Satz über die partielle Regularität, Satz 4.6, garantiert die Kleinheit der singulären Menge: $\mathscr{L}^1(\operatorname{Sing}(u)) = 0$. Die in der folgenden Proposition beschriebene Konstruktion verdeutlicht, dass man diese singuläre Menge beliebig vorschreiben kann. Mit anderen Worten, zu beliebig vorgegebener $\mathscr{L}^1$-Nullmenge gibt es ein Variationsintegral, dessen Minimierer genau diese Menge als singuläre Menge haben.

Proposition 4.7 [Vorgeschriebene Singularitäten und Lavrentiev-Phänomen]
Sei $I = (a,b)$ *mit* $-\infty < a < b < +\infty$, $E \subset \overline{I}$ *abgeschlossen mit* $\mathscr{L}^1(E) = 0, E \neq \emptyset$ *und*

$$\mathcal{C}(0,1) := \{w \in W^{1,2}(I) : w(a) = 0,\, w(b) = 1\}.$$

Dann existieren $v \in \mathcal{C}(0,1)$, $\varphi, \psi \in C^\infty(\mathbb{R})$ *und* $\varepsilon > 0$ *mit*

$$\psi,\, \psi'' \geq 0 \quad \textit{auf } \mathbb{R} \quad \textit{und} \quad \varphi \circ v \in C^\infty(\overline{I}),$$

so dass für

$$F(x,z,p) := [\varphi(z) - \varphi(v(x))]^2\, \psi(p) + \varepsilon p^2$$

und

$$\mathcal{F}(w) := \int_I F(x, w(x), w'(x))\, \mathrm{d}x$$

gilt:

(i) *Es gibt ein* $u \in \mathcal{C}(0,1)$ *mit* $\mathcal{F}(u) = \inf_{\mathcal{C}(0,1)} \mathcal{F}(\cdot)$.

(ii) $\operatorname{Sing}(u) = E$, *d.h.* $u \in C^\infty(\overline{I} \setminus E)$, $u' : \overline{I} \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ *und* $E = \{x \in \overline{I} : u'(x) = \pm\infty\}$.

(iii) $\inf_{\mathcal{C}(0,1)} \mathcal{F}(\cdot) < \inf_{\mathcal{C}(0,1) \cap C^1(\overline{I})} \mathcal{F}(\cdot)$ (Lavrentiev-Phänomen).

Bemerkung:
Die Existenz des Minimierers aus $\mathcal{C}(0,1)$ folgt sofort, denn die Voraussetzungen von Satz 3.6 sind erfüllt. Um die Regularität zu zeigen, kann der Satz von Tonelli über *partielle Regularität*, Satz 4.6, benutzt werden. Das Konstruktionsprinzip für den Beweis dieser Proposition ist in [7, Prop. 4.11] dargestellt. Zur Beweisidee bemerken wir hier nur, dass die Sobolevfunktion v so gewählt wird, dass sie auf der gegebenen Menge E unendliche Steigung hat. Die glatte Funktion φ blendet dann durch Verkettung mit v gerade diese Singularitätenmenge aus. Die konvexe Funktion ψ sorgt für eine positive untere Schranke

$\sigma_0 > 0$ des Funktionals $\mathcal{F}(w)$ für glatte Funktionen $w \in C^1(\bar{I})$, und $\varepsilon > 0$ wird so klein gewählt, dass

$$\mathcal{F}(v) = \varepsilon \int_I |v'(x)|^2 \, dx < \sigma_0,$$

um das Lavrentiev-Phänomen (iii) nachzuweisen. Der Term εp^2 sorgt einerseits dafür, dass wir eine polynomiale untere Wachstumsschranke haben, womit die Existenz eines Minimierers nach Satz 3.6 gesichert ist. Andererseits führt dieser Term im Zusammenwirken mit der konvexen Funktion ψ zur strikten Konvexität des Integranden in p, so dass der Regularitätssatz Satz 4.6 anwendbar ist.

Kapitel 5

Anwendungen

5.1 Parametrische Variationsprobleme

Parametrische Variationsintegrale sind anisotrope Energien. Sei $I := (a, b) \subset \mathbb{R}$ ein endliches Intervall. Wir untersuchen Variationsprobleme von der Art

$$\mathcal{F}(v) \equiv \mathcal{F}_I(v) := \int_I F(v(x), v'(x))\,\mathrm{d}x \;\longrightarrow\; \text{min!}$$

in einer geeigenten noch zu fixierenden Klasse $\mathcal{C}(\alpha, \beta, K)$ von Sobolevfunktionen v mit Randwerten $v(a) = \alpha$ uind $v(b) = \beta$ und der Nebenbedingungen $v(x) \in K$ für alle $x \in \overline{I}$, wobei $\emptyset \neq K \subset \mathbb{R}^N$ abgeschlossen sei mit $\alpha, \beta \in K$ und $\alpha \neq \beta$. Wir nehmen an, dass die Menge $\mathcal{C}(\alpha, \beta, K)$ nicht leer ist, d.h. es gibt mindestens eine solche Sobolevkurve mit Werten in K, die α und β verbinden. Das ist keine überflüssige Annahme; denn die vorgegebenen Randpunkte α und β könnten in verschiedenen Zusammenhangskomponenten von K liegen, was bedeutet, dass es noch nicht einmal eine *stetige* Verbindungskurve zwischen diesen Randpunkten in K gibt, so dass die Klasse $\mathcal{C}(\alpha, \beta, K)$ in dem Fall tatsächlich leer wäre.

Für den Integranden gelte $F \in C^0(\mathbb{R}^N \times (\mathbb{R}^N \setminus \{0\}))$ und die Homogenitätsbedingung

$$F(z, tp) = tF(z, p) \quad \forall\ (z, p) \in \mathbb{R}^N \times (\mathbb{R}^N \setminus \{0\}), t > 0. \tag{H}$$

Dies liefert uns die Möglichkeit, F durch den Wert 0 auf den Ganzraum fortzusetzen; wir arbeiten von nun an mit dieser stetigen Fortsetzung und nennen sie weiterhin $F \in C^0(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N)$. In einer Übungsaufgabe zeigt man, dass die 1–Homogenität (H) äquivalent zu der Forderung ist, dass $\mathcal{F}$ *parameterinvariant* ist, d.h. für alle orientierungserhaltenden C^1-Diffeomorphismen $\tau : \bar{J} \longrightarrow \overline{I}$ gilt

$$\mathcal{F}_I(v) = \mathcal{F}_J(v \circ \tau).$$

Aus der Homogenitätsbedingung (H) folgt durch Differentiation nach t und nach p

$$F_p(z, tp) \cdot p = F(z, p) \quad \text{und} \quad F_p(z, tp) = F_p(z, p) \quad \forall\ t > 0,$$

und daraus $F_{pp}(z, tp)p = 0$ für alle $t > 0$, also insbesondere

$$F_{pp}(z, p)p = 0.$$

Das bedeutet, dass F_{pp} nicht positiv definit sein kann, sondern sich maximal nur fordern lässt, dass

$$F_{pp}(z,p)|_{p^\perp} \geq M_1\, Id \quad \text{mit } M_1 > 0.$$

Außerdem muss man aufgrund der 1–Homogenität von $F(z,\cdot)$ im Allgemeinen mit Singularitäten von F in $p=0$ rechnen. Damit ergibt sich die Schwierigkeit, dass sich die Sätze 3.5 (Unterhalbstetigkeit), 3.6 (Existenz) und 4.1 (Regularität) *nicht* direkt anwenden lassen.

Beispiel $\boxed{5.1}$
Das Längenfunktional im Euklidischen lautet

$$\mathcal{L}(v) := \int_I |v'(x)|\,\mathrm{d}x,$$

für den Integranden gilt $F = F(p) = |p|$, er ist also in $p=0$ nicht glatt.

Beispiel $\boxed{5.2}$
In der Riemannschen Geometrie lautet das Längenfunktional dagegen

$$\mathcal{L}_g(v) := \int_I \sqrt{g_{ik}(v(x))v'^i(x)v'^k(x)}\,\mathrm{d}x,$$

wobei die Matrix $(g_{ik}(z))_{ik}$ für alle z positiv definit ist. Aufgrund der Wurzel ist der Integrand $F(z,p) = \sqrt{g_{ik}(z)p^ip^k}$ auch hier in $p=0$ nicht glatt.

Beispiel $\boxed{5.3}$
In der *Geometrischen Optik* spielen Finslersche Funktionale $\mathcal{L}_F$ mit Integranden

$$F(z,p) = \begin{cases} F(z,\frac{p}{|p|})|p| =: \omega(z,p)|p| & \text{für } p \neq 0 \\ 0 & \text{für } p = 0 \end{cases}$$

eine wichtige Rolle. Dabei entspricht $\omega \equiv 1$ einem isotropen, homogenen optischen Medium, $\omega = \omega(z)$ bedeutet ein isotropes, aber inhomogenes Medium, und der allgemeine Fall $\omega = \omega(z,p)$ beschreibt ein anisotropes, inhomogenes Medium.

Weitere Beispiele für Anwendungen von parametrischen Variationsproblemen sind in der Physik die Untersuchung anisotroper Phasenübergänge, siehe z.B. [102, Ch. 5], in der Mathematik die Finslergeometrie, auf der die *geometrische Optik* beruht, und in jüngerer Zeit in der Numerik die numerische Bildverarbeitung und Flächenmodellierung [10].

Unser Ziel ist es nun, Aussagen über die Existenz eines Minimierers zu treffen. Dazu stellen wir neben der Stetigkeit und 1–Homogenität noch zwei weitere Forderungen an den Integranden F in (5.1):

$$p \mapsto F(z,p) \quad \text{sei konvex,} \tag{C}$$

und es gebe $m_1, m_2 \in \mathbb{R}$ mit $0 < m_1 \leq m_2$, so dass

$$m_1|p| \leq F(z,p) \leq m_2|p| \quad \forall\ (z,p) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N. \tag{D}$$

Falls K zusätzlich auch beschränkt ist, genügt es, für die Bedingung (D) zu fordern, dass $F(z,p) > 0$ für alle $p \neq 0$, denn dann gilt wegen (H) für alle $(z,p) \in K \times (\mathbb{R}^N \setminus \{0\})$

$$m_1|p| := \min_{K\times S^{N-1}} F(\cdot,\cdot)|p| \leq F(z,\frac{p}{|p|})|p| = F(z,p) \leq \max_{K\times S^{N-1}} F(\cdot,\cdot)|p| =: m_2|p|.$$

(Für $p = 0$ gilt sowieso $m_1|p| \le F(z,p) \le m_2|p|$ für alle $z \in \mathbb{R}^N$.)

Für den Beweis der Existenz von Minimierern bieten sich zwei Möglichkeiten an: Man kann das Variationsproblem

$$\mathcal{E}(v) := \frac{1}{2}\int_I [F(v(x),v'(x))]^2\,\mathrm{d}x \;\longrightarrow\; \text{min!}$$

betrachten, um dann Rückschlüsse auf die Minimierung von $\mathcal{F}$ zu ziehen. Diesen Zugang kann man beispielsweise in der RIEMANNschen Geometrie wählen, um die Existenz von Geodätischen zu beweisen; siehe z.B. [59, Section 5.3].

Wir gehen einen anderen Weg, indem wir stattdessen

$$\mathcal{G}(u) := \frac{1}{2}[\mathcal{F}(u)]^2$$

minimieren. Sowohl für $\mathcal{E}$ als auch für den hier betrachteten Zugang über das Hilfsfunktional $\mathcal{G}$ bietet sich der Sobolevraum $W^{1,2}$ an, so dass wir jetzt die Zulassungsklasse $\mathcal{C}(\alpha,\beta,K)$ präzisieren:

$$\mathcal{C}(\alpha,\beta,K) := \{v \in W^{1,2}(I,\mathbb{R}^N) : v(a) = \alpha, v(b) = \beta, v(x) \in K \text{ für alle } x \in \overline{I}\}.$$

Die direkte Minimierung von $\mathcal{G}$ ist schwierig, weshalb wir uns für einen Umweg entscheiden, nämlich für das abgewandelte Variationsproblem

$$\mathcal{G}^\varepsilon(v) := \mathcal{G}(v) + \varepsilon\mathcal{D}(v) \;\longrightarrow\; \text{min!} \quad \text{in } \mathcal{C}(\alpha,\beta,K) \quad \forall\varepsilon > 0,$$

wobei

$$\mathcal{D}(v) := \frac{1}{2}\int_I |v'(x)|^2\,\mathrm{d}x$$

das DIRICHLET-Funktional bezeichnet. Das wird uns zunächst Minimierer $u^\varepsilon \in \mathcal{C}(\alpha,\beta,K)$ liefern, die dann in einem anschließenden Grenzprozess $\varepsilon \to 0$ gegen einen Minimierer u von $\mathcal{G}$ und damit auch von $\mathcal{F}$ konvergieren.

Existenzbeweis für die approximierenden Funktionale $\mathcal{G}^\varepsilon$. Da $F \ge 0$ eine CARATHÉODORY-Funktion (vgl. Bemerkung nach dem Unterhalbstetigkeitssatz Satz 3.5), und $p \mapsto F(z,p)$ konvex ist, ist $\mathcal{F}$ nach Satz 3.5 schwach unterhalbstetig und damit auch $\mathcal{G}^\varepsilon$. Außerdem existiert wegen $\mathcal{C}(\alpha,\beta,K) \ne \emptyset$ eine Minimalfolge $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{C}(\alpha,\beta,K)$ mit

$$\mathcal{G}^\varepsilon(u_k) \xrightarrow{k\to\infty} \inf_{\mathcal{C}(\alpha,\beta,K)} \mathcal{G}^\varepsilon(\cdot) < \infty.$$

Für festes $\varepsilon > 0$ können wir abschätzen

$$\|u_k'\|^2_{L^2(I,\mathbb{R}^N)} \le \frac{2}{\varepsilon}\varepsilon\mathcal{D}(u_k) \le \frac{2}{\varepsilon}\mathcal{G}^\varepsilon(u_k) \le \frac{2}{\varepsilon}\big(\inf_{\mathcal{C}(\alpha,\beta,K)} \mathcal{G}^\varepsilon(\cdot) + 1\big) \quad \forall k \gg 1,$$

so dass zusammen mit der POINCARÉ-Ungleichung (vgl. Bemerkung nach Satz 2.15) folgt, dass die volle Sobolevnorm der u_k unabhängig von k beschränkt ist: $\|u_k\|_{W^{1,2}(I,\mathbb{R}^N)} \le c(\varepsilon)$. (Allerdings explodiert diese Schranke $c(\varepsilon)$ für $\varepsilon \to 0$.)

Wegen der Reflexivität des Banachraums $W^{1,2}(I,\mathbb{R}^N)$, der schwachen Folgenkompaktheit beschränkter Mengen in solchen Räumen (Satz A.10) und wegen des Morreyschen Einbettungssatzes Satz 2.15 folgt die Existenz einer Funktion $u^\varepsilon \in W^{1,2}(I,\mathbb{R}^N)$, so dass für eine Teilfolge $\{u_{k_i}\}_{i\in\mathbb{N}}$

$$\begin{aligned} u_{k_i} &\overset{i\to\infty}{\rightharpoonup} u^\varepsilon \quad \text{in} \quad W^{1,2}(I,\mathbb{R}^N),\\ u_{k_i} &\xrightarrow{i\to\infty} u^\varepsilon \quad \text{in} \quad C^0(\overline{I},\mathbb{R}^N). \end{aligned}$$

Aufgrund der schwachen Unterhalbstetigkeit von $\mathcal{G}^\varepsilon$ ergibt sich

$$\mathcal{G}^\varepsilon(u^\varepsilon) = \inf_{\mathcal{C}(\alpha,\beta,K)} \mathcal{G}^\varepsilon(\cdot);$$

denn da K abgeschlossen ist, ist auch $u^\varepsilon \in \mathcal{C}(\alpha,\beta,K)$.

A priori Schranken an u^ε. Mit dem Ziel einer von $\varepsilon > 0$ unabhängigen oberen Schranke für $\|u^\varepsilon\|_{W^{1,2}(I,\mathbb{R}^N)}$ betrachten wir innere Variationen: Es gilt nämlich

$$\mathcal{G}^\varepsilon(u^\varepsilon) \le \mathcal{G}^\varepsilon(u^\varepsilon(\xi(\cdot,s))) \text{ für alle } s \in (-\sigma_0,\sigma_0), \tag{5.1}$$

wenn $\{\xi(\cdot,s)\}_s$ eine zulässige Parametervariation ist, vgl. Definition 1.14. Da aber $\mathcal{F}$ wegen der Homogenitätsbedingung (H) und damit auch $\mathcal{G}$ parameterinvariant unter solchen Transformationen ist, folgt wegen $\varepsilon > 0$ aus (5.1)

$$\mathcal{D}(u^\varepsilon) \le \mathcal{D}(u^\varepsilon(\xi(\cdot,s))) \text{ für alle } s \in (-\sigma_0,\sigma_0),$$

was auf

$$\partial\mathcal{D}\left(u^\varepsilon, \frac{\partial\xi}{\partial s}(\cdot,0)\right) := \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\Big|_{s=0}\Big[\mathcal{D}\left(u^\varepsilon(\xi(\cdot,s))\right)\Big] = 0 \tag{5.2}$$

führt, und somit auf

$$\partial\mathcal{D}\left(u^\varepsilon,\lambda\right) = 0 \quad \forall\, \lambda \in C_0^\infty(I).$$

Die hierbei genutzte Differenzierbarkeit der Abbildung $s \mapsto \mathcal{D}(u^\varepsilon(\xi(\cdot,s)))$ auf $(-\sigma_0,\sigma_0)$ überprüft man mit der Regularität $u^\varepsilon \in W^{1,2}(I,\mathbb{R}^N)$ direkt durch Untersuchung der Differenzenquotienten. Gleiches gilt für die in Kapitel 1 hergeleitete Erdmann-Gleichung (1.18) aus Proposition 1.19, welche in diesem Fall für für $E(p) := p\cdot D_p - D$, mit $D := \frac{1}{2}p^2$ den Erhaltungssatz

$$E((u^\varepsilon)'(x)) = \frac{1}{2}|(u^\varepsilon)'(x)|^2 \equiv konst. =: \frac{1}{2}k^2(\varepsilon) \quad \text{f.ü. auf } I,$$

liefert. Wegen $\alpha \ne \beta$ gilt

$$|(u^\varepsilon)'| = k(\varepsilon) > 0;$$

denn sonst wäre $(u^\varepsilon)' = 0$ fast überall auf I und damit nach Lemma 2.4 $u^\varepsilon \equiv const.$, was wegen $u^\varepsilon \in \mathcal{C}(\alpha,\beta,K)$ die Gleichheit $\alpha = u^\varepsilon(a) = u^\varepsilon(b) = \beta$ implizit.

Für beliebiges $v \in \mathcal{C}(\alpha,\beta,K)$ können wir nun mit der Definitheitsbedingung (D) nach oben abschätzen

$$\frac{1}{2}m_1^2k^2(\varepsilon)\big(\mathscr{L}^1(I)\big)^2 = \frac{1}{2}m_1^2|(u^\varepsilon)'|^2\big(\mathscr{L}^1(I)\big)^2 \;\le\; \mathcal{G}(u^\varepsilon) \;\le\; \mathcal{G}^\varepsilon(u^\varepsilon) \;\le\; \mathcal{G}^\varepsilon(v) \xrightarrow{\varepsilon\to 0} \mathcal{G}(v),$$

und wir erhalten eine von ε unabhängige Schranke:

$$k^2(\varepsilon) \leq \frac{c}{\big(\mathscr{L}^1(I)\big)^2} \ \text{ für alle } \ \varepsilon \in (0,1]. \tag{5.3}$$

Damit folgt

$$\|(u^\varepsilon)'\|^2_{L^2(I,\mathbb{R}^N)} = k^2(\varepsilon)\int_I \mathrm{d}x = k^2(\varepsilon)\mathscr{L}^1(I) \leq \frac{c}{\mathscr{L}^1(I)} \ \text{ für alle } \ \varepsilon \in (0,1],$$

und mit der Poincaré-Ungleichung schließlich

$$\|u^\varepsilon\|_{W^{1,2}(I,\mathbb{R}^N)} \leq \tilde{c} \ \text{ für alle } \ \varepsilon \in (0,1], \tag{5.4}$$

wobei die Konstante $\tilde{c}$ zwar von $\mathscr{L}^1(I) > 0$ nicht aber von $\varepsilon \in (0,1]$ abhängt.

Der Grenzübergang $\varepsilon \to 0$. Aus der gleichmäßigen Abschätzung (5.4) folgt aus den Sätzen A.10 und 2.15 die Existenz einer Funktion $u \in W^{1,2}(I,\mathbb{R}^N)$ und einer Teilfolge $\varepsilon_j \to 0$, so dass

$$\begin{aligned} u^{\varepsilon_j} &\overset{j\to\infty}{\rightharpoonup} u \quad \text{in} \quad W^{1,2}(I,\mathbb{R}^N), \\ u^{\varepsilon_j} &\xrightarrow{j\to\infty} u \quad \text{in} \quad C^0(\bar{I},\mathbb{R}^N), \end{aligned} \tag{5.5}$$

und damit $u \in \mathcal{C}(\alpha,\beta,K)$, da $K \subset \mathbb{R}^N$ abgeschlossen ist. Außerdem sind die u^{ε_j} gleichmäßig Lipschitz-stetig, denn es gilt nach (5.3)

$$|u^\varepsilon(x) - u^\varepsilon(y)| \leq k(\varepsilon)|x-y| \leq c|x-y| \quad \forall\, x,y \in \bar{I}, \tag{5.6}$$

und diese Eigenschaft überträgt sich wegen der gleichmäßigen Konvergenz in (5.5) auch auf u, also $u \in C^{0,1}(\bar{I},\mathbb{R}^N) \simeq W^{1,\infty}(I,\mathbb{R}^N)$, vgl. Satz 2.7.

Die Grenzfunktion u minimiert $\mathcal{G}$ und damit auch $\mathcal{F}$. Um noch zu zeigen, dass u das Funktional $\mathcal{G}$ (und damit wie ursprünglich gewünscht $\mathcal{F}$) minimiert, machen wir zunächst die Beobachtung, dass die Abbildung $\varepsilon \mapsto \mathcal{G}^\varepsilon(u^\varepsilon)$ monoton steigend ist, denn für $\varepsilon_1 \leq \varepsilon_2$ gilt wegen der Minimalität von u^{ε_1} für $\mathcal{G}^{\varepsilon_1}$

$$\mathcal{G}^{\varepsilon_1}(u^{\varepsilon_1}) \leq \mathcal{G}^{\varepsilon_1}(u^{\varepsilon_2}) \leq \mathcal{G}^{\varepsilon_2}(u^{\varepsilon_2}).$$

Da $\mathcal{G}^\varepsilon(u^\varepsilon)$ zusätzlich nach unten beschränkt ist, existiert somit der Grenzwert

$$\gamma := \lim_{\varepsilon\to 0} \mathcal{G}^\varepsilon(u^\varepsilon) \geq 0.$$

Für ein beliebiges $v \in \mathcal{C}(\alpha,\beta,K)$ schätzen wir ab:

$$\inf_{\mathcal{C}(\alpha,\beta,K)} \mathcal{G}(\cdot) \ \leq\ \mathcal{G}(u^\varepsilon) \ \leq\ \mathcal{G}^\varepsilon(u^\varepsilon) \ \leq\ \mathcal{G}^\varepsilon(v) = \mathcal{G}(v) + \varepsilon\mathcal{D}(v).$$

Also folgt

$$\inf_{\mathcal{C}(\alpha,\beta,K)} \mathcal{G}(\cdot) \leq \lim_{\varepsilon\to 0} \mathcal{G}^\varepsilon(u^\varepsilon) = \gamma \leq \lim_{\varepsilon\to 0} \mathcal{G}^\varepsilon(v) = \mathcal{G}(v),$$

und dann durch das Bilden des Infimums über alle $v \in C(\alpha,\beta)$ auf der rechten Seite

$$\inf_{\mathcal{C}(\alpha,\beta,K)} \mathcal{G}(\cdot) \leq \liminf_{\varepsilon\to 0} \mathcal{G}(u^\varepsilon) \leq \limsup_{\varepsilon\to 0} \mathcal{G}(u^\varepsilon) \leq \lim_{\varepsilon\to 0} \mathcal{G}^\varepsilon(u^\varepsilon) \ \leq\ \inf_{\mathcal{C}(\alpha,\beta,K)} \mathcal{G}(\cdot),$$

und das bedeutet

$$\gamma = \inf_{\mathcal{C}(\alpha,\beta,K)} \mathcal{G}(\cdot) = \lim_{\varepsilon\to 0} \mathcal{G}(u^\varepsilon). \tag{5.7}$$

Weiter gilt wegen (5.5), der schwachen Unterhalbstetigkeit von $\mathcal{G}$ und (5.7)

$$\inf_{\mathcal{C}(\alpha,\beta,K)} \mathcal{G}(\cdot) \;\le\; \mathcal{G}(u) \;\le\; \liminf_{\varepsilon_j\to 0} \mathcal{G}(u^{\varepsilon_j}) \overset{(5.7)}{=} \inf_{\mathcal{C}(\alpha,\beta,K)} \mathcal{G}(\cdot),$$

so dass u tatsächlich $\mathcal{G}$ minimiert, d.h. $\mathcal{G}(u) = \inf_{\mathcal{C}(\alpha,\beta,K)} \mathcal{G}(\cdot)$, und nach Definition von $\mathcal{G}$ gilt somit auch

$$\mathcal{F}(u) = \inf_{\mathcal{C}(\alpha,\beta,K)} \mathcal{F}(\cdot).$$

Minimierer u hat konstante Geschwindigkeit $|u'|$ und $u^\varepsilon \to u$ stark in $W^{1,2}$. Nun wollen wir noch zeigen, dass auch $|u'(x)| = \mathit{konst.} =: \Gamma$ gilt. Unter der Annahme, dass dies schon bewiesen sei, sehen wir sofort, dass $\Gamma > 0$ gelten muss, denn wäre $\Gamma = 0$, so würde folgen

$$|\alpha - \beta| = |u(a) - u(b)| \le \int_I |u'(x)|\,\mathrm{d}x = 0,$$

was zu der Voraussetzung $\alpha \neq \beta$ ein Widerspruch wäre.

Um nun die Konstanz von $|u'|$ zu zeigen, benutzen wir die Minimalität von u für $\mathcal{G}$ und von u^{ε_j} für $\mathcal{G}^{\varepsilon_j}$ für die Abschätzung

$$\mathcal{G}(u) + \varepsilon_j \mathcal{D}(u^{\varepsilon_j}) \;\le\; \mathcal{G}(u^{\varepsilon_j}) + \varepsilon_j \mathcal{D}(u^{\varepsilon_j}) \;=\; \mathcal{G}^{\varepsilon_j}(u^{\varepsilon_j}) \;\le\; \mathcal{G}^{\varepsilon_j}(u) \;=\; \mathcal{G}(u) + \varepsilon_j \mathcal{D}(u),$$

so dass mit $\varepsilon_j > 0$ folgt

$$\mathcal{D}(u^{\varepsilon_j}) \le \mathcal{D}(u) \qquad \text{für alle} \;\; j \in \mathbb{N}.$$

Da $\mathcal{D}$ aber auch schwach unterhalbstetig ist, ergibt sich

$$\limsup_{j\to\infty} \mathcal{D}(u^{\varepsilon_j}) \le \mathcal{D}(u) \le \liminf_{j\to\infty} \mathcal{D}(u^{\varepsilon_j})$$

und damit

$$\lim_{j\to\infty} \mathcal{D}(u^{\varepsilon_j}) = \mathcal{D}(u),$$

also

$$\|(u^{\varepsilon_j})'\|_{L^2(I,\mathbb{R}^N)} \xrightarrow{j\to\infty} \|u'\|_{L^2(I,\mathbb{R}^N)}.$$

Daraus erhalten wir

$$\|(u^{\varepsilon_j})' - u'\|_{L^2(I,\mathbb{R}^N)} \xrightarrow{j\to\infty} 0, \tag{5.8}$$

denn es gilt wegen der schwachen Konvergenz $u^{\varepsilon_j} \rightharpoonup u$ in $W^{1,2}(I,\mathbb{R}^N)$ für $j \to \infty$

$$\mathcal{D}(u^{\varepsilon_j} - u) = \mathcal{D}(u^{\varepsilon_j}) + \mathcal{D}(u) - \int_I (u^{\varepsilon_j})'(x)\cdot u'(x)\,\mathrm{d}x \xrightarrow{j\to\infty} \mathcal{D}(u) + \mathcal{D}(u) - \int_I u'(x)\cdot u'(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

Wegen (5.8) gilt

$$|(u^{\varepsilon_j})'(x)| \xrightarrow{j\to\infty} |u'(x)| \quad \mathscr{L}^1\text{-fast überall in } I,$$

und da $|(u^{\varepsilon_j})'(x)| = k(\varepsilon_j) \leq c$ ist, folgt wie behauptet[1]

$$|u'(x)| = konst. \quad \mathscr{L}^1\text{-fast überall in } I.$$

Übrigens konvergiert die Folge $\{u^{\varepsilon_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ in diesem Beispiel sogar stark gegen u. Wir hatten nämlich schon in (5.5) festgestellt, dass $u^{\varepsilon_j} \xrightarrow{j\to\infty} u$ in $C^0(\overline{I}, \mathbb{R}^N)$, und damit sicher auch in $L^2(I, \mathbb{R}^N)$. Zusammen mit (5.8) folgt dann

$$\|u^{\varepsilon_j} - u\|_{W^{1,2}(I,\mathbb{R}^N)} \xrightarrow{j\to\infty} 0.$$

Die Ergebnisse dieses Abschnittes fassen wir nun in dem folgenden Satz zusammen:

Satz 5.1 [Existenz von Lipschitz-Minimierern]
Sei $I = (a, b)$ mit $-\infty < a < b < +\infty$, und

$$\mathcal{F}(u) := \int_I F(u(x), u'(x))\,\mathrm{d}x,$$

wobei $F \in C^0(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N)$ folgende Bedingungen erfüllen soll:

$$F(z, tp) = tF(z, p) \quad \forall\, t > 0\,,\ (z, p) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N, \tag{H}$$

$$\exists 0 < m_1 \leq m_2 :\ m_1|p| \leq F(z, p) \leq m_2|p| \quad \forall\, (z, p) \in R^N \times \mathbb{R}^N, \tag{D}$$

$$F(z, \cdot) \text{ ist konvex in } p \text{ für alle } z \in \mathbb{R}^N. \tag{C}$$

Außerdem sei $K \subset \mathbb{R}^N$ nicht-leer und abgeschlossen, und $\alpha, \beta \in K$ mit $\alpha \neq \beta$ und

$$\mathcal{C}(\alpha, \beta, K) := \{v \in W^{1,2}(I, \mathbb{R}^N) \mid v(a) = \alpha,\ v(b) = \beta,\ v(x) \in K \ \ \forall\, x \in \overline{I}\} \neq \emptyset.$$

Dann gibt es ein $u \in \mathcal{C}(\alpha, \beta, K) \cap C^{0,1}(\bar{I}, \mathbb{R}^N)$ mit

$$\mathcal{F}(u) = \inf_{\mathcal{C}(\alpha,\beta,K)} \mathcal{F}(\cdot) \qquad \text{und} \qquad |u'(x)| = konst. > 0 \quad \text{für fast alle } x \in I.$$

Bemerkung:
Für die Regularität gibt es grundsätzlich zwei Probleme:

(i) Aufgrund der Bedingung (H) ist F im Allgemeinen nicht glatt, die maximal mögliche Forderung lautet hier $F \in C^2(\mathbb{R}^N \times (\mathbb{R}^N \backslash \{0\}))$.

(ii) Außerdem ist F_{pp} wegen der 1-Homogenität auch nicht positiv definit, denn es gilt $F_{pp}(z, p)p = 0$. Hier lässt sich, wie bereits bemerkt, maximal fordern: $F_{pp}|_{p^\perp} > M_1\, Id$.

[1] Tatsächlich gibt es für jedes $j \in \mathbb{N}$ eine Nullmenge $N_j \subset I$, so dass $|(u^{\varepsilon_j})'(x)| = k(\varepsilon_j)$ für alle $x \in I \setminus N_j$. Die Vereinigungsmenge $N := \bigcup_{j\in\mathbb{N}} N_j$ ist ebenfalls eine Nullmenge. Weiterhin existiert eine weitere Nullmenge $M \subset I$, so dass $(u^{\varepsilon_j})'(x) \to u'(x)$ für alle $x \in I \setminus M$. Dann ist die Vereinigung $\Omega := N \cup M$ ebenfalls eine Nullmenge, und wir haben $k(\varepsilon_j) \to |u'(x)|$ für alle $x \in I \setminus \Omega$. Schließlich folgt aus der gleichmäßigen Abschätzung $k(\varepsilon_j) \leq c$ für alle $j \in \mathbb{N}$ die Existenz einer Teilfolge $j_l \to \infty$ für $l \to \infty$, so dass $k(\varepsilon_{j_l}) \to k_0 \in [0, c]$ und damit $|u'(x)| = k_0$ für alle $x \in I \setminus \Omega$.

Man kann aber zeigen, dass aus diesen Maximalforderungen $u \in C^2(I, \mathbb{R}^N)$ folgt, falls $K = \mathbb{R}^N$ – natürlich ohne Satz 4.1 direkt dabei zu benutzen! Für den Fall, dass K eine *echte* Teilmenge von $\mathbb{R}^N$ ist, stoßen wir auf Schwierigkeiten mit der Regularität der Lösung dort, wo die Lösung den Rand von K berührt, so dass man nicht in alle Richtungen variieren kann. Solche Probleme werden wir in einem einfachen Setting für das einseitige skalare Hindernisproblem in Abschnitt 5.2 behandeln.

Der Beweis von Satz 5.1 beruht auf einer Methode, die für parametrische Variationsprobleme für zweidimensionale Flächen in beliebiger Kodimension entwickelt wurde, siehe [55],[56]. Zum Abschluss formulieren wir eine Version dieses Existenzresultats für Flächen im $\mathbb{R}^3$:

Satz 5.2
Sei $B := B_1(0) \subset \mathbb{R}^2$

$$\mathcal{F}(u) := \int_B F(u(x,y), u_x(x,y) \wedge u_y(x,y))\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

wobei $F \in C^0(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)$ folgende Bedingungen erfüllen soll:

$$F(z, tp) = tF(z,p) \quad \forall\ t \geq 0\,,\ (z,p) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \tag{H}$$

$$\exists 0 < m_1 \leq m_2 :\ m_1|p| \leq F(z,p) \leq m_2|p| \quad \forall\ (z,p) \in R^3 \times \mathbb{R}^3 \tag{D}$$

$$F(z,\cdot) \text{ ist konvex in } p \text{ für alle } z \in \mathbb{R}^3. \tag{C}$$

Außerdem sei $K \subset \mathbb{R}^3$ nicht-leer, abgeschlossen und zusammenhängend, Γ eine rektifizierbare Jordan*kurve in K und*

$$\begin{aligned} C_K(\Gamma) \ &:= \ \{v \in W^{1,2}(B, \mathbb{R}^3) \cap C^0(\partial B, \mathbb{R}^3) \mid v|_{\partial B} : \partial B \to \Gamma \text{ surjektiv}, \\ &\qquad v \text{ schwach monoton}, v(x) \in K \text{ fast überall in } \overline{I}\,\} \neq \emptyset. \end{aligned}$$

Dann gibt es ein $u \in C_K(\Gamma)$ mit

$$\mathcal{F}(u) = \inf_{C_K(\Gamma)} \mathcal{F}(\cdot) \qquad \text{und} \qquad |u_x| = |u_y|\,,\ u_x \cdot u_y = 0 \quad \text{fast überall auf } B.$$

5.2 Hindernisproblem

Wie in Satz 3.6 fordern wir für $q \in (1,\infty)$ und geeignete $0 < c_0 \leq c_1$, $0 \leq c_2$ die Voraussetzungen

$$\begin{aligned} &F, F_p \in C^1(\overline{I} \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N), \\ &c_0|p|^q \leq F(x,z,p) \leq c_1|p|^q + c_2 \quad \forall\ (x,z,p) \in \overline{I} \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N, \\ &F(x,z,\cdot) \text{ konvex in } p, \end{aligned}$$

so dass für das Variationsproblem

$$\mathcal{F}(v) := \int_I F(x, v(x), v'(x))\,\mathrm{d}x \ \longrightarrow\ \min!$$

in der Klasse

$$\mathcal{C}(\alpha,\beta) := \{v \in W^{1,q}(I, \mathbb{R}^N) \mid v(a) = \alpha,\ v(b) = \beta\}$$

ein $w \in \mathcal{C}(\alpha, \beta)$ existiert mit

$$\mathcal{F}(w) = \inf_{\mathcal{C}(\alpha,\beta)} \mathcal{F}(\cdot).$$

Nun betrachten wir das Problem

$$\mathcal{F}(u) \longrightarrow \text{min!} \quad \text{in } \mathcal{K},$$

wobei $\mathcal{K} \subset \mathcal{C}(\alpha, \beta)$ nicht leer, konvex und abgeschlossen bezüglich der $W^{1,q}$-Norm ist. Die Menge $\mathcal{C}(\alpha, \beta)$ selbst ist ebenfalls nicht leer, konvex und abgeschlossen, weil stark konvergente Folgen in $W^{1,q}(I, \mathbb{R}^N)$ wegen des Morreyschen Einbettungssatzes Satz 2.15 und des Teilfolgenprinzips auch bezüglich der C^0-Norm konvergieren. Damit ist auch die Schnittmenge $\mathcal{K} \cap \mathcal{C}(\alpha, \beta)$ nichtleer, konvex und abgesclossen. In der Funktionalanalysis (z.B. [3, Satz 6.13] beweist man, dass konvexe und abgeschlossene Teilmengen eines normierten linearen Raumes auch schwach-folgenabgeschlossen sind; siehe Satz A.12 im Anhang. Damit lässt sich der folgende Existenzsatz leicht beweisen.

Satz 5.3
Unter den obigen Voraussetzungen gibt es ein $u \in \mathcal{K}$ mit $\mathcal{F}(u) = \inf_{\mathcal{K}} \mathcal{F}(\cdot)$.

Beweis. Da $\mathcal{K} \neq \emptyset$, gibt es eine Minimalfolge $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{K}$. Wie im Beweis zu Satz 3.6 beweist man mit Hilfe des polynomialen Wachstums des Integranden F und mit der Poincaré-Ungleichung (siehe Bemerkung nach Satz 2.15) $\|v_k\|_{W^{1,q}(I)} \leq c$, also $v_k \overset{k\to\infty}{\rightharpoonup} u$ in $W^{1,q}(I, \mathbb{R}^N)$ und Satz A.12 liefert $u \in \mathcal{K}$. Die schwache Unterhalbstetigkeit von $\mathcal{F}$ folgt aus Satz 3.5 und daher gilt $\mathcal{F}(u) = \inf_{\mathcal{K}} \mathcal{F}(\cdot)$. □

Liegt der Minimierer u im Inneren der Menge $\mathcal{K}$, so kann man beliebig in alle Richtungen variieren, ohne die zulässige $\mathcal{K}$ zu verlassen, d.h. auch $u + \varepsilon\phi \in \mathcal{K}$ für jedes $\phi \in C_0^\infty(I, \mathbb{R}^N)$ und $|\varepsilon| \ll 1$. Das wiederum führt auf das Verschwinden der ersten Variation, $\delta\mathcal{F}(v, \varphi) = 0$ für alle $\varphi \in C_0^\infty(I, \mathbb{R}^N)$, falls die dort auftretenden Integrale existieren, was man z.B. mit Wachstumsbedingungen an $|F_z(x, z, p) + F_p(x, z, p)|$ wie im Regularitätskapitel garantieren kann; siehe die Bedingung (R4) in Satz 4.1.

Falls aber u im Rand der zulässigen Menge $\mathcal{K}$ liegt, dann kann man mitunter nicht in alle Richtungen variieren, was die Regularitätstheorie im Allgmeinen problematisch macht. Es gilt aber immerhin für alle $t \in [0, 1]$ und $v \in \mathcal{K}$, dass

$$(1 - t)u + tv \in \mathcal{K}$$

und daher

$$\mathcal{F}(u) \leq \mathcal{F}((1 - t)u + tv) =: \phi(t).$$

Nun ist $\phi(0) \leq \phi(t)$ für alle $t \in [0, 1]$, also $\phi'(0) \geq 0$, falls ϕ differenzierbar ist in Null, was man wiederum z.B. mit der Wachstumsbedingung (R4) aus Satz 4.1 nachweisen kann. Für alle $v \in \mathcal{K}$ gilt folglich die sogenannte *Variationsungleichung*:

$$\begin{aligned} 0 &\leq \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0} \mathcal{F}((1 - t)u + tv) \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0} \int_I F(x, (1 - t)u(x) + tv(x), (1 - t)u'(x) + tv'(x))\,\mathrm{d}x \qquad (5.9) \\ &= \int_I \Big(F_p(x, u(x), u'(x)) \cdot \big(v'(x) - u'(x)\big) + F_z(x, u(x), u'(x)) \cdot \big(v(x) - uv(x)\big)\Big)\,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Einseitiges Hindernisproblem für das Dirichlet-Funktional. Als Beispiel betrachten wir von nun an das folgende Modellproblem, das als *einseitiges Hindernisproblem* bezeichnet wird. Sei $N = 1$, $I = (a, b)$ mit $\mathscr{L}^1(I) < \infty$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Zu untersuchen ist das Variationsproblem

$$\mathcal{D}(v) = \frac{1}{2} \int_I |v'(x)|^2 \,\mathrm{d}x \longrightarrow \text{ min!}$$

in der Klasse

$$\mathcal{K}_h \equiv \mathcal{C}(\alpha, \beta, h) := \{v \in W^{1,2}(I, \mathbb{R}) : v(a) = \alpha, v(b) = \beta, v(x) \geq h(x) \;\; \forall x \in \overline{I}\},$$

wobei $h \in C^0(\overline{I})$ mit $h(a) < \alpha$ und $h(b) < \beta$ sei (vgl. auch Beispiel 1.13).

Leider ist von der Lösung u keine hohe Regularität zu erhoffen. Selbst im Fall $h \in C^\infty(I)$ oder $h \in C^\omega(I)$ ist im Allgemeinen nur $u \in C^{1,1}(I)$ zu erwarten, siehe Abbildung 5.1 links. Im Fall $h \in C^{0,1}(\overline{I})$ wird im Allgemeinen höchstens nur $u \in C^{0,1}(\overline{I})$ gelten, siehe Abbildung 5.1 rechts.

Abbildung 5.1: Links: Hindernis $h \in C^\infty$, aber Lösung u nur in $C^{1,1}$. Rechts: Hindernis $h \in C^{0,1}$ und Lösung $u \in C^{0,1}$.

Wir beweisen zuerst die Existenz und Eindeutigkeit eines Minimierers unseres Modellproblems mit Hilfe der vorangegangenen Sätze. Ohne zusätzliche Voraussetzungen an das Hindernis h zeigen wir dann, dass die Lösung u eine konkave Funktion ist, und identifizieren u danach mit der sogenannten konkaven Einhüllenden des Hindernisses und der Randdaten. Aus der Konkavität von u schließt man dann auch die Lipschitzstetigkeit der Lösung. Das ist die optimale Regularität, wenn man keine zusätzlichen Annahmen an das Hindernis stellt. Wenn jedoch die einseitigen Ableitungen des Hindernisses h von links und rechts an jeder Stelle existieren und die linksseitige Ableitung von h stets nicht größer als die rechtsseitige Ableitung von h ist, dann kann man zeigen, dass die Lösung von der Klasse $C^1(\overline{I})$ ist. Ist $h \in W^{2,2}(I)$, dann gilt auch $u \in W^{2,2}(I)$, und schließlich folgt aus der Annahme $h \in W^{2,\infty}(I)$ die optimale Regularität $u \in W^{2,\infty}(\overline{I}) \simeq C^{1,1}(\overline{I})$ (vgl. Satz 2.7).

Existenz und Eindeutigkeit von Minimierern. Die zulässige Menge $\mathcal{K}_h$ ist konvex, denn $C(\alpha, \beta)$ ist konvex und für $v_1, v_2 \geq h$ gilt $tv_1 + (1-t)v_2 \geq h$ für alle $t \in [0, 1]$. $\mathcal{K}_h$ ist abgeschlossen bezüglich der $W^{1,2}$-Norm; denn für $v_k \xrightarrow{k\to\infty} v$ in $W^{1,2}(I)$ gilt nach Satz 2.15 $v_k \xrightarrow{k\to\infty} v$ in $C^0(\overline{I})$ und $v(x) = \lim_{k\to\infty} v_k(x) \geq h(x)$ für alle $x \in \overline{I}$. Dass $\mathcal{K}_h$ nicht leer ist, sieht man z.B. durch folgende Konstruktion ein. Da $\overline{I}$ kompakt ist, ist $h \in C\left(\overline{I}\right)$

beschränkt, also $h\,(x) \leq \|h\|_\infty < \infty$ für alle $x \in \overline{I}$. Setze

$$C := \max\{\|h\|_\infty, \alpha + 1, \beta + 1\}.$$

Wegen $\alpha > h\,(a)$ und $\beta > h\,(b)$ existiert ein $0 < \varepsilon < \frac{b-a}{2}$ mit $h\,(x) < \alpha$ für $x \in [a, a+\varepsilon]$ und $h\,(x) < \beta$ für $x \in [b-\varepsilon, b]$. Nun definieren wir

$$v : \overline{I} \to \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} \alpha + \frac{C-\alpha}{\varepsilon}\,(x-a)\,, & \text{falls } x \in [a, a+\varepsilon]\,, \\ C, & \text{falls } x \in [a+\varepsilon, b-\varepsilon]\,, \\ \beta + \frac{C-\beta}{\varepsilon}\,(b-x)\,, & \text{falls } x \in [b-\varepsilon, b]\,. \end{cases}$$

Man sieht leicht, dass v Lipschitz stetig ist (also $v \in W^{1,\infty}(I) \subset W^{1,2}(I)$) mit

$$\begin{cases} v\,(x) = \alpha + \frac{C-\alpha}{\varepsilon}\,(x-a) \geq \alpha > h\,(x)\,, & \text{falls } x \in [a, a+\varepsilon]\,, \\ v\,(x) = C \geq h\,(x)\,, & \text{falls } x \in [a+\varepsilon, b-\varepsilon]\,, \\ v\,(x) = \beta + \frac{C-\beta}{\varepsilon}\,(b-x) \geq \beta > h\,(x)\,, & \text{falls } x \in [b-\varepsilon, b]\,. \end{cases}$$

Da außerdem $v\,(a) = \alpha$ und $v\,(b) = \beta$ gilt, ist $v \in \mathcal{K}_h \neq \emptyset$.

Damit kann Satz 5.3 angewandt werden, es gibt also ein $u \in \mathcal{K}_h$ mit $\mathcal{D}(u) = \inf_{\mathcal{K}} \mathcal{D}(\cdot)$. Zudem ist dieser Minimierer u eindeutig, da der Integrand des Dirichlet-Funktionals strikt konvex in der p-Variable ist, was unter der Annahme, es gäbe einen zweiten Minimierer $v \in \mathcal{K}_h$ mit $\mathcal{D}(v) = \mathcal{D}(u)$ wegen der Konvexität der Menge $\mathcal{K}_h$ zum folgenden Widerspruch führt:

$$\mathcal{D}(u) \leq \mathcal{D}(u/2 + v/2) < \frac{1}{2}\mathcal{D}(u) + \frac{1}{2}\mathcal{D}(v) = \mathcal{D}(u).$$

Berührmenge. Für die folgenden Regularitätsbetrachtungen definieren wir die von der Lösung u und dem Hindernis h abhängige *Berührmenge*

$$\mathcal{B}_u \equiv \mathcal{B}(u, h) := \{x \in \overline{I} \mid u(x) = h(x)\}.$$

$\mathcal{B}_u$ ist abgeschlossen, da $u, h \in C^0(\overline{I})$, und wegen $h(a) < \alpha = u(a)$, $h(b) < \beta = u(b)$ gilt $\mathcal{B}_u \subset I$. Daher ist $\overline{I} \setminus \mathcal{B}_u$ relativ offen in $\overline{I}$ und nicht leer.

Glattheit und Linearität abseits der Berührmenge. Wir behaupten, dass $u \in C^\infty(\overline{I} \setminus \mathcal{B}_u)$ und $u''(x) = 0$ für alle $x \in \overline{I} \setminus \mathcal{B}_u$, d.h. die Lösung u ist affin linear, wo u das Hindernis nicht berührt.

Sei dazu $x_0 \in I \setminus \mathcal{B}_u$, so dass

$$u(x_0) - h(x_0) > 0.$$

Dann gibt es eine Umgebung $U(x_0) \subset I \setminus \mathcal{B}_u$ und $m = m(x_0) > 0$, so dass

$$u(x) - h(x) \geq m > 0 \qquad \forall x \in U(x_0).$$

Für jedes $\varphi \in C_0^\infty(U(x_0))$ gibt es ein $\varepsilon_0(\varphi, m)$, so dass für alle $|\varepsilon| < \varepsilon_0$ gilt

$$u(x) + \varepsilon\varphi(x) - h(x) \geq \frac{1}{2}m \qquad \forall x \in U(x_0) \quad \Rightarrow \quad u + \varepsilon\varphi \in \mathcal{K}_h.$$

Damit ist

$$\mathcal{D}(u) \leq \mathcal{D}(u + \varepsilon\varphi) \quad \Rightarrow \quad \mathcal{D}_{U(x_0)}(u) \leq \mathcal{D}_{U(x_0)}(u + \varepsilon\varphi),$$

und durch den direkten Nachweis der Existenz der in der ersten Variation auftretenden Integrale folgt

$$0 = \delta\mathcal{D}_{U(x_0)}(u,\varphi) = \int_{U(x_0)} u'(x)\varphi'(x)\,\mathrm{d}x \quad \forall\ \varphi \in C_0^\infty(U(x_0)).$$

Nach Lemma 1.10 bedeutet das $u'(x) \equiv c$ fast überall auf $U(x_0)$ und damit stimmt u' fast überall mit einer stetigen und damit beschränkten Funktion überein, so dass $u' \in W^{1,\infty}(U(x_0)) \simeq C^{0,1}(\overline{U(x_0)})$. Also ist $u''(x) = 0$ fast überall auf $U(x_0)$ und u selbst ist affin linear auf $U(x_0)$. Da $x_0 \in I \setminus \mathcal{B}_u$ beliebig gewählt war, ist damit u auf $I \setminus \mathcal{B}_u$ affine linear und wegen der Stetigkeit von u damit auch auf $\overline{I} \setminus \mathcal{B}_u$, da nach Voraussetzung $h(a) < \alpha$ und $h(b) < \beta$ ein $\varepsilon > 0$ existiert, so dass $[a, a+\varepsilon] \cup [b-\varepsilon, b] \cap \mathcal{B}_u = \emptyset$.

Variationsungleichung wird mittels Kontaktmaß zu einer Gleichung.
Für $\mathcal{F} = \mathcal{D}$ folgt aus der Variationsungleichung (5.9)

$$\int_I u'(x)\Big(v'(x) - u'(x)\Big)\,\mathrm{d}x \geq 0 \qquad \forall\ v \in \mathcal{K}_h. \tag{5.10}$$

Wir wählen $v := u + \varphi$ mit $\varphi \in C_0^\infty(I, \mathbb{R}^+)$, wobei $\mathbb{R}^+ := [0,\infty)$, dann ist $v(x) \geq h(x)$ und $v \in \mathcal{K}_h$, d.h.

$$\int_I u'(x)\varphi'(x)\,\mathrm{d}x \geq 0 \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(I, \mathbb{R}^+). \tag{5.11}$$

Mit der folgenden funktionalanalytischen Argumentation nach L. Schwartz, [95, S. 29, 30] kann man die Variationsungleichung (5.11) durch eine Differentialgleichung in schwacher Form (siehe (5.12) und (5.13)) ersetzen. Dazu wähle $\sigma > 0$ so klein, dass die Umgebung $B_\sigma(\mathcal{B}_u)$ der Berührmenge $\mathcal{B}_u$ noch ganz im Intervall I enthalten ist, was wegen $\mathcal{B}_u \subset\subset I$ möglich ist. Dazu nehmen wir Funktionen $\eta_k \in C_0^\infty(B_\sigma(\mathcal{B}_u))$ mit $\eta_k \xrightarrow{k\to\infty} 0$ in $C^0(\overline{I})$. Außerdem sei $\phi \in C_0^\infty(I)$ mit $\phi(x) = 1$ für alle $x \in B_\sigma(\mathcal{B}_u)$ und $\phi \geq 0$, was man z.B. durch eine Faltung der charakteristischen Funktion $\chi_{B_{\sigma+\varepsilon}(\mathcal{B}_u)}$ für ein genügend kleines $\varepsilon > 0$ erreichen kann. Für $\varepsilon_k := \|\eta_k\|_{C^0(\overline{I})}$ gilt dann

$$\begin{aligned} -\varepsilon_k\phi(x) = -\varepsilon_k \leq \eta_k(x) \leq \varepsilon_k = \varepsilon_k\phi(x) &\text{ für alle } x \in B_\sigma(\mathcal{B}_u), \\ -\varepsilon_k\phi(x) \leq \eta_k(x) = 0 \leq \varepsilon_k\phi(x) &\text{ für alle } x \in \overline{I} \setminus B_\sigma(\mathcal{B}_u), \end{aligned}$$

so dass

$$-\varepsilon_k\phi \leq \eta_k \leq \varepsilon_k\phi \qquad \text{auf } I \text{ für alle } k \in \mathbb{N}.$$

Daraus folgt

$$\varphi^+ := \eta_k + \varepsilon_k\phi \geq 0 \quad \text{und} \quad \varphi^- := \varepsilon_k\phi - \eta_k \geq 0 \quad \text{mit } \varphi^\pm \in C_0^\infty(I),$$

und die Variationsungleichung (5.11) liefert dann

$$\int_I u'(x)(\varphi^\pm)'(x)\,\mathrm{d}x \geq 0$$

beziehungsweise

$$-\varepsilon_k \int_I u'(x)\phi'(x)\,\mathrm{d}x \;\leq\; \int_I u'(x)\eta_k'(x)\,\mathrm{d}x \;\leq\; \varepsilon_k \int_I u'(x)\phi'(x)\,\mathrm{d}x.$$

Wegen $\varepsilon_k \to 0$ gehen die äußeren Terme gegen Null. Definieren wir nun für $\eta \in C_0^\infty(B_\sigma(\mathcal{B}_u))$ das lineare Funktional T durch

$$T(\eta) := \int_I u'(x)\eta'(x)\,\mathrm{d}x, \tag{5.12}$$

so haben wir gezeigt, dass T stetig in $0 \in C_0^\infty(B_\sigma(\mathcal{B}_u))$ bezüglich der $\|\cdot\|_{C^0(\bar{I})}$–Norm ist, und wegen der Linearität damit stetig auf ganz $(C_0^\infty(B_\sigma(\mathcal{B}_u)), \|\cdot\|_{C^0(\bar{I})})$, vgl. z.B. [3, Lemma 3.1]. Weiterhin liefert die Linearität die gleichmäßige Lipschitz-Abschätzung

$$|T(\varphi_1) - T(\varphi_2)| \le \|T\|_{C_0^\infty(B_\sigma(\mathcal{B}_u))'}\|\varphi_1 - \varphi_2\|_{C^0(\bar{I})} \quad \forall\ \varphi_1,\, \varphi_2 \in C_0^\infty(B_\sigma(\mathcal{B}_u)),$$

Da nach Korollar A.22 der Raum $C_0^\infty(B_\sigma(\mathcal{B}_u))$ dicht in $L^q(B_\sigma(\mathcal{B}_u))$ und damit auch dicht in $C_0^0(B_\sigma(\mathcal{B}_u))$ liegt, folgt aus dieser gleichmäßigen Lipschitz-Abschätzung nach einer Übungsaufgabe, dass T stetig auf den Funktionenraum $C_0^0(B_\sigma(\mathcal{B}_u))$ fortsetzbar ist, d.h.

$$T \in (C_0^0(B_\sigma(\mathcal{B}_u)))^*.$$

Darüberhinaus ist $T(\varphi) \ge 0$ nach der Variationsungleichung (5.11) für alle $\varphi \in C_0^\infty(B_\sigma(\mathcal{B}_u), \mathbb{R}^+)$ nichtnegativ, und wegen der stetigen Fortsetzung genauso für alle $\varphi \in C_0^0(B_\sigma(\mathcal{B}_u), \mathbb{R}^+)$, was man sich durch Faltung einer solchen Funktion mit nichtnegativem Faltungskern klar machen kann. T ist also ein positives, stetiges, lineares Funktional auf $C_0^0(B_\sigma(\mathcal{B}_u))$. Der Rieszsche Darstellungssatz Korollar A.18 liefert daher die Existenz eines nichtnegativen, lokal beschränkten und regulären Borelmaßes μ, des sogenannten *Kontaktmaßes*, mit

$$T(\varphi) = \int_{B_\sigma(\mathcal{B}_u)} \varphi(z)\,\mathrm{d}\mu(z) \qquad \forall \varphi \in C_0^0(B_\sigma(\mathcal{B}_u)). \tag{5.13}$$

Insbesondere gilt damit

$$\int_I u'(x)\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = T(\varphi) = \int_{B_\sigma(\mathcal{B}_u)} \varphi(z)\,\mathrm{d}\mu(z) \qquad \forall \varphi \in C_0^\infty(B_\sigma(\mathcal{B}_u)). \tag{5.14}$$

Träger des Kontaktmaßes μ. Wir behaupten nun, dass $\operatorname{supp}\mu \subset \mathcal{B}_u$ ist. Allgemein kann man den Träger $\operatorname{supp}\mu \subset \mathscr{M}$ eines Borelmaßes μ auf einem separablen metrischen Raum $\mathscr{M}$ folgendermaßen charakterisieren

$$\operatorname{supp}\mu := \mathscr{M} \setminus \{x \in \mathscr{M} :\ \text{es gibt ein } r > 0, \text{ so dass } \mu(B_r(x)) = 0\}.$$

Bei uns ist $\mathscr{M} := B_\sigma(\mathcal{B}_u)$, und zu einem beliebigen $x \in B_\sigma(\mathcal{B}_u) \setminus \mathcal{B}_u$ existiert ein Radius $r > 0$, so dass $B_r(x) \subset\subset B_\sigma(\mathcal{B}_u)\setminus\mathcal{B}_u$. Wähle dazu eine Funktion $\varphi \in C_0^\infty(B_\sigma(\mathcal{B}_u)\setminus\mathcal{B}_u, \mathbb{R}^+) \subset C_0^\infty(I \setminus \mathcal{B}_u, \mathbb{R}^+)$ mit $\varphi \equiv 1$ auf $B_r(x)$, so dass dann mit einer partiellen Integration folgt

$$\begin{aligned} 0 \le \mu(B_r(x)) &= \int_{B_r(x)} \mathrm{d}\mu = \int_{B_r(x)} \varphi(z)\,\mathrm{d}\mu(z) \\ &\le \int_{B_\sigma(\mathcal{B}_u)} \varphi(z)\,\mathrm{d}\mu(z) \overset{(5.14)}{=} \int_I u'(x)\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = \int_{I\setminus\mathcal{B}_u} u'(x)\varphi'(x)\,\mathrm{d}x \\ &= -\int_{I\setminus\mathcal{B}_u} u''(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x = 0, \end{aligned}$$

da u außerhalb der Berührmenge $\mathcal{B}_u$ affin linear ist. Also ist $\mu(B_r(x)) = 0$ und damit $x \notin \operatorname{supp} \mu$. Daraus folgt $\operatorname{supp} \mu \subset \mathcal{B}_u$.

Nun kann man sagen, dass $-u'' \, \mathrm{d}x = \mathrm{d}\mu$ auf $B_\sigma(\mathcal{B}_u)$ im Distributionssinne ist; denn mit einer partiellen Integration ergibt sich für eine beliebige Funktion $\eta \in C_0^\infty(B_\sigma(\mathcal{B}_u))$ wegen $u'' = 0$ außerhalb der Berührmenge $\mathcal{B}_u$

$$\begin{aligned} -\int_{\mathcal{B}_u} u''(x)\eta(x)\,\mathrm{d}x &= -\int_{B_\sigma(\mathcal{B}_u)} u''(x)\eta(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_{B_\sigma(\mathcal{B}_u)} u'(x)\eta'(x)\,\mathrm{d}x = T(\varphi) = \int_{\mathcal{B}_u} \eta(x)\,\mathrm{d}\mu(x), \end{aligned}$$

da $\operatorname{supp} \mu \subset \mathcal{B}_u$.

Konkavität der Lösung u.

Als nächstes zeigen wir, dass u auf I (und damit wegen der Stetigkeit von u auch auf $\overline{I}$) konkav ist, was später auch für den Nachweis höherer Regularität nützlich wird. Dazu machen wir die Widerspruchsannahme, dass es $x, y \in I$ und $\lambda \in (0,1)$ gebe mit

$$u(\lambda x + (1-\lambda)y) < \lambda u(x) + (1-\lambda)u(y).$$

Allein aus dieser Annahme folgt dann $\lambda \in (0,1)$ und $x \neq y$, so dass wir ohne Einschränkung $x < y$ annehmen können. Wir wählen nun eine lineare Funktion l mit $l(x) = u(x)$ und $l(y) = u(y)$. Dann erfüllt $\tilde{u} := u - l$ die Identität $\tilde{u}(x) = \tilde{u}(y) = 0$ und deshalb ist $\tilde{u}(\lambda x + (1-\lambda)y) < 0$. Unser Ziel ist es, diese Ungleichung mit Hilfe der Variationsungleichung (5.11) zum Widerspruch zu führen.

Dazu bemerken wir, dass man mit einem einfachen Approximationsargument mit Faltungen die Variationsungleichung (5.11), welche übrigens auch die verschobene Funktion $\tilde{u}$ erfüllt, auch für Funktionen $\varphi \in W_0^{1,2}(I, \mathbb{R}^+)$ nutzen kann. Wir definieren also die Testfunktion $\tilde{\varphi} \in W_0^{1,2}(I, \mathbb{R}^+)$ durch

$$\tilde{\varphi}(t) := \begin{cases} -\min\{\tilde{u}(t), 0\} & \text{für } \; t \in (x,y) \\ 0 & \text{für } \; t \in \overline{I} \setminus (x,y) \end{cases}$$

und erhalten aus (5.11)

$$\begin{aligned} 0 \leq \int_x^y \tilde{u}'(x)\tilde{\varphi}'(x)\,\mathrm{d}x &= \int_{[x,y]\cap\{\tilde{u}>0\}} \tilde{u}'(x)\tilde{\varphi}'(x)\,\mathrm{d}x + \int_{[x,y]\cap\{\tilde{u}\leq 0\}} \tilde{u}'(x)\tilde{\varphi}'(x)\,\mathrm{d}x \\ = -\int_{[x,y]\cap\{\tilde{u}\leq 0\}} \tilde{\varphi}'^2(x)\,\mathrm{d}x &= -\int_x^y \tilde{\varphi}'^2(x)\,\mathrm{d}x \leq 0, \end{aligned}$$

also $\tilde{\varphi}' = 0$ auf (x,y). Das bedeutet aber nach Lemma 2.4, dass $\tilde{\varphi}$ konstant auf (x,y) ist. Aus $\tilde{\varphi}(x) = \tilde{\varphi}(y) = 0$ und der Stetigkeit von $\tilde{\varphi}$ auf ganz I erhalten wir sofort $\tilde{\varphi} = 0$ und damit $\tilde{u} \geq 0$. Dies ist ein Widerspruch zu $\tilde{u}(\lambda x + (1-\lambda)y) < 0$.

Lösung u ist die konkave Einhüllende von Hindernis h und Randwerten α und β. Nun zeigen wir, dass u die *konkave Einhüllende* der Funktion

$$\tilde{h}(x) := \begin{cases} \alpha & \text{für } x = a \\ h(x) & \text{für } x \in (a,b) \\ \beta & \text{für } x = b \end{cases}$$

ist.

Definition 5.4 [KONKAVE EINHÜLLENDE]
Die konkave Einhüllende von $\tilde{h}$ ist die kleinste konkave Funktion i mit $i \geq \tilde{h}$, d.h.

$$i(x) := \inf\{v(x) \mid v \text{ konkav}, v \geq \tilde{h}\}.$$

Man kann leicht in einer Übungsaufgabe zeigen, dass i selbst konkav ist.

Wir wissen bereits, dass die Lösung u konkav ist, und $u(x) \geq h(x)$, d.h. $u(x) \geq i(x)$. Weiterhin ist $u(x) = h(x) \leq i(x)$ auf $\mathcal{B}_u$ und $u''(x) = 0$ auf $\overline{I} \setminus \mathcal{B}_u$, also ist u dort linear. Auf jedem maximalen Teilintervall $J \subset \overline{I} \setminus \mathcal{B}_u$ (also auf jeder Zusammenhangskomponente J von $\overline{I} \setminus \mathcal{B}_u$) ist $u|_J$ linear und $u|_{\partial J} = \tilde{h}|_{\partial J} \leq i|_{\partial J}$. Damit ist $u|_J \leq i|_J$, da i konkav, und daher $u \leq i$ auf I und somit $u = i$.

LIPSCHITZstetigkeit der Lösung u. Wir zeigen nun, dass $u \in C^{0,1}(\overline{I})$.

Wir führen den Beweis wie in [13, Proposition 2.2.6]. Sei $x \in I$ und $0 < \delta \ll 1$, so dass $\mathcal{B}_u \subset I_\delta := (a + \delta, b - \delta)$. Wir wissen bereits, dass u linear auf $I \setminus \mathcal{B}_u$. Für $x_1, x_2 \in I_{\delta/2}$ definiere

$$x_3 := x_2 + \frac{\delta}{4} \cdot \frac{x_2 - x_1}{|x_2 - x_1|} = x_2\Big(1 + \frac{\delta}{4} \cdot \frac{1}{|x_2 - x_1|}\Big) - \frac{\delta}{4} \cdot \frac{x_1}{|x_2 - x_1|} \in I,$$

Damit ist

$$x_2 = \frac{\delta}{4} \cdot \frac{1}{|x_2 - x_1| + \delta/4}\, x_1 + \frac{|x_2 - x_1|}{|x_2 - x_1| + \delta/4}\, x_3,$$

also ist x_2 als Konvexkombination von $x_1, x_3 \in I$ dargestellt. Unter Ausnutzung der Konkavität von u folgt

$$u(x_2) \geq \frac{\delta/4}{|x_2 - x_1| + \delta/4}\, u(x_1) + \frac{|x_2 - x_1|}{|x_2 - x_1| + \delta/4}\, u(x_3).$$

Also ist

$$\begin{aligned} u(x_1) - u(x_2) &\leq u(x_1)\left(1 - \frac{\delta/4}{|x_2 - x_1| + \delta/4}\right) - \frac{|x_2 - x_1|}{|x_2 - x_1| + \delta/4} u(x_3) \\ &= \frac{|x_2 - x_1|}{|x_2 - x_1| + \delta/4}[u(x_1) - u(x_3)] \\ &\leq \frac{4}{\delta}|x_2 - x_1|\big(|u(x_1)| + |u(x_3)|\big) \\ &\leq \frac{8}{\delta}\|u\|_{C^0(\overline{I})}|x_2 - x_1|. \end{aligned}$$

Durch Vertauschung der Rollen von x_1 und x_2 folgt

$$|u(x_1) - u(x_2)| \leq \frac{8\|u\|_{C^0(\overline{I})}}{\delta}|x_1 - x_2| \qquad \forall x_1, x_2 \in I_{\delta/2}.$$

Für allgemeine Argumente $x, y \in \overline{I}$ folgt nun

$$|u(x) - u(y)| \leq \max\left\{\frac{8\|u\|_{C^0(\overline{I})}}{\delta}, \|u'\|_{C^0([a,a+\delta])}, \|u'\|_{C^0([b-\delta,b])}\right\}|x - y|.$$

Existenz und Anordnung einseitiger Ableitungen von h implizieren, dass $u \in C^1(\overline{I})$.

Für den Beweis der stetigen Differenzierbarkeit von u nehmen wir nun *zusätzlich* an, dass h für alle $x \in I$ überall links– und rechtsseitige Ableitungen $h'(x^-), h'(x^+)$ besitzt, und dass

$$h'(x^-) \leq h'(x^+) \quad \forall\, x \in I. \tag{5.15}$$

(Insbesondere gilt dies, falls h auf I differenzierbar ist.) Für $\xi \in \mathcal{B}_u$ gilt

$$u(x) - u(\xi) \geq h(x) - h(\xi) \quad \forall\, x \in \overline{I}.$$

Folglich ist

$$\frac{u(x) - u(\xi)}{x - \xi} \leq \frac{h(x) - h(\xi)}{x - \xi} \quad \forall\, x \in [a, \xi)\,, \qquad \text{und daher} \qquad u'(\xi^-) \leq h'(\xi^-),$$

wobei wir bemerken, dass die einseitigen Ableitungen von u wegen dessen Konkavität überall existieren; siehe Übungsaufgabe. Andererseits ist

$$\frac{u(x) - u(\xi)}{x - \xi} \geq \frac{h(x) - h(\xi)}{x - \xi} \quad \forall\, x \in (\xi, b]\,, \qquad \text{und daher} \qquad u'(\xi^+) \leq h'(\xi^+).$$

Damit ist mit (5.15)

$$u'(\xi^-) \leq h'(\xi^-) \leq h'(\xi^+) \leq u'(\xi^+).$$

Andererseits ist u konkav, d.h. $u'(\xi^-) \geq u'(\xi^+)$, und es folgt

$$u'(\xi^-) = u'(\xi^+) \;\text{ für alle }\; \xi \in \mathcal{B}_u,$$

also ist u' in jedem Punkt von $\mathcal{B}_u$ und wegen der Linearität auf $\overline{I} \setminus \mathcal{B}_u$ in jedem Punkt von $\overline{I}$ differenzierbar, und infolge des nachstehenden Lemmas (angewandt auf die durch lineare Funktionen geeignet fortgesetzte konvexe Funktion $x \mapsto -u(x) =: f(x)$) erhält man $u \in C^1(\overline{I})$.

Lemma 5.5
Eine differenzierbare konvexe Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist notwendig von der Klasse C^1.

Beweis. Der Beweis[2] wird in zwei Schritten geführt. Zunächst wird gezeigt, dass f' monoton wachsend ist. Anschließend wird ausgeführt, dass für jeden Punkt $x \in \mathbb{R}$ die Grenzübergänge $\lim_{\xi \nearrow x} f'(\xi)$ und $\lim_{\xi \searrow x} f'(\xi)$ den Häufungswert $f'(x)$ besitzen. Zusammen mit der Monotonie ergibt dies die Behauptung.

(i) *f' ist monoton wachsend.* Seien $x, z \in \mathbb{R}$ mit $x < z$. Für $y \in \mathbb{R}$ mit $x < y < z$ gilt dann wegen der Konvexität

$$\frac{z - y}{z - x} f(x) + \frac{y - x}{z - x} f(z) \geq f\left(\frac{z - y}{z - x} x + \frac{y - x}{z - x} z\right) = f(y).$$

Mithilfe dieser Ungleichung folgt

$$\begin{aligned} \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \quad &\leq \quad \frac{\frac{z-y}{z-x} f(x) + \frac{y-x}{z-x} f(z) - f(x)}{y - x} \\ &= \quad \frac{f(z) - f(x)}{z - x}. \end{aligned}$$

[2]Mit freundlicher Genehmigung von U. Menne.

Analog erhält man

$$\frac{f(z)-f(x)}{z-x} \leq \frac{f(z)-f(y)}{z-y}.$$

Durch Grenzübergang $y \searrow x$ bzw. $y \nearrow z$ folgt $f'(x) = \lim_{\xi \searrow x} \frac{f(\xi)-f(x)}{\xi - x} \leq \frac{f(z)-f(x)}{z-x} \leq \lim_{\xi \nearrow z} \frac{f(z)-f(\xi)}{z-\xi} = f'(z)$.

(ii) *Die Grenzübergange* $\lim_{\xi \nearrow x} f'(\xi)$ *und* $\lim_{\xi \searrow x} f'(\xi)$ *besitzen den Häufungswert* $f'(x)$. Zu $\xi < x$ existiert nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung ein $\xi < \tilde{\xi} < x$, so dass

$$f'(\tilde{\xi}) = \frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}.$$

Da die rechte Seite bei $\xi \nearrow x$ gegen $f'(x)$ strebt, besitzt der Grenzübergang $\lim_{\xi \nearrow x} f'(\xi)$ den Häufungswert $f'(x)$. Die zweite Aussage erhält man analog.

□

Hindernis $h \in W^{2,2}$ impliziert, dass Lösung $u \in W^{2,2}$. Unter der Voraussetzung, dass $h \in W^{2,2}(I)$ werden wir unter Benutzung der von L. Nirenberg [82] eingeführten Technik der *Differenzenquotienten*

$$\Delta_k f(x) := \frac{f(x+k)-f(x)}{k} \quad \text{für} \quad k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

zeigen, dass die Lösung u ebenfalls von der Klasse $W^{2,2}(I)$ ist. Wir erinnern an die schon in den Beweisen von Lemma 2.6 und Satz 2.7 vorgestellte Produktregel für $f, g \in L^2(I)$

$$\Delta_k(fg)(x) = f(x+k)\Delta_k g(x) + \Delta_k f(x) g(x)$$

und die Regel der *diskreten partiellen Integration*

$$\int_I \Delta_k f(x) g(x) \,\mathrm{d}x = -\int_I \Delta_{-k} g(x) f(x) \,\mathrm{d}x \quad \forall\ |k| \ll 1, \tag{5.16}$$

falls f oder g kompakten Träger in I haben.

Wir zeigen zuerst $u \in W^{2,2}_{loc}(I)$. Sei dazu $x \in (a+\delta, b-\delta) =: I_\delta$ mit $\delta \ll 1$ und $f : I \to \mathbb{R}^+$ eine beliebige nichtnegative Funktion, und $\eta : I \to [0,1]$ zunächst ebenfalls beliebig. Dann ist für $0 < \varepsilon < k^{-2}$

$$\begin{aligned}
f(x) + \varepsilon \Delta_{-k}(\eta^2(x)\Delta_k f(x)) &= f(x) + \varepsilon \Delta_{-k}\left(\eta^2(x)\frac{f(x+k)-f(x)}{k}\right) \\
&= f(x) - \frac{\varepsilon}{k}\left(\eta^2(x-k)\frac{1}{k}(f(x)-f(x-k)) - \eta^2(x)\frac{1}{k}(f(x+k)-f(x))\right) \\
&= f(x) + \frac{\varepsilon}{k^2}\Big(\eta^2(x)f(x+k) + \eta^2(x-k)f(x-k) - [\eta^2(x)+\eta^2(x-k)]f(x)\Big)
\end{aligned}$$

eine Konvexkombination der nichtnegativen Werte $f(x), f(x-k)$ und $f(x+k)$ und damit ebenfalls nichtnegativ. Speziell folgt für $f := u - h \geq 0$ also

$$v(x) := u(x) + \varepsilon \Delta_{-k}(\eta^2(x)\Delta_k(u(x)-h(x)) \geq h(x) \quad \text{für alle} \quad x \in \overline{I}$$

und damit $v \in \mathcal{K}_h$, falls η kompakten Träger in I hat und $|k| < \operatorname{dist}(\operatorname{supp}\eta, \partial I)$, da Linearkombinationen von $W^{1,2}$-Funktionen wieder in $W^{1,2}$ sind.

Wir wählen $r > 0$ so klein, dass $\mathcal{B}_u \subset I_{3r}$, und außerdem spezifizieren wir $\eta \in C_0^\infty(I_{2r})$ mit $0 \le \eta \le 1$ und $\eta \equiv 1$ auf I_{3r}, so dass $|\eta'| \le 2/r$ gewährleistet werden kann. Wir fixieren k und ε, so dass $0 < |k| < r$ und $0 < 2\varepsilon < k^2$. Schließlich setzen wir mit diesen Wahlen

$$\varphi := \varepsilon \Delta_{-k}(\eta^2 \Delta_k (u - h)),$$

so dass

$$v = u + \varphi \ \in \mathcal{K}_h.$$

Aus der Variationsungleichung (5.10) folgt nun wegen $0 < |k| < r$ und der Regel (5.16)

$$\begin{aligned}
0 &\le \int_I u'(x)(v'(x) - u'(x))\,\mathrm{d}x \\
&= \varepsilon \int_I u'(x)\Delta_{-k}\Big(2\eta(x)\eta'(x)\Delta_k\big(u(x) - h(x)\big) + \eta(x)^2\Delta_k\big(u'(x) - h'(x)\big)\Big)\,\mathrm{d}x \\
&\underset{(5.16)}{=} -\varepsilon \int_I \Delta_k u'(x)\Big(2\eta(x)\eta'(x)\Delta_k\big(u(x) - h(x)\big) + \eta(x)^2\Delta_k\big(u'(x) - h'(x)\big)\Big)\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Wir erhalten nach Division durch $\varepsilon > 0$ und Umstellung

$$\int_I \eta^2(x)|\Delta_k u'(x)|^2\,\mathrm{d}x \le -\int_I \big(\Delta_k u'(x)\big)\Big(2\eta(x)\eta'(x)\Delta_k\big(u(x) - h(x)\big) - \eta(x)^2\Delta_k h'(x)\Big)\,\mathrm{d}x$$

und mit der Hölder- und Young-Ungleichung

$$\begin{aligned}
\int_I \eta^2(x)|\Delta_k u'(x)|^2\,\mathrm{d}x &\le \int_I \eta^2(x)|\Delta_k u'(x)||\Delta_k h'(x)|\,\mathrm{d}x \\
&\quad + c\int_I |\Delta_k u'(x)||\eta(x)||\eta'(x)||\Delta_k\big(u(x) - h(x)\big)|\,\mathrm{d}x \\
&\le \tilde{\varepsilon}\int_I \eta^2(x)|\Delta_k u'(x)|^2\,\mathrm{d}x \\
&\quad + c(\tilde{\varepsilon})\int_I \eta^2(x)|\Delta_k h'(x)|^2\,\mathrm{d}x \\
&\quad + \tilde{\varepsilon}\int_I |\Delta_k u'(x)|^2\eta^2(x)\,\mathrm{d}x \\
&\quad + c(\tilde{\varepsilon})\int_I |\eta'(x)|^2\Big(|\Delta_k u(x)|^2 + |\Delta_k h(x)|^2\Big)\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Es folgt mit $\tilde{\varepsilon} = \frac{1}{4}$ und Teil (i) aus Lemma 2.6 wegen $h \in W^{2,2}(I)$ und $u \in W^{1,2}(I)$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\int_I \eta^2(x)|\Delta_k u'(x)|^2\,\mathrm{d}x &\le c\Bigg(\int_I \eta^2(x)|\Delta_k h'(x)|^2\,\mathrm{d}x \\
&\qquad + \int_I |\eta'(x)|^2\big(|\Delta_k u(x)|^2 + |\Delta_k h(x)|^2\big)\,\mathrm{d}x\Bigg) \\
&\le c\left(\int_I |h''(x)|^2\,\mathrm{d}x + \|\eta'\|^2_{C^0(\bar{I})}\int_I \big(|u'(x)|^2 + |h'(x)|^2\big)\,\mathrm{d}x\right) \\
&\le \tilde{c}(r),
\end{aligned}$$

also wegen $\eta \equiv 1$ auf I_{3r}

$$\int_{I_{3r}} |\Delta_k u'(x)|^2 \,\mathrm{d}x \le \int_{I_{2r}} \eta^2(x)|\Delta_k u'(x)|^2 \,\mathrm{d}x \le 2\tilde{c}.$$

Dabei ist $\tilde{c}$ unabhängig von k. Für ein beliebiges Kompaktum $K \subset I$ kann man $r > 0$ zusätzlich so klein wählen, dass $K \subset I_{3r}$, so dass aus der obigen Abschätzung in Kombination mit Lemma 2.6 (ii) folgt, dass $u \in W^{2,2}_{\mathrm{loc}}(I)$. Zusammen mit der Tatsache, dass u linear auf $\overline{I} \setminus \mathcal{B}_u$ ist (und $\mathcal{B}_u \subset I_{3r}$), ergibt sich $u \in W^{2,2}(I)$.

Lösung ist in $C^{1,1}$, falls das Hindernis $h \in C^{1,1}$. Mit dem Einbettungssatz Satz 2.15 ergibt sich aus $u \in W^{2,2}(I)$ auch $u \in C^{1,1/2}(\overline{I})$, so dass aus $u = h$ auf $\mathcal{B}_u$ auch $u' = h'$ auf $\mathcal{B}_u$ folgt. Damit ist nach Korollar 2.16 $u'' - h'' = 0$ fast überall auf $\mathcal{B}_u$. Zusammen mit $u'' = 0$ auf $\overline{I} \setminus \mathcal{B}_u$ ergibt sich $u'' \in L^\infty(I)$, da nach Voraussetzung $h'' \in L^\infty(I)$. Zusammen mit $u \in W^{2,2}(I)$ folgt also $u \in W^{2,\infty}(I) \simeq C^{1,1}(\overline{I})$.

5.3 Periodische Lösungen von Newtonschen Bewegungsgleichungen

Motiviert durch Probleme aus der Himmelsmechanik (siehe etwa [34, 70, 88, 100] für ausführlichere Darstellungen) suchen wir periodische Lösungen gewöhnlicher Differentialgleichungen, die als Newtonsche Bewegungsgleichungen einer Punktmasse in einem Potential $V = V(x,z) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ auftreten. Genauer suchen wir Lösungen $u \in C^2([0,T],\mathbb{R}^N)$ der folgenden nicht-autonomen Randwertaufgabe[3]

$$\begin{cases} u''(x) = V_z(x,u(x)) & \text{für } \; x \in [0,T] \\ u(0) = u(T) & \\ u'(0) = u'(T) & , \end{cases} \tag{BWGl}$$

wobei wir $V \in C^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N)$ voraussetzen[4].

Wir verfolgen einen variationellen Ansatz mit dem Energiefunktional

$$\mathcal{E}(w) := \int_0^T \left\{ \frac{1}{2}|w'(x)|^2 + V(x,w(x)) \right\} \mathrm{d}x,$$

für welches der Integrand $E(x,z,p) = \frac{1}{2}|p|^2 + V(x,z)$ mit den Ableitungen $E_p(x,z,p) = p$ und $E_z(x,z,p) = V_z(x,z)$ zu der Euler-Lagrange-Gleichung

$$\frac{d}{dx}\big(E_p(x,u(x),u'(x))\big) = E_z(x,u(x),u'(x)) \Leftrightarrow u''(x) = V_z(x,u(x))$$

und damit zu der Differentialgleichung in (BWGl) führt. Unser Ziel ist es nun, das Energiefunktional $\mathcal{E}$ auf der Klasse

$$\mathcal{C}(T) := \{w \in W^{1,2}((0,T),\mathbb{R}^N) : u(0) = u(T)\} =: W^{1,2}(\mathbb{R}/T\mathbb{Z},\mathbb{R}^N) \tag{5.17}$$

[3] Der Begriff *nicht-autonom* bezieht sich darauf, dass das Potential und damit die rechte Seite der Differentialgleichung in (BWGl) explizit von der Zeitvariablen x abhängt.

[4] In den Anwendungen hat man zusätzlich häufig die Periodizität von V in der Zeitvariablen $x \in \mathbb{R}$, d.h. $V(x+T,z) = V(x,z)$ für alle $(x,z) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$, was aber für die hier behandelte Existenztheorie nicht nötig ist.

zu minimieren. Die Periodizität der Sobolevfunktionen ist wegen des Einbettungssatzes, Satz 2.15, eine vernünftige Forderung, während man die Periodizität der Ableitungen der gesuchten Lösung in (BWGl) erst nach dem Nachweis höherer Regularität beweisen kann.

Bemerkung:
Die Periodizität der Ableitungen der Lösung $u \in C^2([0,T],\mathbb{R}^N)$ von (BWGl) führt mit dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung auf die folgende notwendige Bedingung an den z-Gradienten des Potentials V (ausgewertet auf der Lösung u):

$$0 \overset{\text{(BWGl)}}{=} u'(T) - u'(0) = \int_0^T u''(x)\,\mathrm{d}x \overset{\text{(BWGl)}}{=} \int_0^T V_z(x,u(x))\,\mathrm{d}x.$$

Unter der zusätzlichen Annahme einer Periodizität von V in der Ortsvariable z ergibt sich der folgende Existenzsatz.

Satz 5.6 [Existenz bei ortsperiodischem Potential]
Das Potential $V \in C^2([0,T]\times\mathbb{R}^N)$ erfülle für eine feste Basis $\{\zeta_1,\dots,\zeta_N\}$ des $\mathbb{R}^N$ die Periodizitätsbedingungen

$$V(x,z+\zeta_j) = V(x,z) \ \textit{für alle} \ \ x\in[0,T], z\in\mathbb{R}^N, j=1,\dots,N. \qquad \text{(period)}$$

Dann existiert (mindest eine) Funktion $u \in \mathcal{C}(T)$ mit

$$\mathcal{E}(u) = \inf_{\mathcal{C}(T)} \mathcal{E}(\cdot).$$

Zusätzlich ist $u \in C^2([0,T],\mathbb{R}^N)$ und löst (BWGl).

Man beachte, dass wir *nicht* garantieren können, dass auch die zweite Ableitung u'' periodisch ist.

Beweis von Satz 5.6. Da V stetig auf dem Ganzraum ist und periodisch in der Ortsvariable $z\in\mathbb{R}^N$ folgt aus der Ortsperiodizität (period), dass $V\in L^\infty([0,T]\times\mathbb{R}^N)$. (Genauer ist sogar $V\in C^2([0,T]\times\mathbb{T}^N)$, wobei

$$\mathbb{T}^N := \{z\in\mathbb{R}^N : z = \sum_{j=1}^N \lambda_j\zeta_j, 0\le\lambda_j\le 1, \sum_{j=1}^N \lambda_j = 1\}$$

den N-dimensionalen von den Basisvektoren ζ_j aufgespannten Volltorus bezeichnet.)

Mit $C_V := \|V\|_{L^\infty([0,T],\mathbb{R}^N)}$ folgt $V(x,z)\ge -C_V < -\infty$ für alle $(x,z)\in[0,T]\times\mathbb{R}^N$ und damit die Energieabschätzung

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(w) &= \frac{1}{2}\int_0^T |w'(x)|^2\,\mathrm{d}x + \int_0^T V(x,w(x))\,\mathrm{d}x \\ &\ge \frac{1}{2}\int_0^T |w'(x)|^2\,\mathrm{d}x - C_V T > -\infty \ \text{ für alle } \ w\in\mathcal{C}(T). \qquad (5.18)\end{aligned}$$

Nun ist $\mathcal{C}(T)\neq\emptyset$, da z.B. jede konstante Funktion in $\mathcal{C}(T)$ enthalten ist, so dass auch Minimalfolgen in $\mathcal{C}(T)$ existieren. Für eine beliebige solche Minimalfolge $\{w_k\}_k\subset\mathcal{C}(T)$ gilt wegen (5.18)

$$\mathcal{E}(w_k) \to \inf_{\mathcal{C}(T)} \mathcal{E}(\cdot) \overset{(5.18)}{\in} [-C_V T, \infty)$$

und damit

$$\|w_k'\|_{L^2((0,T),\mathbb{R}^N)} \le C_1 \text{ für alle } k \in \mathbb{N} \tag{5.19}$$

mit einer von k unabhängigen Konstanten $C_1 \ge 0$. Subtrahiert man von w_k den jeweiligen Integralmittelwert

$$\bar{w}_k := \frac{1}{T}\int_0^T w_k(x)\,\mathrm{d}x$$

erhält man mit der Poincaré-Ungleichung, Korollar 2.11 oder Bemerkung nach Satz 2.15, die gleichmäßige Abschätzung

$$\|w_k - \bar{w}_k\|_{L^2((0,T),\mathbb{R}^N)} \le C_2 \text{ für alle } k \in \mathbb{N} \tag{5.20}$$

erneut mit einer von k unabhängigen Konstanten C_2. Da wir mit der Periodizitätsbedingung in der Klasse $\mathcal{C}(T)$ keine Randwerte oder sonstigen Werte kontrollieren können, wird es uns nun darum gehen, speziell eine Minimalfolge auszuwählen, deren Mittelwerte wir kontrollieren können, was dann mit Hilfe von (5.19) und (5.20) deren volle $W^{1,2}$-Norm gleichmäßig kontrollieren lässt. Dazu nutzen wir erneut die Ortsperiodizität (period) des Potentials V, um die folgende Translationsinvarianz der Energie nachzuweisen.

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}(w+\zeta_j) &= \frac{1}{2}\int_0^T |w'(x)|^2\,\mathrm{d}x + \int_0^T V(x, w(x)+\zeta_j)\,\mathrm{d}x \\
&\overset{\text{(period)}}{=} \frac{1}{2}\int_0^T |w'(x)|^2\,\mathrm{d}x + \int_0^T V(x, w(x))\,\mathrm{d}x \\
&= \mathcal{E}(w) \text{ für alle } w \in \mathcal{C}(T), j = 1,\ldots,N.
\end{aligned} \tag{5.21}$$

Für beliebige ganzzahlige Koeffizienten $m_{jk} \in \mathbb{Z}$ und Funktionen $\eta_k := w_k + \sum_{j=1}^N m_{jk}\zeta_j$ gilt demnach mit dieser Form der Translationsinvarianz (5.21)

$$\mathcal{E}(\eta_k) = \mathcal{E}(w_k + \sum_{j=1}^N m_{jk}\zeta_j) \overset{(5.21)}{=} \mathcal{E}(w_k) \to \inf_{\mathcal{C}(T)} \mathcal{E}(\cdot) \text{ für } k \to \infty.$$

Also ist jede derart "verschobene Folge" $\{\eta_k\}_k \subset \mathcal{C}(T)$ ebenfalls eine Minimalfolge für die Energie $\mathcal{E}$ mit Mittelwerten

$$\bar{\eta}_k = \frac{1}{T}\int_0^T \eta_k(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{T}\int_0^T \big(w_k(x) + \sum_{j=1}^N m_{jk}\zeta_j\big)\,\mathrm{d}x = \bar{w}_k + \sum_{j=1}^N m_{jk}\zeta_j.$$

Da nach Voraussetzung $\{\zeta_1,\ldots,\zeta_N\} \subset \mathbb{R}^N$ eine Basis des $\mathbb{R}^N$ ist, gibt es Koeffizienten $\alpha_{jk} \in \mathbb{R}$, so dass $\bar{w}_k = \sum_{j=1}^N \alpha_{jk}\zeta_j$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und damit

$$\bar{\eta}_k = \sum_{j=1}^N (\alpha_{jk} + m_{jk})\zeta_j.$$

Mit der Wahl $m_{jk} := -\lfloor \alpha_{jk} \rfloor \in \mathbb{Z}$ erhält nun eine spezielle Minimalfolge

$$u_k := w_k + \sum_{j=1}^N (-\lfloor \alpha_{jk} \rfloor \zeta_j)$$

mit den Integralmittelwerten

$$\bar{u}_k = \frac{1}{T}\int_0^T u_k(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{j=1}^N (\alpha_{jk} - \lfloor \alpha_{jk} \rfloor)\zeta_j,$$

deren Entwicklungskoeffizienten im Betrag durch 1 nach oben abgeschätzt sind, so dass

$$|\bar{u}_k| \le \sum_{j=1}^N |\zeta_j| =: C_3 \text{ für alle } \; k \in \mathbb{N}.$$

Diese von k unabhängige Schranke kombinieren wir nun mit den für beliebige Minimalfolgen und damit auch für $\{u_k\}_k \subset \mathcal{C}(T)$ gültigen Abschätzungen (5.19) und (5.20), um zu schließen

$$\begin{aligned} \|u_k\|_{W^{1,2}} &\le \|u_k - \bar{u}_k\|_{W^{1,2}} + \|\bar{u}_k\|_{W^{1,2}} \\ &\overset{(5.19)(5.20)}{\le} C_1 + C_2 + \|\bar{u}_k\|_{L^2} \le C_1 + C_2 + C_3. \end{aligned}$$

Diese von k unabhängige Konstante auf der rechten Seite ermöglicht uns wegen der Reflexivität von $W^{1,2}([0,T],\mathbb{R}^N)$ (Satz A.10) und wegen des Einbettungssatzes, Satz 2.15, die Auswahl einer Teilfolge $\{u_{k_l}\}_l \subset \{u_k\}_k \subset \mathcal{C}(T)$, so dass $u_{k_l} \rightharpoonup u$ in $W^{1,2}$ und $u_{k_l} \to u$ in C^0 für $l \to \infty$, so dass $u \in \mathcal{C}(T)$. Wegen $V(x,z) \ge -C_V$ folgt, dass die verschobenen und genügend glatten Integranden

$$E(x,z,p) + C_V = \frac{1}{2}|p|^2 + V(x,z) + C_V$$

die Voraussetzungen des Unterhalbstetigkeitssatzes Satz 3.5 erfüllen, womit man dann schließen kann, dass das Funktional $\mathcal{E} + C_V T$ und damit auch das ursprüngliche Funktional $\mathcal{E}$ schwach unterhalbstetig ist. Daraus folgt

$$\inf_{\mathcal{C}(T)} \mathcal{E}(\cdot) \le \mathcal{E}(u) \le \liminf_{l\to\infty} \mathcal{E}(u_{k_l}) = \inf_{\mathcal{C}(T)} \mathcal{E}(\cdot),$$

also $\inf_{\mathcal{C}(T)} \mathcal{E}(\cdot) = \mathcal{E}(u)$, was die Existenz eines Minimierers etabliert.

Da der Integrand E von der Klasse C^2 ist und die Wachstumsbedingung

$$\frac{1}{2}|p|^2 - C_V \le E(x,z,p) \le \frac{1}{2}|p|^2 + C_V$$

für alle $(x,z,p) \in [0,T] \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$ erfüllt, sind auch die Voraussetzungen (R1) und (R2) des Regularitätssatzes Satz 4.1 erfüllt. Mit $E_{pp}(x,z,p) = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^N}$ und der Abschätzung

$$|E_z(x,zp)| + |E_p(x,z,p)| = |V_z(x,z)| + |p| \le C_4(1+|p|^2) \text{ für alle } \; (x,z,p) \in [0,T]\times\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^N$$

folgen auch die Bedingungen (R3) und (R4) aus Satz 4.1, womit die Lösung u dann von der Klasse $C^2([0,T],\mathbb{R}^N)$ ist und damit die Euler-Lagrange-Gleichung von $\mathcal{E}$ und damit die Differentialgleichung in (BWGl) erfüllt. Da $u \in \mathcal{C}(T)$ ist $u(0) = u(T)$ per Definition dieser Zulässigkeitsklasse.

Es bleibt, die zweite Periodizität $u'(0) = u'(T)$ zu zeigen. Multiplizieren wir die Differentialgleichung in (BWGl) mit einer Testfunktion $\phi \in C^\infty([0,T],\mathbb{R}^N)$ mit der Periodizitätsbedingung $\phi(0) = \phi(T)$ und integrieren dann über $x \in [0,T]$, so erhalten wir mit einer partiellen Integration

$$
\begin{aligned}
0 &\overset{\text{(BWGl)}}{=} \int_0^T \big(- u''(x) \cdot \phi(x)\big)\,\mathrm{d}x + \int_0^T V_z(x,u(x)) \cdot \phi(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^T u'(x) \cdot \phi'(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^T V_z(x,u(x)) \cdot \phi(x)\,\mathrm{d}x \\
&\quad -u'(T) \cdot \phi(T) + u'(0) \cdot \phi(0).
\end{aligned}
$$

Da aber $u \in \mathcal{C}(T)$ die Energie $\mathcal{E}$ minimiert und alle Störungen $u + \varepsilon\phi \in \mathcal{C}(T)$ verschwindet die erste Variation $\delta\mathcal{E}(u,\phi)$ und damit die Summe der Integrale auf der rechten Seite, und es bleiben nur die Randterme übrig, so dass sich die obige Identität wegen der Periodizität von ϕ zu

$$0 = \big(u'(0) - u'(T)\big) \cdot \phi(0)$$

vereinfacht. Testet man diese Gleichung z.B. mit der periodischen Funktion $\phi(x) := \big(u'(0) - u'(T)\big)\cos(2\pi x/T)$, so ergibt sich $|u'(0) - u'(T)|^2 = 0$ und damit die gewünschte Periodizitätsbedingung an u' in (BWGl). □

Bemerkung:
Wir werden in den nächsten beiden Sätzen die Existenz von Minimierern des Energiefunktionals $\mathcal{E}$ in der in (5.17) definierten Zulässigkeitsklasse $\mathcal{C}(T)$ unter anderen Voraussetzungen an das Potential V beweisen. Die Unterhalbstetigkeit des Energiefunktionals wird durch die geänderten Voraussetzungen an das Potential nicht berührt. Sobald man aber die Existenz des Minimierers hat, ist die Schlussweise für den Nachweis höherer Regularität und für die periodischen Randbedingungen an die erste Ableitung der Lösung identisch.

In dem nun folgenden Satz von Lichtenstein [65] und Tonelli wird die Ortsperiodizität des Potentials V durch eine Art Monotoniebedingung ersetzt, welche uns dann die notwendige Koerzivität von V liefert. Das geht allerdings nur in einer Raumdimension.

Satz 5.7 [Existenz im skalaren Fall für nichtperiodisches Potential]
Sei $N = 1$, und es gebe eine Zahl $\zeta \geq 0$, so dass für das Potential $V \in C^2([0,T] \times \mathbb{R}^N)$ die Monotoniebedingung

$$zV_z(x,z) \geq 0 \qquad \textit{für alle} \ \ |z| > \zeta,\ x \in [0,T] \tag{mon}$$

gilt. Dann gibt es (mindestens) eine Funktion $u \in \mathcal{C}(T) \cap C^2([0,T])$ mit

$$\mathcal{E}(u) = \inf_{\mathcal{C}(T)} \mathcal{E}(\cdot),$$

welche zusätzlich auch die Bewegungsgleichung (BWGl) *löst.*

Beweis. Aus der Monotoniebedingung (mon) folgt für $z < -\zeta$ die Ungleichung $V_z(x,z) \leq 0$ für alle $x \in [0,T]$. Aus Stetigkeitsgründen gilt das dann auch für alle $z \leq -\zeta$, so dass für alle $x \in [0,T]$ die Funktion $V(x,\cdot)$ monoton fallend auf dem Intervall $(-\infty,-\zeta]$ ist. Analog schließen wir aus (mon) für alle $z \geq \zeta$ die Ungleichung $V_z(x,z) \geq 0$ und damit das monotone Wachsen der Funktion $V(x,\cdot)$ auf $[\zeta,\infty)$ für alle $x \in [0,T]$. Insgesamt folgen also für

$$V_0 := \min_{[0,T]\times[-\zeta,\zeta]} V(\cdot,\cdot)$$

die Ungleichungen $V(x,z) \geq V(x,-\zeta) \geq V_0$ für alle $x \in [0,T]$ und alle $z \in (-\infty,-\zeta)$ und $V(x,z) \geq V(x,\zeta) \geq V_0$ für alle $x \in [0,T]$ und alle $z \in (\zeta,\infty)$, und damit schließlich

$$V(x,z) \geq V_0 \quad \text{für alle} \;\; (x,z) \in [0,T] \times \mathbb{R}.$$

Das nutzen wir für die Energieabschätzung

$$\mathcal{E}(w) = \frac{1}{2}\int_0^T |w'(x)|^2 \,\mathrm{d}x + \int_0^T V(x,w(x))\,\mathrm{d}x \geq \frac{1}{2}\int_0^T |w'(x)|^2 \,\mathrm{d}x + V_0 T \;\text{ für alle }\; w \in \mathcal{C}(T).$$

Wir wissen bereits, dass $\mathcal{C}(T) \neq \emptyset$, da die konstanten Funktionen in der Klasse $\mathcal{C}(T)$ enthalten sind, so dass auch Minimalfolgen $\{w_k\}_k \subset \mathcal{C}(T)$ für $\mathcal{E}$ existieren, und es gibt wegen der Energieabschätzung eine Konstante $C(V_0,T) \geq 0$, so dass für jede Minimalfolge $\{w_k\}_k$ gilt

$$\|w_k'\|_{L^2((0,T))} \leq C(V_0,T) \quad \text{für alle} \;\; k \in \mathbb{N}. \tag{5.22}$$

Zwischenbehauptung: Es gibt eine Minimalfolge $\{u_k\}_k \subset \mathcal{C}(T)$ *so dass* $u_k([0,T]) \cap [-\zeta,\zeta] \neq \emptyset$ *für alle* $k \in \mathbb{N}$.

Beweis der Zwischenbehauptung. Sei $\{w_k\}_k \subset \mathcal{C}(T)$ eine beliebige Minimalfolge. Wenn für einen Index $k \in \mathbb{N}$ gilt $w_k([0,T]) \cap [-\zeta,\zeta] \neq \emptyset$, dann setzen wir $u_k := w_k$. Falls nicht, dann gilt wegen des Zwischenwertsatzes für die aufgrund des Einbettungssatzes, Satz 2.15, stetige Funktion w_k die sich gegenseitig ausschließenden Alternativen

(a) $w_k([0,T]) \subset (-\infty,-\zeta)$ oder

(b) $w_k([0,T]) \subset (\zeta,\infty)$.

Im Fall (a) definieren wir mit Hilfe des Maximums $M_k := \max_{[0,T]} w_k < -\zeta$ die Funktion

$$u_k(x) := w_k(x) - (M_k + \zeta) \in \mathcal{C}(T),$$

welche dann automatisch

$$\max_{[0,T]} u_k = M_k - M_k - \zeta = -\zeta$$

erfüllt, und dieses Maximum wird wegen der Stetigkeit von u_k in $[0,T]$ angenommen.

Im Fall (b) definieren wir mit Hilfe des Minimums $m_k := \min_{[0,T]} w_k > \zeta$ die Funktion

$$u_k(x) := w_k(x) - (m_k - \zeta) \in \mathcal{C}(T),$$

welche dann automatisch

$$\min_{[0,T]} u_k = m_k - m_k + \zeta = \zeta$$

erfüllt, und dieses Minimum wird wegen der Stetigkeit von u_k in $[0,T]$ angenommen.

In jedem Fall existiert $x_0^k \in [0,T]$ mit $u(x_0^k) \in [-\zeta,\zeta]$, und für $u_k \neq w_k$ erhält man im Fall (a) für die Energie

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(u_k) &= \frac{1}{2}\int_0^T |w_k'(x)|^2\,\mathrm{d}x + \int_0^T V(x, w_k(x) - (M_k+\zeta))\,\mathrm{d}x \\ &\leq \frac{1}{2}\int_0^T |w_k'(x)|^2\,\mathrm{d}x + \int_0^T V(x, w_k(x))\,\mathrm{d}x = \mathcal{E}(w_k),\end{aligned}$$

da $w_k(x) - (M_k+\zeta) = -\zeta + w_k(x) - M_k \leq -\zeta$ und $V(x,\cdot)$ auf $(-\infty,-\zeta]$ monoton fallend ist und $w_k(x) < w_k(x) - (M_k+\zeta)$.

Im Fall (b) ergibt sich ganz ähnlich die Energieabschätzung

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(u_k) &= \frac{1}{2}\int_0^T |w_k'(x)|^2\,\mathrm{d}x + \int_0^T V(x, w_k(x) - (m_k-\zeta))\,\mathrm{d}x \\ &\leq \frac{1}{2}\int_0^T |w_k'(x)|^2\,\mathrm{d}x + \int_0^T V(x, w_k(x))\,\mathrm{d}x = \mathcal{E}(w_k),\end{aligned}$$

da $w_k(x) - (m_k-\zeta) = \zeta + w_k(x) - m_k \geq \zeta$ und $V(x,\cdot)$ auf $[\zeta,\infty)$ monoton steigend ist und $w_k(x) > w_k(x) - (m_k-\zeta)$.

Beide Energieungleichungen beweisen, dass auch $\{u_k\}_k \subset \mathcal{C}(T)$ eine Minimalfolge für die Energie $\mathcal{E}$ ist und nach Konstruktion $u_k([0,T]) \cap [-\zeta,\zeta] \neq \emptyset$ für alle $k \in \mathbb{N}$ erfüllt, womit die Zwischenbehauptung bewiesen ist.

Mit $u_k(x_0^k) \in [-\zeta,\zeta]$ für alle k lässt sich die Poincaré-Ungleichung (siehe Bemerkung nach Satz 2.15) anwenden, um auch die L^2-Norm der Minimalfolgenglieder mit Hilfe von (5.22) unabhängig von k abzuschätzen.

$$\|u_k\|_{L^2}^2 \leq 2\|u_k - u_k(x_0^k)\|_{L^2}^2 + 2T\zeta^2 \overset{\text{Poincaré}}{\leq} C\|u_k'\|_{L^2}^2 + 2T\zeta^2 \overset{(5.22)}{\leq} C.$$

Zusammen mit (5.22) für $w_k := u_k$ sind damit sind die vollen $W^{1,2}$-Normen der Minimalfolgenglieder u_k unabhängig von k nach oben abgeschätzt, womit wir wie im Beweis zu Satz 5.6 auf die Existenz einer schwach in $W^{1,2}$ und stark in C^0 gegen eine Funktion $u \in \mathcal{C}(T)$ konvergenten Teilfolge $\{u_{k_l}\}_l \subset \{u_k\}_k$ schließen können. Wegen der nach wie vor gültigen schwachen Unterhalbstetigkeit von $\mathcal{E}$ minimiert u das Energiefunktional, was zu beweisen war. Die C^1-Regularität von u und die Gültigkeit der Periodizitätsbedingung $u'(0) = u'(T)$ zeigt man genauso wie in Satz 5.6. □

Wenn man nun ein solches Resultat auf beliebige Raumdimensionen übertragen möchte, so muss man stärkere Forderungen an das Potential V stellen, nämlich die strikte Konvexität in der Raumvariablen z und eine Koerzivität im Raum, weil man hier nicht mit der Monotonie in einer skalaren Variablen argumentieren kann.

Satz 5.8 [Existenz im vektoriellen Fall für nichtperiodisches Potential]
Sei $V = V(x,z) \in C^2([0,T]\times\mathbb{R}^N)$ konvex in der z-Variablen, und es gelte

$$\int_0^T V(x,z)\,\mathrm{d}x \to \infty \qquad \text{für } |z| \to \infty. \tag{K}$$

Dann gibt es (mindestens) eine Funktion $u \in \mathcal{C}(T) \cap C^2([0,T],\mathbb{R}^N)$ mit

$$\mathcal{E}(u) = \inf_{\mathcal{C}(T)} \mathcal{E}(\cdot),$$

welche zusätzlich auch die Bewegungsgleichung (BWGl) *löst.*

Beweis. Wie zuvor reicht es, eine Minimalfolge zu finden, deren $W^{1,2}$-Norm gleichmäßig unabhängig vom Folgenindex nach oben abgeschätzt ist. Tatsächlich gelingt eine solche Abschätzung unter den Voraussetzungen des Satzes für beliebige Minimalfolgen in $\mathcal{C}(T) \neq \emptyset$.

Wegen (K) existiert $R > 0$ so dass

$$\int_0^T V(x,z)\,\mathrm{d}x \overset{\text{(K)}}{>} \int_0^T V(x,0)\,\mathrm{d}x \qquad \text{für alle} \quad |z| > R,$$

so dass

$$\min_{\mathbb{R}^N} \int_0^T V(x,\cdot)\,\mathrm{d}x = \min_{\overline{B_R(0)}} \int_0^T V(x,\cdot)\,\mathrm{d}x.$$

Da die Zuordnung $z \mapsto \int_0^T V(x,z)\,\mathrm{d}x$ nach den Voraussetzungen an V stetig ist (sogar stetig differenzierbar), existiert ein $\bar{z} \in \mathbb{R}^N$, so dass

$$\int_0^T V(x,\bar{z})\,\mathrm{d}x = \min_{\mathbb{R}^N} \int_0^T V(x,\cdot)\,\mathrm{d}x,$$

woraus

$$\nabla_z \Big[\int_0^T V(x,z)\,\mathrm{d}x \Big]\Big|_{z=\bar{z}} = \int_0^T V_z(x,\bar{z})\,\mathrm{d}x = 0 \tag{5.23}$$

folgt. Außerdem folgt aus der Konvexität der Abbildung $z \mapsto V(x,z)$ die Ungleichung

$$V(x,z) \geq V(x,\bar{z}) + (z - \bar{z}) \cdot V_z(x,\bar{z})$$

und damit für eine beliebige Minimalfolge $\{w_k\}_k \subset \mathcal{C}(T)$ die Energieabschätzung

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}(w_k) &= \frac{1}{2}\int_0^T |w_k'(x)|^2\,\mathrm{d}x + \int_0^T V(x,w_k(x))\,\mathrm{d}x \\
&\geq \frac{1}{2}\int_0^T |w_k'(x)|^2\,\mathrm{d}x + \int_0^T V(x,\bar{z})\,\mathrm{d}x + \int_0^T (w_k(x) - \bar{z}) \cdot V_z(x,\bar{z})\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\int_0^T |w_k'(x)|^2\,\mathrm{d}x + \int_0^T V(x,\bar{z})\,\mathrm{d}x + \int_0^T (w_k(x) - \bar{w}_k) \cdot V_z(x,\bar{z})\,\mathrm{d}x \\
&\geq \frac{1}{2}\|w_k'\|_{L^2}^2 - \big(1 + \|w_k - \bar{w}_k\|_{L^2}\big) C_V,
\end{aligned}$$

wobei wir für die letzte Gleichung die Identität (5.23) und für die sich anschließende Ungleichung die Hölderungleichung für das letzte Integral benutzt haben. Die Konstante C_V hängt dabei von den endlichen Integralen $\int_0^T V(x,\bar{z})\,\mathrm{d}x$ und $\int_0^T V_z^2(x,\bar{z})\,\mathrm{d}x$ ab. Mittels der elementaren Ungleichung $ab \leq \varepsilon a^2 + C(\varepsilon) b^2$ und der Poincaré-Ungleichung folgt

$$\mathcal{E}(w_k) \geq \Big(\frac{1}{2} - \varepsilon\Big)\|w_k'\|_{L^2}^2 - \big(1 + C(\varepsilon)\big) C_V^2 \quad \forall k \in \mathbb{N}, \tag{5.24}$$

woraus die gleichmäßige Schranke

$$\|w_k'\|_{L^2} \leq C \quad \forall k \in \mathbb{N}, \tag{5.25}$$

wobei die Konstante C unabhängig von k ist. Da man $\|w_j - \bar{w}_k\|_{L^2}$ mit der Poincaré-Ungleichung gegen $\|w_k'\|_{L^2}$ abschätzt und damit nach (5.25) unabhängig von k nach oben abgeschätzt werden kann, reicht es also, die Mittelwerte $\bar{w}_k$ gleichmäßig abzuschätzen.

Dazu beachte, dass die Funktion $v_k(x) := w_k(x) - \bar{w}_k$ verschwindenden Integralmittelwert hat, so dass für jedes $i = 1, \dots, N$ Punkte $x_k^i \in [0,T]$ existieren, so dass

$$v_k^i(x_k^i) = \frac{1}{T} \int_0^T v_k^i(t)\,\mathrm{d}t = 0.$$

Daraus folgt nach Satz 2.15

$$|v_k^i(x) - v_k^i(x_k^i)| = |v_k^i(x)| \le \int_0^T |(v_k^i)'(t)|\,\mathrm{d}t \le \int_0^T |v_k(t)|\,\mathrm{d}t \qquad \forall i = 1, \dots, N.$$

Zur Abschätzung der L^∞-Norm von v_k schätzen wir zunächst ab

$$|v_k(x)| = \sqrt{\sum_{i=1}^N (v_k^i(x))^2} \le \sqrt{N} \max_{i \in \{1,\dots,N\}} |v_k^i(x)|,$$

sodass mit der Hölder-Ungleichung und mit (5.25)

$$\|v_k\|_{L^\infty([0,T],\mathbb{R}^N)} \le \sqrt{N} \int_0^T |v_k'(t)|\,\mathrm{d}t \le \sqrt{NT}\|v_k'\|_{L^2} = \sqrt{NT}\|w_k'\|_{L^2} \overset{(5.25)}{\le} C(T,V,N). \tag{5.26}$$

Da $v_k = w_k - \bar{w}_k$, ist noch zu zeigen, dass $|\bar{w}_k|$ unabhängig von k nach oben abgeschätzt werden kann. Dazu nutzen wir wieder die Konvexität von $z \mapsto V(x,z)$:

$$V\big(x, \frac{\bar{w}_k}{2}\big) = V\big(x, \frac{1}{2}(w_k(x) - v_k(x))\big) \le \frac{1}{2} V(x, w_k(x)) + \frac{1}{2} V(x, -v_k(x)),$$

woraus die Energieabschätzung

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}(w_k) &= \frac{1}{2} \int_0^T |w_k'(x)|^2\,\mathrm{d}x + \int_0^T V(x, w_k(x))\,\mathrm{d}x \\
&\ge \frac{1}{2} \int_0^T |w_k'(x)|^2\,\mathrm{d}x + 2\int_0^T V\big(x, \frac{\bar{w}_k}{2}\big)\,\mathrm{d}x - \int_0^T V(x, -v_k(x))\,\mathrm{d}x \\
&\ge 2\int_0^T V\big(x, \frac{\bar{w}_k}{2}\big)\,\mathrm{d}x - \tilde{C}_V
\end{aligned} \tag{5.27}$$

folgt. Hierbei ergibt sich die Konstante $\tilde{C}_V$ aus der L^∞-Schranke an v_k in (5.26), womit der Integrand des letzten Integrals in der vorletzten Gleichungszeile gegen

$$\max_{[0,T]\times\overline{B_{\|v_k\|_{L^\infty}}(0)}} V$$

abgeschätzt ist. Die Energieabschätzung (5.27) liefert für eine Minimalfolge $\{w_k\}_k \subset \mathcal{C}(T)$ dann die Abschätzung

$$\int_0^T V\big(x, \frac{\bar{w}_k}{2}\big)\,\mathrm{d}x \le C^* \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

und damit wegen der Koerzivitätsvoraussetzung (K) $\bar{w}_k \le C^{**}$ für alle k, wobei C^{**} von C^* aber nicht von k abhängt. Damit ist schließlich

$$\|w_k\|_{L^\infty} = \|v_k + \bar{w}_k\|_{L^\infty} \le C(T,V,N) + C^{**} \quad \forall k \in \mathbb{N},$$

was zusammen mit (5.24) die gewünschte gleichmäßige, von k unabhängige Abschätzung der vollen $W^{1,2}$-Normen der Minimalfolgenglieder w_k liefert. Nun kann man genauso wie im Beweis von Satz 5.6 die Unterhalbstetigkeit des Energiefunktionals nutzen, um die Existenz eines Minimierers zu erhalten. Darüberhinaus greift auch hier die Regularitätstheorie, um die C^2-Regularität der Lösung und die Gültigkeit der Bewegungsgleichung (BWGl) inklusive der Periodizität der ersten Ableitung zu zeigen. □

Bemerkung:
Wir haben gesehen, dass die Koerzivitätsvoraussetzung (K) die Existenz eines Punktes $\bar{z} \in \mathbb{R}^N$ mit der Bedingung (5.23) impliziert. Falls aber die Abbildung $z \mapsto V(x,z)$ für alle $x \in [0,T]$ als *strikt* konvex vorausgesetzt wird, dann sind die Bedingungen (K) und (5.23) sogar äquivalent. Dazu reicht es einzusehen, dass in dem Fall aus (5.23) die Koerzivität (K) folgt. Tatsächlich folgt aus der strikten Konvexität von $V(x,\cdot)$ die strikte Ungleichung

$$\int_0^T V(x,z)\,\mathrm{d}x > \int_0^T V(x,\bar{z})\,\mathrm{d}x + \int_0^T (z-\bar{z})\cdot V_z(x,\bar{z})\,\mathrm{d}x \overset{(5.23)}{=} \int_0^T V(x,\bar{z})\,\mathrm{d}x,$$

so dass wegen der Kompaktheit der Sphäre $\mathbb{S}^{N-1} \subset \mathbb{R}^N$

$$\delta := \min_{\mathbb{S}^{N-1}} \int_0^T \big[V(x,\bar{z}+\cdot) - V(x,\bar{z})\big]\,\mathrm{d}x > 0$$

folgt. Damit schließen wir für $|z| \geq 1$ mit der (strikten) Konvexität von $V(x,\cdot)$

$$\begin{aligned}
\delta &\leq \int_0^T V\big(x,\bar{z}+\frac{z}{|z|}\big)\,\mathrm{d}x - \int_0^T V(x,\bar{z})\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^T V\big(x,\frac{1}{|z|}(z+\bar{z}) + \big(1-\frac{1}{|z|}\big)\bar{z}\big)\,\mathrm{d}x - \int_0^T V(x,\bar{z})\,\mathrm{d}x \\
&\leq \frac{1}{|z|}\int_0^T V(x,z+\bar{z})\,\mathrm{d}x + \big(1-\frac{1}{|z|}\big)\int_0^T V(x,\bar{z})\,\mathrm{d}x - \int_0^T V(x,\bar{z})\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{|z|}\Big[\int_0^T V(x,z+\bar{z})\,\mathrm{d}x - \int_0^T V(x,\bar{z})\,\mathrm{d}x\Big],
\end{aligned}$$

also

$$\int_0^T V(x,z+\bar{z})\,\mathrm{d}x \geq \delta|z| + \int_0^T V(x,\bar{z})\,\mathrm{d}x \to \infty \ \text{ für } \ |z| \to \infty,$$

was (K) impliziert.

5.4 Periodische Lösungen von Hamilton-Systemen

Wir betrachten Hamilton-Gleichungen für den Spezialfall, dass die Hamilton-Funktion H nur von $z,\zeta \in \mathbb{R}^N$ abhängt, also $H = H(z,\zeta)$, und *nicht* explizit von der Zeitvariablen $x \in \mathbb{R}$, weswegen das folgende System auch als *autonom* bezeichnet wird – im Gegensatz zu den in Kapitel 5.3 betrachteten Bewegungsgleichungen (BWGl).

$$\begin{cases} u'(x) &= H_\zeta(u(x),v(x)) \\ v'(x) &= -H_z(u(x),v(x)) \end{cases} \quad \text{für } \ x \in \mathbb{R}. \tag{HAM}$$

Gesucht sind periodische Lösungen $(u,v) \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R}^{2N})$ von (HAM), wobei man die Periode hier nicht vorgeben möchte.

Solche und viel allgemeinere Probleme wurden u.a. von Moser [78], Rabinowitz [86], Clarke und Ekeland [11, 12, 14] bearbeitet; siehe auch die Darstellungen in den Büchern von Ekeland [34], Mawhin-Willem [70], Rabinowitz [88] und Struwe [100].

Wir erinnern an Beispiel 1.20, wo wir für einen Integranden $F = F(x,z)$ eine Hamilton-Funktion $H = H(z,\zeta)$ erhielten, welche ausgewertet an einer Lösung (u,v) des Hamilton-Systems (HAM) konstant war, d.h.

$$\frac{d}{dx}\big[H(u(x),v(x))\big] = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Mit anderen Worten, Lösungen von (HAM) liegen auf Niveaumengen von H, und das motiviert die Suche von periodischen Orbits auf Niveaumengen von H, also die Suche nach periodischen Lösungen mit Werten in einer solchen Niveaumenge. Wir werden sehen, dass die zu (HAM) gehörigen Wirkungsfunktionale im Allgemeinen indefinit sind, so dass die Einschränkung auf Niveaumengen von H eine Möglichkeit darstellt, die sonst fehlende Kompaktheit von Funktionenfolgen (z.B. Minimalfolgen) zu sichern. Die Indefinitheit der Wirkungsfunktionale führte auf Ansätze mit sogenannten *Min-Max-Methoden*, die wir im Rahmen dieser Vorlesung nicht besprechen können; siehe z.B. die wegweisenden Arbeiten von Rabinowitz [86, 87] und seine Monographie [88]. Wir stellen hier einen alternativen Ansatz über ein duales Funktional dar, der von Clarke und Ekeland entwickelt wurde [11, 12, 14].

Zunächst schreiben wir das System (HAM) etwas kompakter, indem wir die Größen

$$U(x) := \begin{pmatrix} u(x) \\ v(x) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2N} \quad \text{für } x \in \mathbb{R}, \quad Z := \begin{pmatrix} z \\ \zeta \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2N} \quad \text{und } H(Z) := H(z,\zeta)$$

definieren, sodass wir (HAM) schreiben können als die vektorielle Differentialgleichung

$$U'(x) = JH_Z(U(x)) \quad \text{für } x \in \mathbb{R}, \tag{HAM}$$

wobei die lineare Abbildung $J : \mathbb{R}^{2N} \to \mathbb{R}^{2N}$ durch die Matrix

$$J := \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{Id}_{R^N} \\ -\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^N} & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{mit } J(Z) = J\begin{pmatrix} z \\ \zeta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \zeta \\ -z \end{pmatrix}$$

gegeben ist. Man rechnet leicht nach, dass

$$J^2 = -\mathrm{Id}_{R^{2N}} \quad \text{und} \quad J^{-1} = -J = J^T. \tag{5.28}$$

Wir betrachten als Variationsansatz zunächst das gegenüber (1.29) in Abschnitt 1.4 leicht veränderte *Wirkungsfunktional*

$$\mathcal{W}_{[0,T]}(U) := \int_0^T \Big[\frac{1}{2}U(x)\cdot JU'(x) + H(U(x))\Big]\,\mathrm{d}x \tag{wirk}$$

auf der Zulässigkeitsklasse

$$\mathcal{C}(T) \equiv C^1(\mathbb{R}/T\mathbb{Z},\mathbb{R}^{2N}) := \{U \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R}^{2N}) : U(x+T) = U(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}\},$$

und schreiben zunächst

$$\mathcal{W}_{[0,T]}(U) = \int_0^T E(U(x),U'(x))\,\mathrm{d}x$$

mit einem Integranden $E : \mathbb{R}^{2N} \times \mathbb{R}^{2N} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$E(Z,P) = \frac{1}{2} Z^T JP + H(Z) = \frac{1}{2}(JP)^T Z + H(Z) = \frac{1}{2} P^T J^T Z + H(Z).$$

Es ergeben sich die partiellen Ableitungen

$$E_Z(Z,P) = \frac{1}{2} JP + H_Z(Z), \quad E_P(Z,P) = \frac{1}{2}(Z^T J)^T,$$

und damit die EULER-LAGRANGE-Gleichung für $\mathcal{W}_{[0,T]}$ als

$$\frac{d}{dx}\big[E_P(U(x), U'(x))\big] = E_Z(U(x), U'(x)),$$

also konkret

$$\frac{1}{2}(U'(x)^T J)^T = \frac{1}{2} JU'(x) + H_Z(U(x)) \quad \text{für } \; x \in \mathbb{R}.$$

Das Auflösen der linken Klammer mit den Regeln der Transposition führt mit (5.28) zunächst auf

$$\frac{1}{2} J^T U'(x) = -\frac{1}{2} JU'(x) = \frac{1}{2} JU'(x) + H_Z(U(x)),$$

und anschließende Multiplikation von links mit der Matrix J schließlich auf (HAM) in der vektoriellen Form. Periodische Lösungen von U von (HAM) sind also kritische Punkte des Wirkungsfunktionals $\mathcal{W}_{[0,T]}$, und wir werden versuchen, mit U punktweise in der Niveaumenge $\{Z \in \mathbb{R}^{2N} : H(Z) = h\}$ für eine vorgegebene positive Konstante $h \in \mathbb{R}$ zu bleiben.

Wir betrachten die folgende Zulässigkeitsklasse 1-periodischer Funktionen

$$\mathcal{C}(1,h) := \{U \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^{2N}) : U(x+1) = U(x) \; \forall x \in \mathbb{R}, \, \mathcal{H}(U) := \int_0^1 H(U(x)) \, \mathrm{d}x = h\},$$

wobei wir bemerken, dass wir die technisch anspruchsvollere Bedingung $H(U(x)) = h$ durch eine harmlosere *isoperimetrische Nebenbedingung* ersetzt haben. Zur Anwendung der zugehörigen LAGRANGE-Multiplikatorregel, Proposition 1.20, ist zu zeigen, dass es mindestens eine Funktion $\Phi \in C_0^\infty((0,1), \mathbb{R}^{2N})$ gibt, so dass

$$\delta\mathcal{H}(U, \Phi) = \int_0^1 H_Z(U(x)) \cdot \Phi(x) \, \mathrm{d}x \neq 0.$$

Wäre aber $\delta\mathcal{H}(U, \Phi) = 0$ für alle solche Testfunktionen Φ, dann könnte man aus dem Fundementallemma, Lemma 1.4 schließen, dass $H_Z(U(x)) = 0$ für alle $x \in [0,1]$ und damit wegen der Periodizität von U auch für alle $x \in \mathbb{R}$. Also könnte man unter der Annahme, dass $H_Z(\cdot) \neq 0$ zumindest auf der Niveaumenge[5] $\{Z \in \mathbb{R}^{2N} : H(Z) = h\}$ die Entartung der isoperimetrischen Nebenbedingung in der Klasse $\mathcal{C}(1,h)$ aussschließen, so dass Proposition 1.20 dann unter der Annahme der Existenz eines Minimierers (oder Maximierers) $U \in \mathcal{C}(1,h)$ von $\mathcal{W}_{[0,1]}(\cdot)$ die Existenz eines LAGRANGE-Multiplikators $\lambda \in \mathbb{R}$ garantierte mit der Eigenschaft

$$\frac{d}{dx}\big[E_P(U(x), U'(x)) + \lambda H_P(U(x))\big] = E_Z(U(x), U'(x)) + \lambda H_Z(U(x)) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

[5]Die Bedingung $H_Z(\cdot) \neq 0$ auf der Niveaumenge $\{Z \in \mathbb{R}^{2N} : H(Z) = h\}$ bedeutet geometrisch, dass die Niveaumenge eine C^1-Hyperfläche im $\mathbb{R}^{2N}$ ist, was man in der Differentialgeometrie oder Flächentheorie mit Hilfe des Impliziten Funktionensatzes zeigt.

In unserem Fall ergibt sich daraus die leicht veränderte HAMILTON-Gleichung

$$U'(x) = (1+\lambda)JH_Z(U(x)) =: TJH_Z(U(x)) \quad \forall x \in \mathbb{R}. \tag{HAM$_T$}$$

Für den Spezialfall $T = 1+\lambda = 0$ hätte man konstante und damit triviale Lösungen, an denen man nicht interessiert ist. Ist aber $T \neq 0$, dann kann man wie in Kapitel 1.4, Beispiel (1.20) direkt nachrechnen, dass $H(U(x)) = const.$ für alle $x \in \mathbb{R}$, so dass die isoperimetrische Nebenbedingung in $\mathcal{C}(1,h)$ impliziert, dass $H(U(x)) = h$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Weiterhin kann man durch die Transformation $\xi := Tx$, also $x = \xi/T$ eine T-periodische Lösung $\hat{U}$ durch

$$\hat{U}(\xi) := U(x) = U\Big(\frac{\xi}{T}\Big)$$

gewinnen; denn einerseits gilt wegen (HAM$_T$) die ursprüngliche HAMILTON-Gleichung (HAM):

$$\hat{U}'(\xi) = \frac{d}{d\xi}\hat{U}(\xi) = U'\big(\frac{\xi}{T}\big)\frac{1}{T} \overset{(\text{HAM}_T)}{=} \frac{1}{T}TJH_Z\Big(U\big(\frac{\xi}{T}\big)\Big) = JH_Z(\hat{U}(\xi)) \quad \forall \xi \in \mathbb{R},$$

und andererseits hat man wegen $U \in \mathcal{C}(1,h)$ die T-Periodizität

$$\hat{U}(\xi+T) = U\Big(\frac{\xi+T}{T}\Big) = U\Big(\frac{\xi}{T}+1\Big) = U\Big(\frac{\xi}{T}\Big) = \hat{U}(\xi) \quad \forall \xi \in \mathbb{R}.$$

Die Periode dieser Lösung hängt also wesentlich von dem a priori nicht bekannten LAGRANGE-Parameter λ ab. Außerdem bildet $\hat{U}$ weiterhin in die gewünschte Niveaufläche ab:

$$H(\hat{U}(\xi)) = H\Big(U\big(\frac{\xi}{T}\big)\Big) = h \quad \forall \xi \in \mathbb{R},$$

da $U \in \mathcal{C}(1,h)$.

Zusammenfassend gesagt würde also die Existenz eines Minimierers (oder Maximierers) $U \in \mathcal{C}(1,h)$ des Wirkungsfunktionals $\mathcal{W}_{[0,1]}$ eine T-periodische Lösung $\hat{U}$ von (HAM) *mit Orbit in der Niveaufläche $\{Z \in \mathbb{R}^{2N} : H(Z) = h\}$ liefern.* Das Wirkungsfunktional lässt sich allerdings nicht ohne Weiteres minimieren, wie die Folge auf $\mathbb{R}$ glatter Funktionen

$$U_k(x) := \cos(\lambda_k x)e - \sin(\lambda_k x)Je \ \text{ für } \ e \in \mathbb{S}^{2N-1} \subset \mathbb{R}^{2N},\ \lambda_k := 2\pi k$$

demonstriert. Tatsächlich gilt

$$U_k(x+1) = \cos(\lambda_k x + 2\pi k)e - \sin(\lambda_k x + 2\pi k)Je = U_k(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{N},$$

und mit $Je \perp e$ folgt

$$|U_k(x)| = \sqrt{\cos^2(\lambda_k x) + \sin^2(\lambda_k x)} = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{N},$$

so dass unter der Annahme, dass $H|_{\mathbb{S}^{2N-1}} \equiv h$ (also z.B. wenn H radialsymmetrisch ist), dann

$$H(U_k(x)) = h \quad \forall x \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{N}. \tag{5.29}$$

Damit sind diese Funktionen U_k zulässig, d.h. $\{U_k\}_k \subset \mathcal{C}(1,h)$. Aber mit

$$U_k'(x) = -\lambda_k \sin(\lambda_k x)e - \lambda_k \cos(\lambda_k x)Je$$

folgt aus $J^2 = -\mathrm{Id}_{R^{2N}}$

$$JU_k'(x) = -\lambda_k\big[\sin(\lambda_k x)Je + \cos(\lambda_k x)J^2 e\big] = -\lambda_k\big[\sin(\lambda_k x)Je - \cos(\lambda_k x)e\big],$$

was wegen $e \perp Je$ zu

$$\begin{aligned} U_k(x)\cdot JU_k'(x) &= \big[\cos(\lambda_k x)e - \sin(\lambda_k x)Je\big]\cdot\big[\cos(\lambda_k x)e - \sin(\lambda_k x)Je\big]\lambda_k \\ &= \big[\cos^2(\lambda_k x) + \sin^2(\lambda_k x)\big]\lambda_k = \lambda_k \quad \forall x\in\mathbb{R}, k\in\mathbb{N} \end{aligned}$$

führt, und damit wegen (5.29) für den Wert des Wirkungsfunktionals

$$\mathcal{W}_{[0,1]}(U_k) = \frac{1}{2}\lambda_k + h \quad \forall k\in\mathbb{N}$$

ergibt. Damit folgt einerseits $\mathcal{W}_{[0,1]}(U_k) \to +\infty$ für $k \to +\infty$ und andererseits $\mathcal{W}_{[0,1]}(U_k) \to -\infty$ für $k \to -\infty$; das Wirkungsfunktional lässt sich also auf $\mathcal{C}(1,h)$ weder maximieren noch minimieren.

Diese Beobachtung führte Rabinowitz darauf, mit sogenannten Min/Max- oder Mountain-Pass-Methoden nach kritischen Punkten des Wirkungsfunktionals, also etwa Sattelpunkten von $\mathcal{W}_{[0,1]}$ zu suchen; siehe [86, 87, 88]. Wir verfolgen hier aber den Dualitätsansatz von Clarke und Ekeland [11, 12, 14], also die Idee, die direkte Methode der Variationsrechnung auf ein gewissermaßen duales Problem in passenden L^q-Räumen anzuwenden, um den folgenden Existenzsatz zu beweisen.

Satz 5.9 [Existenz periodischer Lösungen für (HAM)]
Die Funktion $H \in C^1(\mathbb{R}^{2N})$ sei strikt konvex, erfülle $H \geq 0$ auf $\mathbb{R}^{2N}$, $H(0) = 0$, und die Koerzivitätsbedingung

$$H(Z) \to +\infty \quad \text{für } |Z| \to \infty. \tag{5.30}$$

Dann existiert für jedes $h > 0$ (mindestens) eine nichttriviale periodische Lösung $U \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^{2N})$ von

$$U'(x) = JH_Z(U(x)) \quad \text{für } x\in\mathbb{R} \tag{HAM}$$

mit $H(U(x)) = h$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Bemerkung:
Die Niveaufläche $\{X \in \mathbb{R}^{2N} : H(X) = h\}$ ist wegen der vorausgesetzten strikten Konvexität von H tatsächlich eine *differentialgeometrisch reguläre Hyperfläche* (vgl. Fußnote auf Seite 152), da einerseits $H(0) \leq H(Z)$ für alle $Z \in \mathbb{R}^{2N}$, woraus $H_Z(0) = 0$ folgt. Und andererseits ist H_Z streng monoton, d.h.

$$(H_Z(Z) - H_Z(0))\cdot(Z - 0) > 0 \quad \forall Z \in \mathbb{R}^{2N}\setminus\{0\}.$$

Hieraus folgt $H_Z(Z)\cdot Z > 0$ für alle $Z \neq 0$, und damit $H_Z(Z) \neq 0$ für alle $Z \in \{X \in \mathbb{R}^{2N} : H(X) = h\}$ wegen $h > 0$; denn wegen der strikten Konvexität von H ist

$$H(Z) > H(0) + H_Z(0)\cdot(Z-0) = 0.$$

Beweis von Satz 5.9. Der lange Beweis enthält mehrere Reduktionen und Umformulierungen in andere Problemstellungen und wird in 10 Schritte unterteilt.

Schritt 1: Ohne Einschränkung ist $h = 1$ anzunehmen. Tatsächlich erfüllt die reskalierte Hamilton-Funktion $H_h(\cdot) := \frac{1}{h}H(\cdot)$ dieselben Voraussetzungen wie $H(\cdot)$. Falls also eine Lösung $U \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^{2N})$ von (HAM) mit $H_h(U(x)) = 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gefunden wurde, dann erfüllt die reskalierte Funktion $\tilde{U}(\zeta) := U(h\zeta)$ offensichtlich

$$H(\tilde{U}(\zeta)) = H(U(h\zeta)) = hH_h(U(h\zeta)) = h$$

und wegen (HAM) mit H_h anstelle von H

$$\begin{aligned}\tilde{U}'(\zeta) &= \frac{d}{d\zeta}(U(h\zeta)) = hU'(h\zeta) \overset{\text{(HAM)}}{=} hJ(H_h)_Z(U(h\zeta)) \\ &= h\frac{1}{h}JH_Z(U(h\zeta)) = JH_Z(\tilde{U}(\zeta)) \quad \forall \zeta \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Schritt 2: Verschiedene Darstellungen der Niveaumenge $H^{-1}(1)$.

2A: Behauptung: $H^{-1}(1) = \partial C$ für $C := \{Z \in \mathbb{R}^{2N} : H(Z) < 1\}$. Wir bemerken zunächst, dass die Menge C wegen der Stetigkeit von H offen ist. Desweiteren ist $C \neq \emptyset$, da $H(0) = 0 < 1$, also $0 \in C$. Außerdem ist C konvex, da für $Z, X \in C$ und $\lambda \in [0,1]$ wegen der (strikten) Konvexität von H gilt

$$H(\lambda Z + (1-\lambda)X) < \lambda H(Z) + (1-\lambda)H(X) < 1.$$

Zum eigentlichen Beweis der Unterbehauptung 2A sei $Z \in H^{-1}(1)$, also $H(Z) = 1$. Wäre nun $H(\zeta) \geq 1$ für alle $\zeta \in B_\varepsilon(Z)$ für ein $\varepsilon > 0$, dann wäre Z ein lokales Minimum von H, so dass $H_Z(Z) = 0$. Damit erhielten wir aber aus der strikten Konvexität von H die widersprüchliche Aussage

$$0 = H(0) > H(Z) + H_Z(Z) \cdot (0 - Z) = 1.$$

Damit gilt nun für alle $\varepsilon > 0$, dass $B_\varepsilon(Z) \cap C \neq \emptyset$, womit $Z \in \overline{C} \setminus C = \partial C$, wobei die letzte Identität aus der Offenheit von C folgt. Also ist gezeigt, dass $H^{-1}(1) \subset \partial C$. Andererseits ist aber ∂C in $H^{-1}(1)$ enthalten; denn für alle $X \in \partial C$ gibt es eine Folge $X_k \in C$ mit $X_k \to X$ für $k \to \infty$, so dass mit der Stetigkeit von H folgt, dass $1 > H(X_k) \to H(X)$, also $H(X) \leq 1$. Wäre nun $H(X) < 1$, dann wäre $X \in C$, damit aber $X \notin \partial C$, da C offen. Also ist $H(X) = 1$. Insgesamt haben wir damit $H^{-1}(1) \subset \partial C \subset H^{-1}(1)$, was die Unterbehauptung 2A beweist.

2B: Für jeden Richtungsvektor $e \in \mathbb{S}^{2N-1}$ gibt es genau einen Skalierungsfaktor $r(e) > 0$, so dass $r(e)e \in \partial C$. Mit der strikten Konvexität von H ist auch die Einschränkung $H_e : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $H_e(t) := H(te)$ auf den Strahl in Richtung e strikt konvex, woraus die strikte Ungleichung

$$H_e(t) > H_e(s) + H_e'(s)(t-s) \quad \forall s, t \in \mathbb{R},\, s \neq t \tag{5.31}$$

folgt. Außerdem ist $H_e(0) = H(0) = 0 \leq H_e(t)$ für alle t, da $H(0) \leq H(Z)$ für alle $Z \in \mathbb{R}^{2N}$. Daraus folgt $H_e'(0) = 0$.

Gäbe es $0 < r_1 < r_2$ mit $r_1 e \in \partial C$ und $r_2 e \in \partial C$, dann würde nach Teil 2A

$$H_e(r_1) = H(r_1 e) = 1 = H(r_2 e) = H_e(r_2)$$

folgen. Die Ableitung der strikt konvexen Funktion H_e ist streng monoton wachsend, und deshalb gilt $H_e'(r_i) \geq H_e'(0) = 0$ für $i = 1, 2$. Das führt mit (5.31) zu dem folgenden Widerspruch

$$1 = H_e(r_2) \overset{(5.31)}{>} H_e(r_1) + H_e'(r_1)(r_2 - r_1) \geq 1,$$

womit die Eindeutigkeit in der Aussage 2B bewiesen ist.

Die Existenz solcher endlicher Skalierungsfaktoren folgt aus der vorausgesetzten Koerzivität (5.30); denn diese impliziert wegen $C = \{Z \in \mathbb{R}^{2N} : H(Z) < 1\}$ die Existenz einer Zahl $R > 0$, so dass

$$\overline{C} \subset B_R(0) \subset \mathbb{R}^{2N}. \tag{5.32}$$

Dass ein Skalierungsfaktor $r(e)$ existiert, folgt nun aus dem Zwischenwertsatz und der Stetigkeit von H und damit von H_e: Mit $H_e(0) = 0$ ist $H_e(t) < 1$ für alle hinreichend kleinen $t > 0$. Andererseits ist $H_e(2R) > 1$, also muss ein $r(e) \in (0, 2R)$ existieren, so dass $r(e)e \in \partial C$.

2C: Alternative Darstellung von ∂C als 1-Finslerschen Einheitssphäre. Setze

$$F_c(\zeta) := \begin{cases} 0 & \text{für } |\zeta| = 0, \\ \frac{|\zeta|}{r(\zeta/|\zeta|)} & \text{für } |\zeta| > 0. \end{cases} \tag{5.33}$$

Man liest nun direkt aus dieser Definition ab, dass

$$F_C(\zeta) \begin{cases} = 1 & \text{für } \zeta \in \partial C \\ < 1 & \text{für } \zeta \in C \\ > 1 & \text{für } \zeta \in \mathbb{R}^{2N} \setminus \overline{C}. \end{cases}$$

Also erhalten wir zwei verschiedene Darstellung von ∂C als 1-Niveaumengen:

$$H^{-1}(1) = \partial C = F_C^{-1}(1). \tag{5.34}$$

Wir bemerken, dass $F_C(t\zeta) = tF_C(\zeta)$ für alle $\zeta \in \mathbb{R}^{2N}$ und alle $t > 0$, mit anderen Worten, die Finslersche Funktion F_C ist positiv 1-homogen. Außerdem gilt $F_C(\zeta) \to +\infty$ für $|\zeta| \to \infty$, also auch hier eine Koerzivität.

Schritt 3: Die für $q \in (1, 2)$ definierte neue Hamilton-Funktion $\tilde{H}(Z) := F_C^q(Z)$ für $Z \in \mathbb{R}^{2N}$ ist von der Klasse $C^1(\mathbb{R}^{2N})$. Um diese Regularitätsaussage zu beweisen, werden wir mit Hilfe der Funktion $\Psi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{2N} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$\Psi(r, \theta) := H(r\theta) - 1 \qquad \text{für } \ r > 0,\, \theta \in \mathbb{R}^{2N} \setminus \{0\}$$

eine Variante des Impliziten Funktionensatzes ins Spiel bringen. Dieses Verfahren hatten wir so ähnlich auch im Beweis von Lemma 1.25 in Abschnitt 1.4 eingesetzt, um höhere Regularität einer Hamilton-Funktion zu zeigen. Wir bemerken, dass

$$\Psi(r(e), e) = H(r(e)e) - 1 = H_e(r(e)) - 1 = 0 \qquad \text{für alle } \ e \in \mathbb{S}^{2N-1} \tag{5.35}$$

und

$$\frac{\partial}{\partial r}\Big|_{\substack{r=r(e)\\ \theta=e}} \Psi(r, \theta) = H_Z(r(e)e) \cdot e \neq 0; \tag{5.36}$$

denn sonst wäre für $Z \in \mathbb{R}_+ e \setminus \{0, r(e)e\}$ wegen der strikten Konvexität von H

$$H(Z) > H(r(e)e) + H_Z(r(e)e) \cdot (Z - r(e)e)$$

und damit für den Einheitsvektor

$$\frac{Z - r(e)e}{|Z - r(e)e|} = \pm e$$

auch
$$\frac{H(Z)-1}{|Z-r(e)e|}=\frac{H(Z)-H(r(e)e)}{|Z-r(e)e|}>\pm H_Z(r(e)e)\cdot e=0.$$
Letzteres ist aber für $Z\in\mathbb{R}_+e$ mit $0<|Z|<r(e)$ falsch; denn für solche Z ist $F_C(Z)<1$ nach Definition (5.33) in Schritt 2C, und das ist gleichbedeutend mit $Z\in C$ und damit $H(Z)<1=H(r(e)e)$. Damit ist (5.36) bewiesen.

Mit Hilfe des Impliziten Funktionen Satzes in der Version für eingebettete Untermannigfaltigkeiten des euklidischen Raumes (siehe z.B. [46, Chapter 1.3]) folgt nun aus (5.35) und (5.36) die Existenz einer Zahl $\varepsilon>0$ und einer Funktion $\tilde r\in C^1(B_\varepsilon(e))$, so dass
$$\Psi(\tilde r(\theta),\theta)=0\qquad\text{für alle }\ \theta\in B_\varepsilon(e)\subset\mathbb{S}^{2N-1}.$$
Die bereits in Schritt 2B global definierte Funktion $r:\mathbb{S}^{2N-1}\to(0,\infty)$ stimmt also lokal auf $B_\varepsilon(e)\subset\mathbb{S}^{2N-1}$ mit $\tilde r$ überein, weshalb auch $r\in C^1(B_\varepsilon(e))$. Da $e\in\mathbb{S}^{2N-1}$ beliebig gewählt war, ist damit $r\in C^1(\mathbb{S}^{2N-1})$. Die C^1-Glattheit von r auf der Sphäre $\mathbb{S}^{2N-1}$ bedeutet in der Differentialtopologie von Untermannigfaltigkeiten, dass r die Einschränkung einer $C^1(\mathbb{R}^{2N})$-Funktion auf die Sphäre $\mathbb{S}^{2N-1}$ ist; siehe z.B. [46, Chapter 1.1]. Damit ist aber die Funktion
$$F_C(\cdot)=\frac{|\cdot|}{r\circ\frac{(\cdot)}{|\cdot|}}$$
als Verkettung von C^1-Funktionen von der Klasse $C^1(\mathbb{R}^{2N}\setminus\{0\})$. Wegen $q>1$ ist dann auch $\tilde H\in C^1(\mathbb{R}^{2N}\setminus\{0\})$. Um diese Regularität auf ganz $\mathbb{R}^{2N}$ zu erhalten, beobachten wir, dass wegen der im Schritt 2C erwähnten positiven 1-Homogenität von F_C die neue HAMILTON-Funktion $\tilde H$ positiv q-homogen ist, d.h.
$$\tilde H(tZ)=t^qH(Z)\qquad\text{für alle }\ Z\in\mathbb{R}^{2N},\,t>0.\tag{5.37}$$
Durch Differentiation nach Z erhält man
$$\tilde H_Z(tZ)=t^{q-1}\tilde H_Z(Z)\quad\forall Z\in\mathbb{R}^{2N},\,t>0,\tag{5.38}$$
was uns nun erlaubt, den Gradienten $\tilde H_Z$ stetig durch den Wert Null in die $0\in\mathbb{R}^{2N}$ fortzusetzen:
$$\tilde H_Z(0):=\lim_{t\searrow0}\tilde H_Z(tZ)=\lim_{t\searrow0}t^{q-1}\tilde H_Z(Z)=0,$$
also erreichen wir $\tilde H\in C^1(\mathbb{R}^{2N})$.

Schritt 4: $\tilde H$ ist strikt konvex.

4A: F_C ist konvex. Dazu betrachten wir zuerst $Z_1,Z_2\in\mathbb{R}^{2N}$ mit $F_C(Z_1)=1=F_C(Z_2)$, also nach Schritt 2C gilt $Z_1,Z_2\in\partial C\subset\overline{C}$, womit wegen der in Schritt 2A beobachteten Konvexität von C (und damit auch von $\overline{C}$) auch $\lambda Z_1+(1-\lambda)Z_2\in\overline{C}$ für alle $\lambda\in[0,1]$. Nach Schritt 2C ist deshalb
$$F_C(\lambda Z_1+(1-\lambda)Z_2)\le1=\lambda F_C(Z_1)+(1-\lambda)F_C(Z_2)\quad\forall\lambda\in[0,1].\tag{5.39}$$
Andererseits gilt z.B. für $Z_1=0$, dass $F_C(Z_1)=F_C(0)=0$ nach Schritt 2C, so dass wegen der in Schritt 2C bemerkten positiven 1-Homogenität von F_C dann für beliebiges $Z_2\in\mathbb{R}^{2N}$
$$F_C(\lambda Z_1+(1-\lambda)Z_2)=F_C((1-\lambda)Z_2)=(1-\lambda)F_C(Z_2)=\lambda F_C(Z_1)+(1-\lambda)F_C(Z_2)\tag{5.40}$$

für alle $\lambda \in (0,1)$ folgt. Diese Gleichung gilt aber natürlich auch für $\lambda \in \{0,1\}$. Für beliebige $Z_1, Z_2 \in \mathbb{R}^{2N} \setminus \{0\}$ gilt wegen der positiven 1-Homogenität von F_C, dass $F_C(Z_i/F_C(Z_i)) = 1$ für $i = 1, 2$. Setze nun für einen beliebigen Konvexparameter $\mu \in [0,1]$

$$\lambda := \frac{\mu F_C(Z_1)}{\mu F_C(Z_1) + (1-\mu)F_C(Z_2)} \in [0,1],$$

und benutze (5.39) für $Z_i/F_C(Z_i)$ anstelle von Z_i für $i = 1, 2$ zur Herleitung der Ungleichung

$$\begin{aligned}
1 &\overset{(5.39)}{\geq} F_C\Big(\lambda \frac{Z_1}{F_C(Z_1)} + (1-\lambda)\frac{Z_2}{F_C(Z_2)}\Big) \\
&= F_C\Big(\frac{\mu F_C(Z_1)}{\mu F_C(Z_1) + (1-\mu)F_C(Z_2)} \cdot \frac{Z_1}{F_C(Z_1)} + \Big[1 - \frac{\mu F_C(Z_1)}{\mu F_C(Z_1) + (1-\mu)F_C(Z_2)}\Big] \cdot \frac{Z_2}{F_C(Z_2)}\Big) \\
&= \frac{1}{\mu F_C(Z_1) + (1-\mu)F_C(Z_2)} F_C\Big(\frac{\mu F_C(Z_1) Z_1}{F_C(Z_1)} + \frac{(1-\mu)F_C(Z_2)Z_2}{F_C(Z_2)}\Big),
\end{aligned}$$

folglich nach Multiplikation mit dem Nenner und Kürzen im Argument von F_C

$$\mu F_C(Z_1) + (1-\mu)F_C(Z_2) \geq F_C(\mu Z_1 + (1-\mu)Z_2).$$

Zusammen mit (5.40) ergibt das die Behauptung 4A.

4B: $\tilde{H}$ is strikt konvex. Dies folgt aus der Verkettung der konvexen Funktion F_C mit der strikt konvexen und monoton wachsenden Funktion $\tau \mapsto \tau^q$:

$$\begin{aligned}
\tilde{H}(\mu Z_1 + (1-\mu)Z_2) &= F_C^q(\mu Z_1 + (1-\mu)Z_2) \\
&\overset{4A}{\leq} \big(\mu F_C(Z_1) + (1-\mu)F_C(Z_2)\big)^q < \mu F_C^q(Z_1) + (1-\mu)F_C^q(Z_2) \\
&= \mu \tilde{H}(Z_1) + (1-\mu)\tilde{H}(Z_2) \quad \forall \mu \in (0,1).
\end{aligned}$$

Für $\lambda \in \{0,1\}$ gilt diese Ungleichung, aber nicht strikt, was aber für die strikte Konvexität von $\tilde{H}$ insgesamt reicht.

Schritt 5: Eine Hamilton-Gleichung für $\tilde{H}$. Nach Schritt 2 gilt

$$H^{-1}(1) = \partial C = F_C^{-1}(1) = (F_C^q)^{-1}(1) = \tilde{H}^{-1}(1). \tag{5.41}$$

Wir hatten auch direkt nach Satz 5.9 bemerkt, dass nur in $Z = 0$ der Gradient H_Z verschwindet, so dass $H_Z|_{\partial C} \neq 0$, so dass ∂C als Urbild des *regulären Wertes* 1 der C^1-Funktion H oder auch der C^1-Funktion $\tilde{H}$ eine C^1-Hyperfläche des $\mathbb{R}^{2N}$ ist. Damit weiß man aus der Differentialgeometrie, dass $H_Z(Z) \perp \partial C$ und auch $\tilde{H}_Z(Z) \perp \partial C$ für alle $Z \in \partial C$. Mit anderen Worten, die Gradienten von H und von $\tilde{H}$ bilden Normalenvektoren der Hyperfläche ∂C. Dies bedeutet genauer, dass

$$H_Z(Z) \cdot v = 0 = \tilde{H}_Z(Z) \cdot v \qquad \text{für alle} \quad Z \in \partial C,\, v \in T_Z\partial C, \tag{5.42}$$

wobei wir mit $T_Z\partial C$ den $(2N-1)$-dimensionalen *Tangentialraum* der Hyperfläche ∂C bezeichnet haben. Zur näheren Erläuterung und zum Nachweis, dass (5.42) tatsächlich gilt, bemerken wir, dass sich *Tangentialvektoren* $v \in T_Z\partial C$ als Geschwindigkeitsvektoren von Kurven in folgender Weise darstellen lassen. Sei $\gamma \in C^1((-\varepsilon_0, \varepsilon_0), \mathbb{R}^{2N})$ eine Kurve mit Wertebereich $\gamma((-\varepsilon_0, \varepsilon_0)) \subset \partial C$ und mit $\gamma(0) = Z \in \partial C$ und $\gamma'(0) = v$. Dann folgt aus der Darstellung (5.41) von ∂C mit der Kettenregel die Identität (5.42) durch die folgende Rechnung

$$0 = \frac{d}{ds}|_{s=0} \underbrace{H(\gamma(s))}_{=1} = H_Z(\underbrace{\gamma(0)}_{=Z}) \cdot \underbrace{\gamma'(0)}_{=v} = H_Z(Z) \cdot v = \tilde{H}_Z(\gamma(0)) \cdot \gamma'(0) = \frac{d}{ds}|_{s=0} \underbrace{\tilde{H}(\gamma(s))}_{=1} = 0.$$

Nun ist auch $\tilde{H}_Z|_{\partial C} \neq 0$; denn auch $\tilde{H}$ ist nach Schritt 4 strikt konvex, und wäre $\tilde{H}_Z(Z) = 0$ für ein $Z \in \partial C$, dann hätte man die widersprüchliche Ungleichung

$$0 = \tilde{H}(0) > \tilde{H}(Z) + \tilde{H}_Z(Z) \cdot (0 - Z) = \tilde{H}(Z) = 1.$$

So sieht man übrigens auch, dass $Z = 0$ die einzige Nullstelle und damit einzige Minimalstelle von $\tilde{H}$ ist; denn jede weitere Nullstelle $Z_0 \in \mathbb{R}^{2N}$ von $\tilde{H}$ wäre ebenfalls eine Minimalstelle und würde wegen $\tilde{H}_Z(Z_0) = 0$ die ebenfalls widersprüchliche Ungleichung

$$0 = \tilde{H}(0) > \tilde{H}(Z_0) + \tilde{H}_Z(Z_0) \cdot (0 - Z_0) = \tilde{H}(Z_0) = 0.$$

erfüllen.

Die Bedingung (5.42) für die beiden nicht verschwindenden Gradienten $H_Z(Z)$ und $\tilde{H}_Z(Z)$ impliziert die Existenz eines Proportionalitätsfaktors $\lambda : \partial C \to \mathbb{R}$, so dass

$$H_Z(Z) = \lambda(Z)\tilde{H}_Z(Z) \quad \forall Z \in \partial C. \tag{5.43}$$

Durch Bilden des Skalarproduktes mit $\tilde{H}_Z(Z) \neq 0$ ergibt sich die Funktion

$$\lambda(Z) = \frac{H_Z(Z) \cdot \tilde{H}_Z(Z)}{|\tilde{H}_Z(Z)|^2},$$

die für genügend kleines $\varepsilon > 0$ stetig auf der offenen Umgebung $B_\varepsilon(\partial C) := \{\zeta \in \mathbb{R}^{2N} : \operatorname{dist}(\zeta, \partial C) < \varepsilon\}$ ist.

Falls nun eine Lösung $U \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^{2N})$ der modifizierten HAMILTON-Gleichung

$$U'(x) = J\tilde{H}_Z(U(x)) \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R} \quad \text{mit } U(x+1) = U(x) \tag{$\widetilde{\text{HAM}}$}$$

gefunden wird, dann löse man die nichtlineare gewöhnliche Differentialgleichung

$$\xi'(x) = \lambda(U(\xi(x))) \quad \text{mit } \xi(x+1) = \xi(x) + 1 \tag{5.44}$$

(siehe dazu z.B. [110, Kapitel VIII]); denn dann gilt für die transformierte Funktion $\hat{U}(x) := U(\xi(x))$ wegen ($\widetilde{\text{HAM}}$) und (5.43)

$$\begin{aligned}\hat{U}'(x) = \frac{d}{dx}U(\xi(x)) = U'(\xi(x))\xi'(x) &\overset{(\widetilde{\text{HAM}})}{=} J\tilde{H}_Z(U(\xi(x)))\lambda(U(\xi(x))) \\ &\overset{(5.43)}{=} JH_Z(U(\xi(x))) = JH_Z(\hat{U}(x)),\end{aligned}$$

und wegen der 1-Periodizität von U

$$\hat{U}(x+1) = U(\xi(x+1)) = U(\xi(x)+1) = U(\xi(x)) = \hat{U}(x).$$

Wir bemerken außerdem, dass auch für $\tilde{H}$ gilt:

$$\tilde{H}(Z) \geq \tilde{H}(0) = 0 \quad \forall Z \in \mathbb{R}^{2N} \qquad \text{und} \qquad \tilde{H}(Z) \to +\infty \text{ für } |Z| \to \infty.$$

Schritt 6: Legendre-Transformation von $\tilde{H}$.

Wie in Abschnitt 1.4 definieren wir die Legendre-Transformation von $\tilde{H}$ durch

$$\tilde{H}^*(X) := \sup_{Z \in \mathbb{R}^{2N}} \left\{ Z \cdot X - \tilde{H}(Z) \right\} \qquad \text{für } X \in \mathbb{R}^{2N}. \tag{5.45}$$

Mit der positiven q-Homogenität von $\tilde{H}$ folgt ein superlineares Wachstum von $\tilde{H}$; denn

$$\tilde{H}(Z) = \tilde{H}\Big(|Z|\frac{Z}{|Z|}\Big) = |Z|^q \tilde{H}\Big(\frac{Z}{|Z|}\Big),$$

und damit wegen $q > 1$

$$\frac{\tilde{H}(Z)}{|Z|} = |Z|^{q-1}\tilde{H}\Big(\frac{Z}{|Z|}\Big) \to +\infty \qquad \text{für } |Z| \to \infty,$$

da $\tilde{H}$ bekanntlich nur an der Stelle $Z = 0$ verschwindet; siehe Schritt 5. Zusammen mit der strikten Konvexität von $\tilde{H}$ ergibt sich wie im Beweis von Korollar 1.23 für jedes $X \in \mathbb{R}^{2N}$ die Existenz eines *eindeutigen* Maximierers $Z^*(X) \in \mathbb{R}^{2N}$, für den das Supremum in (5.45) angenommen wird, d.h. $\tilde{H}^*(X) = Z^*(X) \cdot X - \tilde{H}(Z^*(X))$. Weiterhin gilt wegen $\tilde{H} \geq 0$ die Ungleichung $\tilde{H}^*(0) = \sup_{Z \in \mathbb{R}^{2N}}(Z \cdot 0 - \tilde{H}(Z)) \leq 0$ und andererseits $\tilde{H}^*(0) \geq 0 \cdot 0 - \tilde{H}(0) = 0$, so dass $\tilde{H}^*(0) = 0$ folgt. Für andere $X \in \mathbb{R}^{2N}$ schätzen wir unter Benutzung des eindeutigen Maximierers $Z^*(X)$ ab:

$$\tilde{H}^*(X) = Z^*(X) \cdot X - \tilde{H}(Z^*(X)) \geq 0 \cdot X - \tilde{H}(0) = 0,$$

so dass $X = 0$ eine Null- und Minimalstelle von $\tilde{H}^*$ ist. Dass dies die einzige Minimalstelle von $\tilde{H}^*$ ist, sieht man mit Hilfe der weiter unten gezeigten positiven q'-Homogenität von $\tilde{H}^*$ ein für den zu q konjugierten Exponenten $q' > 2$, der also $\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1$ erfüllt. Tatsächlich führt die Annahme einer zweiten Minimal- und Nullstelle $X_0 \neq 0$ von $\tilde{H}^*$ nach Definition der Legendre-Transformierten in Kombination mit der positiven q'-Homogenität auf

$$0 = t^{q'}\tilde{H}^*(X_0) = \tilde{H}^*(tX_0) = \sup_{Z \in \mathbb{R}^{2N}}(Z \cdot (tX_0) - \tilde{H}(Z)).$$

Für alle $Z \in \mathbb{R}^{2N}$ gilt also $Z \cdot (tX_0) - \tilde{H}(Z) \leq 0$ für alle $t > 0$, und wählt man nun speziell $Z := X_0$ erhält man die wegen $X_0 \neq 0$ unmögliche Aussage $t|X_0|^2 - \tilde{H}(X_0) \leq 0$ für alle $t > 0$.

Dies zeigt, dass $\tilde{H}^*(0) < \tilde{H}^*(X)$ für alle $X \neq 0$, wenn wir abschließend die positive q'-Homogenität von $\tilde{H}^*$ gezeigt haben. Dazu bemerken wir zunächst, dass wegen $\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1$ die Identität

$$(q'-1)q = (\frac{q}{q-1} - 1)q = \frac{q-(q-1)}{q-1}q = \frac{q}{q-1} = q' \tag{5.46}$$

gilt. Damit folgt für alle $t > 0$ aus der Definition (5.45) der Legendre-Transformierten und mit der positiven q-Homogenität von $\tilde{H}$

$$\begin{aligned} t^{q'}\tilde{H}^*(X) &= t^{q'} \sup_{Z \in \mathbb{R}^{2N}}(Z \cdot X - \tilde{H}(Z)) = \sup_{Z \in \mathbb{R}^{2N}}(t^{q'-1}Z \cdot (tX) - t^{q'}\tilde{H}(Z)) \\ &\overset{(5.46)}{=} \sup_{Z \in \mathbb{R}^{2N}}(t^{q'-1}Z \cdot (tX) - \underbrace{t^{(q'-1)q}\tilde{H}(Z)}_{=\tilde{H}(t^{q'-1}Z)}) = \sup_{Y \in \mathbb{R}^{2N}}(Y \cdot (tX) - \tilde{H}(Y)) = \tilde{H}^*(tX). \end{aligned}$$

Abschließend sei bemerkt, dass man wegen $\tilde{H} \in C^1(\mathbb{R}^{2N})$ auch hier zeigen kann, dass die LEGENDRE-Transformierte $\tilde{H}^*$ ebenfalls von der Klasse $C^1(\mathbb{R}^{2N})$. Dazu kann man aber nicht genau so vorgehen wie im Beweis von Lemma 1.25, da man hier wegen der fehlenden C^2-Regularität von $\tilde{H}$ nicht die Elliptizitätsvoraussetzung (F2) an die Hessesche Matrix $\tilde{H}_{ZZ}$ machen kann. Stattdessen kann man die strenge Monotonie des Gradienten $\tilde{H}_Z$ nutzen, um zu zeigen, dass die Zuordnung $X \mapsto Z^*(X)$ von der Klasse $C^1(\mathbb{R}^{2N})$ ist; siehe z.B. [42, Theorem 7, S. 94].

Schritt 7: Duale Formulierung von $(\widetilde{\mathrm{HAM}})$**.**

Betrachte die Funktionenklasse

$$\mathcal{C}(0) := \Big\{ \xi \in L^{q'}((0,1), \mathbb{R}^{2N}) : \int_0^1 \xi(x)\,\mathrm{d}x = 0 \Big\}. \tag{5.47}$$

Falls eine Funktion $U \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^{2N})$ das HAMILTON-System $(\widetilde{\mathrm{HAM}})$ $U' = J\tilde{H}_Z(U)$ auf $(0,1)$ löst (inklusive der Periodizitätsbedingung $U(x+1) = U(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$), dann ist die Funktion $\xi := -JU'$ in der Klasse $\mathcal{C}(0)$; denn $\xi \in C^0([0,1], \mathbb{R}^{2N}) \subset L^{q'}((0,1), \mathbb{R}^{2N})$, und es gilt

$$\int_0^1 \xi(x)\,\mathrm{d}x = -J \int_0^1 U'(x)\,\mathrm{d}x = J(U(1) - U(0)) = 0.$$

Zusätzlich berechnet man mit Hilfe der Identität $-J = J^{-1}$

$$\begin{aligned} & \xi = -JU' = -JJ\tilde{H}_Z(U) = \tilde{H}_Z(U) \\ \Longleftrightarrow \quad & U = \tilde{H}^*_X(\xi). \end{aligned} \tag{5.48}$$

Diese letzte Äquivalenz ist vergleichbar mit der Eigenschaft (H3) aus Lemma 1.25, aber unter den jetzigen Voraussetzungen muss man dies mit etwas allgemeineren Methoden aus der konvexen Analysis beweisen; siehe dazu z.B. [42, Propositionen 6 & 8, S. 91].

Mit dem Ziel einer dualen Formulierung für $(\widetilde{\mathrm{HAM}})$ definieren wir den Integraloperator

$$K : \mathcal{C}(0) \to W^{1,q'}((0,1), \mathbb{R}^{2N})$$

durch

$$(K\xi)(x) := \int_0^x J\xi(\tau)\,\mathrm{d}\tau. \tag{5.49}$$

Aus $(\widetilde{\mathrm{HAM}})$ folgt

$$U' \overset{(\widetilde{\mathrm{HAM}})}{=} J\tilde{H}_Z(U) \overset{(5.48)}{=} J\xi,$$

und wiederum mit (5.48)

$$\tilde{H}^*_X(\xi(x)) \overset{(5.48)}{=} U(x) = \int_0^x U'(\tau)\,\mathrm{d}\tau + U(0) = \int_0^x J\xi(\tau)\,\mathrm{d}\tau + U(0) = (K\xi)(x) + U(0) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Integration über $(0,1)$ liefert schließlich

$$\int_0^1 \left[\tilde{H}^*_X(\xi(\tau)) - ((K\xi)(\tau) + U(0))\right] \cdot \eta(\tau)\,\mathrm{d}\tau = 0 \quad \forall \eta \in \mathcal{C}(0), \tag{5.50}$$

wobei wir bemerken, dass das Integral über den letzten Summanden wegen $\eta \in \mathcal{C}(0)$ verschwindet: $\int_0^1 U(0)\cdot\eta(\tau)\,\mathrm{d}\tau = U(0)\cdot\int_0^1 \eta(\tau)\,\mathrm{d}\tau = 0$.

Umgekehrt folgt aus (5.50) und (5.48) die Gültigkeit des HAMILTON-Systems $(\widetilde{\mathrm{HAM}})$. Denn falls man $\xi \in \mathcal{C}(0)$ gefunden hat, welche (5.50) erfüllt, existiert nach einer in den Übungsaufgaben nachgewiesenen Version des Fundamentallemmas eine Konstante $U_0 \in \mathbb{R}^{2N}$, so dass

$$\tilde{H}_X^*(\xi(x)) - (K\xi)(x) = U_0 \qquad \text{für alle} \;\; x \in [0,1].$$

Dann folgt für

$$U(x) := (K\xi)(x) + U_0 \;\in W^{1,q'}((0,1),\mathbb{R}^{2N}) \subset C^{0,1-\frac{1}{q'}}([0,1],\mathbb{R}^{2N}), \tag{5.51}$$

wobei wir für die letzte Inklusion den Einbettungssatz, Satz 2.15, zitieren, zunächst

$$U'(x) = (K\xi)'(x) = J\xi(x) \quad \text{also } -JU'(x) = \xi(x),$$

und daraus die äquivalenten Identitäten

$$U(x) = \tilde{H}_X^*(\xi(x)) \Longleftrightarrow \xi(x) = \tilde{H}_Z(U(x)) \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

woraus $\xi = -JU' = \tilde{H}_Z(U)$ oder schließlich die HAMILTON-Gleichung $(\widetilde{\mathrm{HAM}})$, $U' = J\tilde{H}_Z(u)$, folgt. Mit $U \in C^{0,1-\frac{1}{q'}}([0,1],\mathbb{R}^{2N})$ ist die Verkettung $J\tilde{H}_Z \circ U$ stetig und damit wegen der Differentialgleichung auch U', also $U \in C^1([0,1],\mathbb{R}^{2N})$. Außerdem gilt wegen $\xi \in \mathcal{C}(0)$ die Identität

$$U(1) - U(0) = \int_0^1 J\xi(\tau)\,\mathrm{d}\tau = J\int_0^1 \xi(\tau)\,\mathrm{d}\tau = 0.$$

Zusammenfassend lautet die duale Formulierung von $(\widetilde{\mathrm{HAM}})$: Finde $\xi \in \mathcal{C}$, so dass (5.50) erfüllt ist, oder einfacher geschrieben

$$\int_0^1 \big[\tilde{H}_X^*(\xi(\tau)) - (K\xi)(\tau)\big]\cdot\eta(\tau)\,\mathrm{d}\tau = 0 \quad \forall \eta \in \mathcal{C}(0). \tag{5.52}$$

Schritt 8: Ein Variationsansatz für (5.52)**.** Wir behaupten, dass die Gleichung (5.52) die EULER-LAGRANGE-Gleichung des *Wirkungsfunktionals*

$$\widetilde{\mathcal{W}}^*_{[0,1]}(\xi) := \int_0^1 \big[\tilde{H}^*(\xi(x)) - \frac{1}{2}\xi(x)\cdot(K\xi)(x)\big]\,\mathrm{d}x \tag{5.53}$$

ist; denn wir berechnen die erste Variation von $\widetilde{\mathcal{W}}^*_{[0,1]}$ an der Stelle $\xi \in \mathcal{C}(0)$ in Richtung $\eta \in \mathcal{C}(0)$:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\varepsilon}|_{\varepsilon=0}\widetilde{\mathcal{W}}^*_{[0,1]}(\xi+\varepsilon\eta) &= \frac{d}{d\varepsilon}|_{\varepsilon=0}\int_0^1 \big[\tilde{H}^*((\xi+\varepsilon\eta)(x)) - \frac{1}{2}(\xi+\varepsilon\eta)(x)\cdot\int_0^x J(\xi+\varepsilon\eta)(\tau)\,\mathrm{d}\tau\big]\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \big[\tilde{H}_X^*((\xi(x))\cdot\eta(x) - \frac{1}{2}\eta(x)\cdot\int_0^x J\xi(\tau)\,\mathrm{d}\tau - \frac{1}{2}\xi(x)\cdot\int_0^x J\eta(\tau)\,\mathrm{d}\tau\big]\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \big[\tilde{H}_X^*((\xi(x)) - \int_0^x J\xi(\tau)\,\mathrm{d}\tau\big]\cdot\eta(x)\,\mathrm{d}x,
\end{aligned}$$

wobei die letzte Identität aus der allgemeinen Vektorgleichung

$$a \cdot Jb = a^T Jb = (Jb)^T a = b^T J^T a = b^T(-J)a = -b^T Ja = -b \cdot Ja$$

und dem Satz von Fubini in der folgenden Weise folgt:

$$\begin{aligned}\int_0^1 \xi(x) \cdot \int_0^x J\eta(\tau)\,\mathrm{d}\tau\,\mathrm{d}x &= \int_0^1 \int_\tau^1 \xi(x) \cdot J\eta(\tau)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\tau = -\int_0^1 \int_\tau^1 \eta(\tau) \cdot J\xi(x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\tau \\ &= -\int_0^1 \eta(\tau) \cdot \int_\tau^1 J\xi(x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\tau = -\int_0^1 \eta(\tau) \cdot \Big\{ \int_0^1 J\xi(x)\,\mathrm{d}x - \int_0^\tau J\xi(x)\,\mathrm{d}x \Big\}\,\mathrm{d}\tau \\ &= \int_0^1 \eta(\tau) \cdot \int_0^\tau J\xi(x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\tau = \int_0^1 \eta(x) \cdot \int_0^x J\xi(\tau)\,\mathrm{d}\tau\,\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

wobei wir für die vorletzte Gleichung benutzt haben, dass $\xi \in \mathcal{C}(0)$ und damit verschwindenden Integralmittelwert hat, und in der letzten Gleichung haben wir nur eine Variablenumbenennung vorgenommen.

Schritt 9: Minimierung des Wirkungsfunktionals $\widetilde{\mathcal{W}}^*_{[0,1]}$. Mit $\tilde{H}^*(X) = |X|^{q'} \tilde{H}^*(X/|X|)$ für alle $X \in \mathbb{R}^{2N}$ und $q' > 2$ (wegen $q \in (1,2)$) folgt mit Hilfe der in Schritt 6 nachgewiesenen strikten Ungleichung $\tilde{H}^*(0) < \tilde{H}^*(X)$ für alle $X \neq 0$ die Koerzivitätsabschätzung

$$\begin{aligned}\widetilde{\mathcal{W}}^*_{[0,1]}(\xi) &\geq \int_0^1 \Big[|\xi(x)|^{q'} \underbrace{\min_{\mathbb{S}^{2N-1}} \tilde{H}^*(\cdot)}_{=:c_0>0} - \frac{1}{2}|\xi(x)|\|\xi\|_{L^1((0,1),\mathbb{R}^{2N})} \Big]\,\mathrm{d}x \\ &\geq c_0 \|\xi\|^{q'}_{L^{q'}((0,1),\mathbb{R}^{2N})} - \frac{1}{2}\|\xi\|^2_{L^1((0,1),\mathbb{R}^{2N})} \\ &\geq c_0 \|\xi\|^{q'}_{L^{q'}((0,1),\mathbb{R}^{2N})} - \frac{1}{2}\|\xi\|^2_{L^{q'}((0,1),\mathbb{R}^{2N})} \\ &= \|\xi\|^2_{L^{q'}((0,1),\mathbb{R}^{2N})} \Big\{ c_0 \|\xi\|^{q'-2}_{L^{q'}((0,1),\mathbb{R}^{2N})} - \frac{1}{2} \Big\} \longrightarrow +\infty \qquad \text{für} \quad \|\xi\|_{L^{q'}} \to \infty.\end{aligned} \tag{5.54}$$

Insbesondere existiert ein Radius $R > 0$, so dass

$$\inf_{\mathcal{C}(0)} \widetilde{\mathcal{W}}^*_{[0,1]}(\cdot) = \inf_{B_R(0)\cap\mathcal{C}(0)} \widetilde{\mathcal{W}}^*_{[0,1]}(\cdot), \tag{5.55}$$

wobei $B_R(0)$ den offenen Ball um die Nullfunktion mit Radius $R > 0$ im Funktionenraum $L^{q'}((0,1),\mathbb{R}^{2N})$ bezeichnet. Aus der Ungleichungskette (5.54) folgt $\widetilde{\mathcal{W}}^*_{[0,1]}(\xi) \geq -\frac{1}{2}\|\xi\|^2_{L^{q'}((0,1),\mathbb{R}^{2N})}$ für alle $\xi \in \mathcal{C}(0)$, und damit aus (5.55) schließlich

$$\inf_{\mathcal{C}(0)} \widetilde{\mathcal{W}}^*_{[0,1]}(\cdot) \geq -\frac{1}{2}R^2 > -\infty. \tag{5.56}$$

Um die Unterhalbstetigkeit des Wirkungsfunktionals $\widetilde{\mathcal{W}}^*_{[0,1]}$ einzusehen, machen wir uns zunächst klar, dass wegen der Linearität der Zuordnung $X \mapsto (Z\cdot X - \tilde{H}(Z))$ die Legendre-Transformierte $\tilde{H}^*(X) = \sup_{Z\in\mathbb{R}^{2N}}(Z \cdot X - \tilde{H}(Z))$ konvex ist. Tatsächlich gilt für alle $\lambda \in [0,1]$ und $X_1, X_2 \in \mathbb{R}^{2N}$ die Ungleichung

$$\begin{aligned}(\lambda X_1 + (1-\lambda)X_2) \cdot Z - \tilde{H}(Z) &= \lambda(X_1 \cdot Z - \tilde{H}(Z)) + (1-\lambda)(X_2 \cdot Z - \tilde{H}(Z)) \\ &\leq \lambda \sup_{\zeta\in\mathbb{R}^{2N}} (X_1 \cdot \zeta - \tilde{H}(\zeta)) + (1-\lambda) \sup_{\bar\zeta\in\mathbb{R}^{2N}} (X_2 \cdot \bar\zeta - \tilde{H}(\bar\zeta)) \\ &= \lambda\tilde{H}^*(X_1) + (1-\lambda)\tilde{H}^*(X_2) \qquad \text{für alle} \quad Z \in \mathbb{R}^{2N},\end{aligned}$$

so dass durch Bilden des Supremums über alle $Z \in \mathbb{R}^{2N}$ auf der linken Seite die gewünschte Konvexitätsungleichung

$$\tilde{H}^*(\lambda X_1 + (1-\lambda)X_2) \le \lambda \tilde{H}^*(X_1) + (1-\lambda)\tilde{H}^*(X_2) \qquad \text{für alle} \;\; X_1, X_2 \in \mathbb{R}^{2N},\, \lambda \in [0,1]$$

folgt.

Mit dem Wissen, dass $\tilde{H}^*$ nicht negativ, von der Klasse $C^1(\mathbb{R}^{2N})$ und konvex ist, lässt sich nun die schwache Folgenunterhalbstetigkeit des Integralfunktionals

$$\xi \mapsto \int_0^1 \tilde{H}^*(\xi(x))\,\mathrm{d}x$$

genauso wie im Beweis des TONELLIschen Unterhalbstetigkeitssatzes, Satz 3.5 – sogar mit weniger technischen Hilfsmitteln als dort – beweisen. Damit ist ein Summand des Wirkungsfunktionals $\widetilde{\mathcal{W}}^*_{[0,1]}$ bereits als schwach unterhalbstetig erkannt. Für den zweiten Summanden

$$\xi \mapsto \int_0^1 \xi(x)\cdot(K\xi)(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \xi(x) \int_0^x J\xi(\tau)\,\mathrm{d}\tau\,\mathrm{d}x \tag{5.57}$$

beweisen wir nun direkt die *schwache Stetigkeit* in $L^{q'}((0,1),\mathbb{R}^{2N})$. Tatsächlich gilt für $\xi_k \rightharpoonup \xi$ in $L^{q'}((0,1),\mathbb{R}^{2N})$ für $k \to \infty$ wegen der Linearität des Integrals die punktweise Konvergenz

$$(K\xi_k)(x) = \int_0^x J\xi_k(\tau)\,\mathrm{d}\tau \to \int_0^x J\xi(\tau)\,\mathrm{d}\tau = (K\xi)(x) \qquad \text{für alle} \;\; x \in [0,1]. \tag{5.58}$$

Zusätzlich können wir mit Hilfe der HÖLDER-Ungleichung die Differenz abschätzen:

$$\begin{aligned} &\Big|\int_0^1 \xi_k(x)\cdot(K\xi_k)(x)\,\mathrm{d}x - \int_0^1 \xi(x)\cdot(K\xi)(x)\,\mathrm{d}x\Big| \\ &\qquad\le \Big|\int_0^1 \xi_k(x)\cdot\big[(K\xi_k)(x)-(K\xi)(x)\big]\,\mathrm{d}x\Big| + \Big|\int_0^1 (\xi_k(x)-\xi(x))\cdot(K\xi)(x)\,\mathrm{d}x\Big| \\ &\qquad\le \|\xi_k\|_{L^{q'}((0,1),\mathbb{R}^{2N})}\|(K\xi_k)-(K\xi)\|_{L^q((0,1),\mathbb{R}^{2N})} + o(1) \quad \text{für } k\to\infty, \end{aligned} \tag{5.59}$$

wobei wir für das zweite Integral in der vorletzten Zeile die Tatsache benutzt haben, dass $(K\xi)$ als $W^{1,q'}$-Funktion durch den Einbettungssatz, Satz 2.15, stetig und damit beschränkt auf $[0,1]$ ist, so dass die Zuordnung

$$\eta \mapsto \int_0^1 \eta(x)\cdot(K\xi)(x)\,\mathrm{d}x$$

ein lineares stetiges Funktional auf $L^{q'}((0,1),\mathbb{R}^{2N})$ ist. Die schwache Konvergenz $\xi_k \rightharpoonup \xi$ liefert dann, dass das zweite Integral in der mittleren Zeile von (5.59) tatsächlich für $k\to\infty$ gegen Null geht. Schließlich sind die $L^{q'}$-Normen der ξ_k in (5.59) wegen der schwachen Konvergenz gleichmäßig beschränkt (siehe Teil (iv) von Lemma A.8 im Anhang), während $\|(K\xi_k)-(K\xi)\|_{L^q} \to 0$ für $k\to\infty$ wegen der punktweisen Konvergenz in (5.58) aufgrund des LEBESGUEschen Konvergenzsatz über dominierte Konvergenz. Dazu erhält man wegen der gleichmäßigten Beschränktheit der $L^{q'}$-Normen der ξ_k eine Konstante $\tilde{C}$ als integrable Dominante für den Integranden durch die Abschätzung

$$|(K\xi_k)(x)-(K\xi)(x)| \le \int_0^1 (|\xi_k(\tau)|+|\xi(\tau)|)\,\mathrm{d}\tau \le \|\xi_k\|_{L^{q'}((0,1),\mathbb{R}^{2N})} + C \le \tilde{C} < \infty$$

für alle $x \in [0,1]$. Damit ist die schwache Stetigkeit von (5.57) und deshalb insgesamt die schwache Folgenunterhalbstetigkeit des Wirkungsfunktionals $\widetilde{\mathcal{W}}^*_{[0,1]}$ auf $L^{q'}((0,1),\mathbb{R}^{2N})$ bewiesen.

Nun ist $\mathcal{C}(0) \neq \emptyset$, weil man für jede $L^{q'}$-Funktion v eine Funktion

$$\xi := v - \fint_{[0,1]} v(\tau)\,\mathrm{d}\tau \ \in \mathcal{C}(0)$$

finden kann. Daraus folgt in Kombination mit (5.56)

$$\inf_{\mathcal{C}(0)} \widetilde{\mathcal{W}}^*_{[0,1]} \in (-\infty, \infty),$$

und für eine Minimalfolge $\{\xi_k\}_k \subset \mathcal{C}(0)$ schließen wir mit (5.54) und der YOUNGschen Ungleichung

$$\begin{aligned}\inf_{\mathcal{C}(0)} \widetilde{\mathcal{W}}^*_{[0,1]} \longleftarrow \widetilde{\mathcal{W}}^*_{[0,1]}(\xi_k) &\overset{(5.54)}{\geq} c_0 \|\xi_k\|^{q'}_{L^{q'}((0,1),\mathbb{R}^{2N})} - \frac{1}{2}\|\xi_k\|^2_{L^{q'}((0,1),\mathbb{R}^{2N})} \\ &\geq (c_0 - \varepsilon)\|\xi_k\|^{q'}_{L^{q'}((0,1),\mathbb{R}^{2N})} - C(\varepsilon) \qquad \text{für alle } \ \varepsilon > 0.\end{aligned}$$

Für die Wahl von $\varepsilon := c_0/2$ ergibt sich eine von k unabhängige Konstante C, so dass $\|\xi_k\|_{L^{q'}((0,1),\mathbb{R}^{2N})} \leq C$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Da $q' \in (2,\infty)$ ist $L^{q'}((0,1),\mathbb{R}^{2N})$ nach Satz A.19 reflexiv, und damit existiert nach Satz A.10 eine Funktion $\xi_{\min} \in L^{q'}((0,1),\mathbb{R}^{2N})$ und eine Teilfolge $\xi_{k_l} \rightharpoonup \xi_{\min}$ in $L^{q'}((0,1),\mathbb{R}^{2N})$ für $l \to \infty$, so dass mit $\{\xi_{k_l}\}_l \subset \mathcal{C}(0)$ und der schwachen Konvergenz

$$0 = \int_0^1 \xi_{k_l}(x)\,\mathrm{d}x \longrightarrow \int_0^1 \xi_{\min}(x)\,\mathrm{d}x \qquad \text{für } \ l \to \infty$$

auch $\xi_{\min} \in \mathcal{C}(0)$. Deshalb haben wir schließlich wegen der schwachen Folgenunterhalbstetigkeit von $\widetilde{\mathcal{W}}^*_{[0,1]}$

$$\inf_{\mathcal{C}(0)} \widetilde{\mathcal{W}}^*_{[0,1]}(\cdot) \leq \widetilde{\mathcal{W}}^*_{[0,1]}(\xi_{\min}) \leq \liminf_{l\to\infty} \widetilde{\mathcal{W}}^*_{[0,1]}(\xi_{k_l}) = \inf_{\mathcal{C}(0)} \widetilde{\mathcal{W}}^*_{[0,1]}(\cdot),$$

also $\widetilde{\mathcal{W}}^*_{[0,1]}(\xi_{\min}) = \inf_{\mathcal{C}(0)} \widetilde{\mathcal{W}}^*_{[0,1]}(\cdot)$.

Schritt 10: Ausschluss trivialer Lösungen und Wahl der richtigen Konstanten.

10A: $\inf_{\mathcal{C}(0)} \widetilde{\mathcal{W}}^*_{[0,1]}(\cdot) < 0$**.** Dazu machen wir für eine noch genügend klein zu wählende Konstante $\sigma > 0$ den Ansatz

$$\xi^*(x) := \frac{\sigma}{\sqrt{N}} \begin{pmatrix} \sin 2\pi x \\ \vdots \\ \sin 2\pi x \\ \cos 2\pi x \\ \vdots \\ \cos 2\pi x \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2N} \ \text{ für alle } \ x \in \mathbb{R}, \tag{5.60}$$

(mit genau N Zeilen $\sin 2\pi x$ und genau N Zeilen $\cos 2\pi x$), so dass direkt

$$|\xi^*(x)| = \frac{\sigma}{\sqrt{N}} \sqrt{N(\sin^2 2\pi x + \cos^2 2\pi x)} = \sigma \tag{5.61}$$

folgt. Dann ist wegen

$$J\xi^*(x) = \frac{\sigma}{\sqrt{N}} \begin{pmatrix} \cos 2\pi x \\ \vdots \\ \cos 2\pi x \\ -\sin 2\pi x \\ \vdots \\ -\sin 2\pi x \end{pmatrix}$$

das bestimmte Integral $(K\xi^*)(x)$ leicht explizit zu berechnen:

$$(K\xi^*)(x) = \frac{\sigma}{2\pi\sqrt{N}} \left[\begin{pmatrix} \sin 2\pi x \\ \vdots \\ \sin 2\pi x \\ \cos 2\pi x \\ \vdots \\ \cos 2\pi x \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \right] \quad \forall x \in \mathbb{R}, \tag{5.62}$$

und daraus durch Bilden des Skalarproduktes von (5.60) und (5.62) für den zweiten Summanden im Wirkungsfunktional $\widetilde{\mathcal{W}}^*_{[0,1]}$

$$\xi^*(x) \cdot (K\xi)(x) = \frac{\sigma^2}{2\pi}(1 - \cos 2\pi x) \qquad \text{für alle} \quad x \in \mathbb{R}. \tag{5.63}$$

Nebenbei bemerken wir, dass wegen der 1-Periodizität von $x \mapsto \sin 2\pi x$ und $x \mapsto \cos 2\pi x$ $\int_0^1 \xi^*(x)\,\mathrm{d}x = 0$, so dass $\xi^* \in \mathcal{C}(0)$ und damit eine zulässige Vergleichsfunktion ist. Nun zeigen wir, dass $\widetilde{\mathcal{W}}^*_{[0,1]}(\xi^*)$ für genügend kleines $\sigma > 0$ tatsächlich strikt negativ ist, so dass auch

$$\widetilde{\mathcal{W}}^*_{[0,1]}(\xi_{\min}) = \inf_{\mathcal{C}(0)} \widetilde{\mathcal{W}}^*_{[0,1]}(\cdot) < 0,$$

was bedeutet, dass der Minimerer $\xi_{\min}$ nicht trivial sein kann, d.h. $\xi_{\min} \not\equiv 0$.

Eine explizite Rechnung ergibt mit Hilfe der positiven q'-Homogenität von $\tilde{H}^*$ und wegen (5.61) und (5.63) in der Tat

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathcal{W}}^*_{[0,1]}(\xi^*) &= \int_0^1 \left[\tilde{H}^*(\xi^*(x)) - \frac{1}{2}\xi^*(x) \cdot (K\xi^*)(x)\right] \mathrm{d}x \\ &\overset{\substack{(5.61)\\(5.63)}}{=} \int_0^1 \left[\sigma^{q'} \tilde{H}^*\Big(\frac{\xi^*(x)}{|\xi^*(x)|}\Big) - \frac{\sigma^2}{4\pi}(1 - \cos 2\pi x)\right] \mathrm{d}x \\ &\le \sigma^2 \Big\{ -\frac{1}{4\pi} + \sigma^{q'-2} \max_{\mathbb{S}^{2N-1}} \tilde{H}^*(\cdot) \Big\} < 0 \qquad \text{für} \quad 0 < \sigma \ll 1, \end{aligned}$$

wobei wir bei der Ungleichung benutzt haben, dass $\int_0^1 \cos 2\pi x\,\mathrm{d}x = 0$ und dass $q' > 2$.

10B: Finde Lösung von $(\widetilde{\mathrm{HAM}})$ auf der 1-Niveaufläche. Da $\xi_{\min} \not\equiv 0$ folgt für die nach Schritt 7 zugehörige Lösung (vgl. (5.51))

$$U_{\min} := (K\xi_{\min})(x) + U_0$$

des HAMILTON-Systems $(\widetilde{\mathrm{HAM}})$, dass $U_{\min}$ nicht konstant sein kann; denn sonst ergäbe sich wegen (5.48) der folgende Widerspruch

$$0 \not\equiv \xi_{\min}(x) \overset{(5.48)}{=} -JU'_{\min}(x) = 0 \quad \text{für } \; x \in \mathbb{R}.$$

Da $U_{\min}$ das HAMILTON-System $(\widetilde{\mathrm{HAM}})$ erfüllt, ergibt sich wie im Kapitel 1.4, Beispiel (1.20), dass es eine Konstante $\beta \in \mathbb{R}$ gibt, so dass $\tilde{H}(U_{\min}(x)) = \beta$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Das Niveau β ist dabei strikt positiv; denn $Z = 0$ ist nach Schritt 5 die einzige Nullstelle von $\tilde{H}$, aber $U_{\min}$ ist nicht trivial. Mit der positiven q-Homogenität von $\tilde{H}$, also mit

$$\tilde{H}(tU_{\min}(x)) = t^q \tilde{H}(U_{\min}(x)) = t^q \beta \quad \text{für alle } \; t > 0 \tag{5.64}$$

kann man $t := \beta^{-1/q} > 0$ wählen, um für $U^*(x) := \beta^{-1/q} U_{\min}(x)$ mit Hilfe von (5.64) direkt auf

$$\tilde{H}(U^*(x)) = 1 \quad \text{für alle } \; x \in \mathbb{R}$$

zu kommen. Diese Transformation ändert zunächst nichts an der 1-Periodizität; denn

$$U^*(x+1) = \beta^{-1/q} U_{\min}(x+1) = \beta^{-1/q} U_{\min}(x) = U^*(x) \quad \text{für alle } \; x \in \mathbb{R}. \tag{5.65}$$

Die Differentialgleichung erhält auf der rechten Seite wegen der positiven $(q-1)$-Homogenität des Gradienten $\tilde{H}_Z$ (vgl. (5.38)) allerdings einen anderen Faktor:

$$\begin{aligned} (U^*)'(x) = \beta^{-1/q} U'_{\min}(x) &\overset{(\widetilde{\mathrm{HAM}})}{=} \beta^{-1/q} J\tilde{H}_Z(U_{\min}(x)) = \beta^{-1/q} J\tilde{H}_Z(\beta^{1/q} U^*(x)) \\ &\overset{(5.38)}{=} \beta^{(q-1)/q} \beta^{-1/q} J\tilde{H}_Z(U^*(x)) = \beta^{1-\frac{2}{q}} J\tilde{H}_Z(U^*(x)) \quad \text{für alle } \; x \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{5.66}$$

Zur Kompensation dieses Faktors in der Differentialgleichung erlauben wir eine andere Periode durch die finale Transformation

$$\hat{U}(\tau) := U^*(\beta^{\frac{2}{q}-1}\tau).$$

Dann liegt $\hat{U}$ zunächst auf der vorgeschriebenen Niveaufläche

$$\tilde{H}(\hat{U}(\tau)) = \tilde{H}(U^*(\beta^{\frac{2}{q}-1}\tau)) = 1 \quad \text{für alle } \; \tau \in \mathbb{R}.$$

Weiterhin erfüllt $\hat{U}$ wegen (5.66) die gewünschte Differentialgleichung $(\widetilde{\mathrm{HAM}})$:

$$\hat{U}'(\tau) = \beta^{\frac{2}{q}-1}(U^*)'(\beta^{\frac{2}{q}-1}\tau) \overset{(5.66)}{=} J\tilde{H}_Z(U^*(\beta^{\frac{2}{q}-1}\tau)) = J\tilde{H}_Z(\hat{U}(\tau)).$$

Die Periode hingegen hat sich verändert; denn wegen der 1-Periodizität von U^* in (5.65) gilt

$$\hat{U}(\tau+\beta^{1-\frac{2}{q}}) = U^*(\beta^{\frac{2}{q}-1}(\tau+\beta^{1-\frac{2}{q}})) = U^*(\beta^{\frac{2}{q}-1}\tau+1) = U^*(\beta^{\frac{2}{q}-1}\tau) = \hat{U}(\tau) \quad \text{für alle } \; \tau \in \mathbb{R}.$$

$\square$

Anhang A

Resultate aus der Funktionalanalysis

Im Folgenden werden wir einige Definitionen und Resultate aus der Funktionalanalysis und verwandten Gebieten angeben, die im vorliegenden Skript benutzt werden. Für Details der nachstehenden Sätze verweisen wir, soweit nicht anders vermerkt, auf [3], wobei wir uns hier bei linearen Räumen auf $\mathbb{R}$-Vektorräume beschränken.

Definition A.1 [BANACHRÄUME, DICHTE UND SEPARABLE TEILMENGEN] (i) *Ein linearer normierter Raum X heißt* BANACH*raum, wenn er vollständig ist, d.h. wenn alle Cauchy-Folgen in X konvergieren.*

(ii) *Sei X ein* BANACH*raum. Eine Teilmenge $A \subset X$ heißt* dicht *in X, wenn der bezüglich der Norm $\|\cdot\|_X$ gebildete Abschluss von A mit X übereinstimmt, d.h. $\overline{A} = X$. X heißt* separabel*, wenn eine abzählbare, dichte Teilmenge $A \subset X$ existiert.*

(iii) *Ein* BANACH*raum X heißt* uniform konvex*, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta(\varepsilon) > 0$ gibt, so dass gilt: Für $u, v \in X$ mit $\|u\|_X = \|v\|_X = 1$ und mit $\|u - v\|_X \geq \varepsilon$ gilt $\|u + v\|_X \leq 2(1 - \delta)$; siehe [63, Kapitel 5, §26.6]. (Gleichbedeutend ist: Aus $\|u_k\|_X = \|v_k\|_X = 1$ und $\|u_k + v_k\|_X \to 2$ folgt $\|u_k - v_k\|_X \to 0$ für $k \to \infty$.)*

(iv) *Ein linearer Raum X mit einem Skalarprodukt (inneren Produkt) $\langle\cdot,\cdot\rangle : X \times X \to \mathbb{R}$, welcher bezüglich der von dem Skalarprodukt induzierten Norm $\|\cdot\|_X := \sqrt{\langle\cdot,\cdot\rangle}$ vollständig ist, heißt* HILBERT*raum.*

Definition A.2 [LINEARE ABBILDUNGEN] (i) *Seien X und Y lineare normierte Räume. Dann heißt $L : X \to Y$ eine* lineare Abbildung*, falls $L(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha L(x_1) + \beta L(x_2)$ für alle $x_1, x_2 \in X$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.*

(ii) *Eine lineare Abbildung heißt* stetig *(oder* beschränkt *oder ein* beschränkter linearer Operator*), wenn es eine Konstante $C \in \mathbb{R}$ gibt, so dass $\|Lx\|_Y \leq C\|x\|_X$ für alle $x \in X$. Mit $L(X,Y)$ bezeichnen wir den Raum der stetigen linearen Abbildungen von X nach Y, der mit der* Operatornorm

$$\|L\|_{L(X,Y)} := \sup_{\|x\|_X \leq 1} \|Lx\|_Y$$

ein normierter linearer Raum ist.

(iii) *Der Raum $X^* := L(X, \mathbb{R})$ heißt der* Dualraum *von X, die Elemente von X^* nennt man auch* lineare Funktionale .

(iv) *Eine injektive lineare stetige Abbildung* $L \in L(X,Y)$ *heißt* Einbettung.

(v) *Eine bijektive lineare stetige Abbildung* $L \in L(X,Y)$ *heißt* invertierbar *oder ein* stetiger Isomorphismus .

(vi) *Eine Abbildung* $L \in L(X,Y)$ *heißt* Isometrie *oder* isometrisch *, wenn* $\|Lx\|_Y = \|x\|_X$ *für alle* $x \in X$.

(vii) *Falls* X *und* Y BANACH*räume sind, und wenn für eine Abbildung* $K \in L(X,Y)$ *jede Folge* $\{K(x_k)\} \subset Y$ *eine in* Y *konvergente Teilfolge besitzt, solange die Urbildfolge* $\{x_k\} \subset X$ *beschränkt ist, dann heißt* K kompakt. *Ist diese Abbildung* K *zusätzlich eine Einbettung, dann spricht man kurz von einer* kompakten Einbettung.

Bemerkung:
Falls der Zielraum Y ein BANACHraum ist, dann ist auch $L(X,Y)$ ein BANACHraum. Falls X und Y BANACHräume sind und falls $L \in L(X,Y)$ eine invertierbare lineare stetige Abbildung ist, dann kann man zeigen, dass $L^{-1} \in L(Y,X)$, wobei $L^{-1} : Y \to X$ die Inverse von L bezeichnet.

Satz A.3 [FOLGERUNG AUS HAHN-BANACH]
Sei X *ein normierter linearer Raum und* $x_0 \in X \setminus \{0\}$. *Dann existiert ein lineares Funktional* $l_0 \in X^*$, *so dass* $\|l_0\|_{X^*} = 1$ *und* $l_0(x_0) = \|x_0\|_X$.

Bemerkung:
Mit der Abbildung $J_X : X \to (X^*)^* =: X^{**}$, definiert durch

$$(J_X x)(l) := l(x) \qquad \text{für } \; x \in X \text{ und alle } l \in X^*,$$

ist jeder BANACHraum X in natürlicher Weise isometrisch in X^{**} eingebettet.

Definition A.4 [REFLEXIVE BANACHRÄUME]
Ein BANACH*raum* X *heißt* reflexiv*, wenn die oben genannte isometrische Einbettung* $J_X : X \to X^{**}$ *surjektiv, also ein isometrischer Isomorphismus ist.*

Satz A.5 [DARSTELLUNGSSATZ VON RIESZ FÜR HILBERTRÄUME]
Jeder HILBERT*raum* X *ist isometrisch isomorph zu seinem Dualraum* X^* *mittels der Abbildung* $J : X \to X^*$ *definiert durch*

$$x \mapsto J(x) := \langle x, \cdot \rangle \in X^*.$$

Korollar A.6 [HILBERTRÄUME SIND REFLEXIV]
Jeder HILBERT*raum ist reflexiv.*

Definition A.7 [SCHWACHE KONVERGENZ]
Sei X *ein* BANACH*raum.*

(i) *Eine Folge* $\{x_k\}$ *in* X konvergiert schwach *für* $k \to \infty$ *gegen ein* $x \in X$, *wenn* $l(x_k) \to l(x)$ *für* $k \to \infty$ *für alle* $l \in X^*$. *Wir schreiben dafür* $x_k \rightharpoonup x$ *für* $k \to \infty$.

(ii) *Eine Folge* $\{l_k\}$ *im Dualraum* X^* konvergiert schwach* *für* $k \to \infty$ *gegen ein* $l \in X^*$, *wenn* $l_k(x) \to l(x)$ *für* $k \to \infty$ *für alle* $x \in X$. *Wir schreiben dafür* $l_k \overset{*}{\rightharpoonup} l$ *für* $k \to \infty$.

Lemma A.8 [EIGENSCHAFTEN SCHWACHER KONVERGENZ]
Sei X *ein* BANACH*raum, dann gilt:*

(i) *Der schwache und auch der schwach* Grenzwert einer Folge in X bzw. einer Folge in X^* ist eindeutig bestimmt.*

(ii) *Falls $\|x_k - x\|_X \to 0$ für $k \to \infty$ (also falls x_k* stark gegen x konvergiert*), dann gilt auch $x_k \rightharpoonup x$ für $k \to \infty$. Falls $\|l_k - l\|_{X^*} \to 0$ für $k \to \infty$, dann gilt auch $l_k \overset{*}{\rightharpoonup} l$ für $k \to \infty$.*

(iii) *Falls $l_k \overset{*}{\rightharpoonup} l$ in X^* für $k \to \infty$, dann gilt*

$$\|l\|_{X^*} \leq \liminf_{k\to\infty} \|l_k\|_{X^*}.$$

(iv) *Falls $x_k \rightharpoonup x$ in X für $k \to \infty$, dann gilt*

$$\|x\|_X \leq \liminf_{k\to\infty} \|x_k\|_X.$$

(iv) *Schwach konvergente Folgen in X und auch schwach* konvergente Folgen in X^* sind beschränkt.*

(v) *Falls x_k stark gegen x in X, d.h. $\|x_k - x\|_X \to 0$, und $l_k \overset{*}{\rightharpoonup} l$ in X^* für $k \to \infty$, dann folgt*

$$l_k(x_k) \to l(x) \quad \text{für } k \to \infty.$$

Falls $x_k \rightharpoonup x$ in X und $\|l_k - l\|_{X^*} \to 0$ für $k \to \infty$, dann gilt ebenfalls

$$l_k(x_k) \to l(x) \quad \text{für } k \to \infty.$$

Satz A.9 [Schwach* Folgenkompaktheit]
Für einen separablen Banach*raum X ist jede abgeschlossene Kugel im zugehörigen Dualraum X^* schwach* folgenkompakt, d.h. zu jeder in X^* beschränkten Folge $\{l_k\} \subset X^*$ gibt es eine Teilfolge $\{l_{k_i}\}$ und ein $l \in X^*$, so dass $l_{k_i} \overset{*}{\rightharpoonup} l$ für $i \to \infty$.*

Satz A.10 [Schwache Folgenkompaktheit in reflexiven Banachräumen]
Sei X ein reflexiver Banach*raum. Dann ist jede abgeschlossene Kugel in X schwach folgenkompakt, d.h. zu jeder in X beschränkten Folge $\{x_k\} \subset X$ gibt es eine Teilfolge $\{x_{k_i}\}$ und ein $x \in X$, so dass $x_{k_i} \rightharpoonup x$ für $i \to \infty$.*

Satz A.11 [Starke Konvergenz aus Normkonvergenz und schwacher Konvergenz [30, Kapitel II.4.28]]
Sei X ein uniform konvexer Banach*raum. Dann folgt aus $\|x_k\|_X \to \|x\|_X$ und $x_k \rightharpoonup x$ auch die starke Konvergenz $\|x_k - x\|_X \to 0$ für $k \to \infty$.*

Satz A.12 [Mazur]
Sei $C \subset X$ eine konvexe und abgeschlossene Menge eines linearen normierten Raumes X, dann ist C schwach folgenabgeschlossen, *d.h. falls $x_k \in C$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und $x_k \rightharpoonup x$ für $k \to \infty$, dann ist $x \in C$.*

Definition A.13 [Hölderräume]
Seien $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ und $\alpha \in (0,1]$. Für eine nichtleere offene Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ sei $C^k(\Omega, \mathbb{R}) = C^k(\Omega)$ der Raum der auf Ω k-mal stetig differenzierbaren Funktionen und

$$C^k(\bar{\Omega}, \mathbb{R}) = C^k(\bar{\Omega}) := \{u \in C^k(\Omega) : \partial^\gamma u \text{ besitzt eine stetige Fortsetzung auf } \bar{\Omega} \text{ für alle } |\gamma| \leq k\},$$

wobei γ ein Multiindex ist. Die Räume $C^\infty(\Omega)$ und $C^\infty(\bar\Omega)$ bestehen aus allen Funktionen, die in $C^k(\Omega)$ bzw. in $C^k(\bar\Omega)$ für alle $k \in \mathbb{N}$ sind. Weiterhin definieren wir die HÖLDERräume

$$C^{k,\alpha}(\bar\Omega) := \{u \in C^k(\bar\Omega) : \text{Höl}_{\Omega,\alpha}(\partial^\gamma u) < \infty \text{ für alle } |\gamma| = k\},$$

wobei die HÖLDERkonstante *einer Funktion $v : \Omega \to \mathbb{R}$ durch*

$$\text{Höl}_{\Omega,\alpha} v := \sup_{\substack{x,y\in\Omega\\ x\neq y}} \frac{|v(x)-v(y)|}{|x-y|^\alpha}$$

gegeben ist. Funktionen mit endlicher HÖLDER*konstante nennt man auch* HÖLDERstetig. *Falls $\alpha = 1$ nennt man diese Konstante auch* LIPSCHITZ*konstante und bezeichnet sie auch mit* $\text{Lip}_\Omega v$. *Funktionen mit endlicher* LIPSCHITZ*konstante heißen* LIPSCHITZstetig.

Mit $C_0^k(A)$ bzw. $C_0^{k,\alpha}(A)$ oder $C_0^\infty(A)$ bezeichnen wir Funktionen u der entsprechenden Funktionenklasse, deren Träger

$$\operatorname{supp} u := \overline{\{x \in A : u(x) \neq 0\}}$$

kompakt in A enthalten ist, wobei $\Omega \subset A \subset \bar\Omega$ zugelassen ist, etwa wenn $A = \Omega \cup \Gamma$ für eine Teilmenge $\Gamma \subset \partial\Omega$. (Der Raum $C^k(A)$ ist die Menge aller auf Ω k-mal stetig differenzierbaren Funktionen, deren sämtliche Ableitungen stetige Fortsetzungen auf $A \supset \Omega$ besitzen.)

Bemerkung: (i) Man kann zeigen, dass der Raum $C^k(\bar\Omega)$ versehen mit der Norm

$$\|u\|_{C^k(\bar\Omega)} := \sum_{|\gamma|\le k} \|\partial^\gamma u\|_{C^0(\bar\Omega)}$$

ein BANACHraum ist. Hierbei bezeichnet $\|v\|_{C^0(\bar\Omega)} := \sup_{x\in\bar\Omega} |v(x)|$ die *Supremumsnorm* einer Funktion $v : \bar\Omega \to \mathbb{R}$. Desweiteren ist auch der Raum $C^{k,\alpha}(\bar\Omega)$ versehen mit der Norm

$$\|u\|_{C^{k,\alpha}(\bar\Omega)} := \|u\|_{C^k(\bar\Omega)} + \sum_{|\gamma|=k} \text{Höl}_{\Omega,\alpha}(\partial^\gamma u)$$

ein BANACHraum.

(ii) Für $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^n$ (d.h. $\bar\Omega$ ist eine kompakte Teilmenge des $\mathbb{R}^n$) und $0 < \beta < \alpha$ kann man mit dem Satz von ARZELÀ-ASCOLI beweisen, dass die Inklusionen

$$C^{0,\alpha}(\bar\Omega) \subset C^{0,\beta}(\bar\Omega) \subset C^0(\bar\Omega)$$

durch kompakte Einbettungen realisiert werden, was zum Beispiel bedeutet, dass jede beschränkte Folge in $(C^{0,\alpha}(\bar\Omega), \|\cdot\|_{C^{k,\alpha}(\bar\Omega)})$ eine in $(C^{0,\beta}(\bar\Omega), \|\cdot\|_{C^{k,\beta}(\bar\Omega)})$ konvergente Teilfolge besitzt. Falls zusätzlich der Rand des Gebietes Ω von der Klasse $C^{0,1}$ ist, was bedeutet, dass sich der Rand $\partial\Omega$ lokal durch den Graphen einer LIPSCHITZstetigen Funktion darstellen lässt, dann ist für $k, l \in \mathbb{N}\cup\{0\}$, $k \ge l$, $\alpha, \beta \in (0,1]$ mit $k+\alpha > l+\beta$ die Inklusion $C^{k,\alpha}(\bar\Omega) \subset C^{l,\beta}(\bar\Omega)$ eine kompakte Einbettung.

Definition A.14 [LEBESGUERÄUME]
Sei $\emptyset \neq \Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $q \in [1,\infty]$. Dann ist der LEBESGUE*raum $L^q(\Omega)$ definiert durch*

$$L^q(\Omega) := \{u : \Omega \to \mathbb{R} \quad \text{messbar} : \|u\|_{L^q(\Omega)} < \infty\},$$

wobei

$$\|u\|_{L^q(\Omega)} := \begin{cases} \left(\int_\Omega |u(x)|^q \, d\mathscr{L}^n(x)\right)^{1/q} & \textit{für } 1 \le q < \infty, \\ \operatorname{ess\,sup}_\Omega |u| & \textit{für } q = \infty. \end{cases}$$

Dabei ist

$$\operatorname*{ess\,sup}_\Omega |u| := \inf_{\mathscr{L}^n(N)=0} \sup_{x\in\Omega\setminus N} |u(x)|.$$

Es gilt $u = v$ in $L^q(\Omega)$ genau dann, wenn $u = v$ $\mathscr{L}^n$-fast überall in Ω, d.h. $u(x) = v(x)$ für alle $x \in \Omega \setminus N$ mit $\mathscr{L}^n(N) = 0$. In diesem Sinne ist eine Funktion $u \in L^q(\Omega)$ eine Äquivalenzklasse aller Funktionen, die $\mathscr{L}^n$-fast überall in Ω mit u übereinstimmen. Weiterhin setzt man

$$L^q_{\mathrm{loc}}(\Omega) := \{u : \Omega \to \mathbb{R} : u \in L^q(\Omega') \textit{ für alle } \Omega' \subset\subset \Omega\},$$

und $u_m \to u$ in $L^q_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ bedeutet, dass $u_m \to u$ in $L^q(\Omega')$ für $m \to \infty$ für alle $\Omega' \subset\subset \Omega$.

Ein Punkt $x_0 \in \Omega$ heißt Lebesgue*-Punkt der Funktion $u \in L^q_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, falls*

$$\lim_{\delta\to 0} \frac{1}{\mathscr{L}^n(B_\delta(x_0))} \int_{B_\delta(x_0)} |u(x) - u(x_0)| \, d\mathscr{L}^n(x) = 0.$$

Bemerkung: (i) Für $u \in L^q_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ sind $\mathscr{L}^n$-fast alle Punkte aus Ω Lebesgue-Punkte; siehe z.B. [92, S. 138ff].

(ii) Sehr nützlich ist die (verallgemeinerte) Hölderungleichung: Für $q_i \in [1, \infty]$, $i = 1, \ldots, m$, mit

$$\frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} + \cdots \frac{1}{q_m} = 1$$

und Funktionen $u_i \in L^{q_i}(\Omega)$ gilt die Ungleichung

$$\left| \int_\Omega u_1(x) u_2(x) \cdots u_m(x) \, d\mathscr{L}^n(x) \right| \le \|u_1\|_{L^{q_1}(\Omega)} \cdot \|u_2\|_{L^{q_2}(\Omega)} \cdot \cdots \cdot \|u_m\|_{L^{q_m}(\Omega)}.$$

(iii) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine nichtleere offene Menge. Dann sind die Räume $L^q(\Omega)$ für $q \in [1, \infty)$ separabel, da der Raum $C^0_0(\Omega)$ dicht in $L^q(\Omega)$ liegt, und stetige Funktionen mit Polynomen nach dem Weierstraßschen Approximationssatz approximierbar sind. Diese Polynome wiederum kann man durch solche mit rationalen Koeffizienten annähern, da $\bar{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$, also die rationalen Zahlen in $\mathbb{R}$ dicht liegen. Falls Ω zusätzlich beschränkt ist, sind auch die Räume $C^k(\bar{\Omega})$ separabel.

Der Raum $L^\infty(\Omega)$ hingegen ist nicht separabel.

Satz A.15 [Fischer-Riesz]
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine nichtleere offene Menge. Dann sind für alle $q \in [1, \infty]$ die Räume $L^q(\Omega)$ vollständig.

Bemerkung:
Der eigentliche Satz von Fischer-Riesz bezieht sich auf den Fall endlicher Exponenten q, für $q = \infty$ reicht ein direktes und elementares Argument.

Satz A.16 [Dualraum von L^q für $q < \infty$]
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine nichtleere und offene Menge und $1 \le q < \infty$. Dann ist der Dualraum $(L^q(\Omega))^*$ isometrisch isomorph zu dem Raum $L^{q'}(\Omega)$ für den zu q konjugierten Exponenten

$q' \in (1, \infty]$ mit $\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1$. Dieser isometrische Isomorphismus $J : L^{q'}(\Omega) \to (L^q(\Omega))^*$ ist gegeben durch

$$v \mapsto J(v)(\cdot) := \int_\Omega \cdot\, v(x)\, d\mathscr{L}^n(x) \in (L^p(\Omega))^* \quad \text{für } v \in L^{q'}(\Omega),$$

also $J(v)(u) = \int_\Omega u(x)v(x)\, d\mathscr{L}^n(x)$ für $u \in L^q(\Omega)$.

Satz A.17 [Riesz-Radon: Dualraum von $C^0(\bar{\Omega})$ [30, Band I, Kapitel IV.6.3]]
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine nichtleere und offene Menge. Dann ist der Dualraum $(C^0(\bar{\Omega}))^*$ isometrisch isomorph zu dem Raum $\mathscr{B}(\Omega)$ aller regulären Borel*maße auf Ω. Dieser isometrische Isomorphismus $I : \mathscr{B}(\Omega) \to C^0(\bar{\Omega})$ ist gegeben durch*

$$\mu \mapsto I(\mu)(\cdot) := \int_\Omega \cdot\, d\mu \in (C^0(\bar{\Omega}))^* \quad \text{für } \mu \in \mathscr{B}(\Omega),$$

also $I(\mu)(u) = \int_\Omega u(x)\, d\mu(x)$ für $u \in C^0(\bar{\Omega})$. Außerdem gilt für reguläre Borel*maße $\mu, \nu \in \mathscr{B}(\Omega)$ mit $\mu(E) \geq \nu(E)$ für alle* Borel*mengen $E \subset \Omega$ dann auch, dass $I(\mu)(u) \geq I(\nu)(u)$ für alle $u \in C^0(\bar{\Omega})$ mit $u \geq 0$.*

Korollar A.18 [Positive Funktionale auf $C^0_0(\Omega)$ [3, Übung 4.8]]
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine nichtleere und offene Menge, und es gebe eine lineare Abbildung $T : C^0_0(\Omega) \to \mathbb{R}$, so dass $T(u) \geq 0$ für alle $u \in C^0_0(\Omega, \mathbb{R}_+)$, wobei $\mathbb{R}_+ := \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$. Dann existiert ein nichtnegatives lokal beschränktes reguläres Borel*maß $\mu \in \mathscr{B}(\Omega)$, so dass*

$$T(u) = \int_\Omega u(x)\, d\mu(x) \quad \text{für alle } u \in C^0_0(\Omega).$$

Satz A.19 [Reflexivität]
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine nichtleere offene Menge. Dann sind für $q \in (1, \infty)$ die Lebesgue*-Räume $L^q(\Omega)$ und die* Sobolev*räume $W^{k,q}(\Omega)$, $k \in \mathbb{N}$ reflexiv. Dagegen sind $L^1(\Omega)$, $L^\infty(\Omega)$ nicht reflexiv. Auch der Raum $C^0(\bar{\Omega})$ der auf $\bar{\Omega}$ stetigen Funktionen ist nicht reflexiv.*

Definition A.20 [Faltung und Dirac-Folge]
Für $u \in L^q(\mathbb{R}^n)$ und $\varphi \in L^1(\mathbb{R}^n)$ definiert man die Faltung *$\varphi * u \in L^q(\mathbb{R}^n)$ von φ mit u durch*

$$\varphi * u(x) := \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x-y)u(y)\, d\mathscr{L}^n(y).$$

Eine Folge $\{\varphi_k\} \subset L^1(\mathbb{R}^n)$ heißt Dirac-Folge*, falls*

$$\varphi_k \geq 0, \quad \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_k(x)\, d\mathscr{L}^n(x) = 1, \quad \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_r(0)} \varphi_k(x)\, d\mathscr{L}^n(x) \to 0 \;\text{ für }\; k \to \infty \quad \forall r > 0.$$

Bemerkung: (i) Für $\varphi \in L^1(\mathbb{R}^n)$ mit $\varphi \geq 0$, $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\, dx = 1$ bilden die Funktionen

$$\varphi_\varepsilon(x) := \frac{1}{\varepsilon^n}\varphi\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big), \quad \varepsilon > 0,$$

eine Dirac-Folge.

(ii) Für $\varphi \in C^\infty_0(B_1(0))$ ist $\varphi_\varepsilon \in C^\infty_0(B_\varepsilon(0))$ und damit die Faltung $u_\varepsilon := \varphi_\varepsilon * u$ auch für $u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ erklärt. Es gelten dann die folgenden Eigenschaften:

(a) $u_\varepsilon \in C^\infty(\Omega')$ für alle $\Omega' \subset\subset \Omega$ mit $\operatorname{dist}(\Omega', \partial\Omega) > \varepsilon$.

(b) Falls $u \in L^1(\Omega)$, dann ist $u_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, wenn $u \equiv 0$ auf $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$ gesetzt wird.

(c) Falls $\operatorname{supp} u \subset\subset \Omega$, dann ist $u_\varepsilon \in C_0^\infty(\Omega)$ für alle $\varepsilon < \operatorname{dist}(\operatorname{supp} u, \partial\Omega)$.

(d) Für die charakteristische Funktion $u := \chi_{\Omega''}$[1] mit $\Omega' \subset\subset \Omega'' \subset\subset \Omega$ und

$$\varepsilon < \min\{\operatorname{dist}(\Omega', \partial\Omega''), \operatorname{dist}(\Omega'', \partial\Omega)\}$$

gilt: $u_\varepsilon \in C_0^\infty(\Omega)$, $0 \le u_\varepsilon \le 1$, und $u_\varepsilon \equiv 1$ auf Ω'.

Satz A.21 [Approximation durch Faltung [43, Kapitel 7.2]]
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine nichtleere offene Menge.

(i) *Für $u \in L^q_{\text{loc}}(\Omega)$, $1 \le q < \infty$, gilt $u_\varepsilon \to u$ in $L^q_{\text{loc}}(\Omega)$ für $\varepsilon \to 0$. Ist $\Omega = \mathbb{R}^n$ und $u \in L^q(\mathbb{R}^n)$, $1 \le q < \infty$, dann hat man die Konvergenz $u_\varepsilon \to u$ in $L^q(\mathbb{R}^n)$ für $\varepsilon \to 0$.*

(ii) *Für $u \in C^0(\Omega)$ und alle $\Omega' \subset\subset \Omega$ gilt $u_\varepsilon \to u$ in $C^0(\overline{\Omega'})$ für $\varepsilon \to 0$.*

(iii) *Für $u \in C^{k,\alpha}(\Omega)$, $0 < \beta < \alpha \le 1$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ gilt $u_\varepsilon \to u$ für $\varepsilon \to 0$ in $C^{k,\beta}(\overline{\Omega'})$ für alle $\Omega' \subset\subset \Omega$. Zusätzlich gilt für alle $\Omega' \subset\subset \Omega'' \subset\subset \Omega$ die Abschätzung*

$$\|u_\varepsilon\|_{C^{k,\alpha}(\overline{\Omega'})} \le \|u\|_{C^{k,\alpha}(\overline{\Omega''})} \text{ für } \varepsilon < \operatorname{dist}(\Omega', \partial\Omega'').$$

Korollar A.22
Der Raum $C_0^\infty(\Omega)$ liegt dicht in $L^q(\Omega)$ für alle $1 \le q < \infty$, d.h. zu einer Funktion $u \in L^q(\Omega)$ und $\sigma > 0$ gibt es eine Funktion $u_\sigma \in C_0^\infty(\Omega)$, so dass $\|u - u_\sigma\|_{L^q(\Omega)} < \sigma$. Für $q = \infty$ ist diese Aussage nicht richtig.

[1] Die charakteristische Funktion χ_A einer Menge A ist definiert durch $\chi_A(x) = 1$, falls $x \in A$, und $\chi_A(x) = 0$, falls $x \notin A$.

Literaturverzeichnis

[1] Acerbi, E., and Fusco, N. Semicontinuity problems in the calculus of variations. *Arch. Rational Mech. Anal. 86*, 2 (1984), 125–145.

[2] Adams, R. A. *Sobolev spaces.* Academic Press [A subsidiary of Harcourt Brace Jovanovich, Publishers], New York-London, 1975. Pure and Applied Mathematics, Vol. 65.

[3] Alt, H. W. *Lineare Funktionalanalysis*, 5. Aufl. 2006 ed. Springer Berlin Heidelberg, 2006.

[4] Barner, M., and Flohr, F. *Analysis. II*, second ed. de Gruyter Lehrbuch. [de Gruyter Textbook]. Walter de Gruyter & Co., Berlin, 1989.

[5] Branson, T. P. *The functional determinant*, vol. 4 of *Lecture Notes Series.* Seoul National University, Research Institute of Mathematics, Global Analysis Research Center, Seoul, 1993.

[6] Buttazzo, G. *Semicontinuity, relaxation and integral representation in the calculus of variations*, vol. 207 of *Pitman Research Notes in Mathematics Series.* Longman Scientific & Technical, Harlow; copublished in the United States with John Wiley & Sons, Inc., New York, 1989.

[7] Buttazzo, G., Giaquinta, M., and Hildebrandt, S. *One-dimensional variational problems*, vol. 15 of *Oxford Lecture Series in Mathematics and its Applications.* The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1998. An introduction.

[8] Chang, S.-Y. A. *Non-linear elliptic equations in conformal geometry.* Zurich Lectures in Advanced Mathematics. European Mathematical Society (EMS), Zürich, 2004.

[9] Chang, S.-Y. A., and Yang, P. C. Fourth order equations in conformal geometry. In *Global analysis and harmonic analysis (Marseille-Luminy, 1999)*, vol. 4 of *Sémin. Congr.* Soc. Math. France, Paris, 2000, pp. 155–165.

[10] Clarenz, U., Dziuk, G., and Rumpf, M. On generalized mean curvature flow in surface processing. In *Geometric analysis and nonlinear partial differential equations.* Springer, Berlin, 2003, pp. 217–248.

[11] Clarke, F. H. A classical variational principle for periodic Hamiltonian trajectories. *Proc. Amer. Math. Soc. 76*, 1 (1979), 186–188.

[12] Clarke, F. H. Periodic solutions to Hamiltonian inclusions. *J. Differential Equations 40*, 1 (1981), 1–6.

[13] Clarke, F. H. *Optimization and nonsmooth analysis*, second ed., vol. 5 of *Classics in Applied Mathematics*. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA, 1990.

[14] Clarke, F. H., and Ekeland, I. Hamiltonian trajectories having prescribed minimal period. *Comm. Pure Appl. Math. 33*, 2 (1980), 103–116.

[15] Courant, R. *Dirichlet's principle, conformal mapping, and minimal surfaces*. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1977. With an appendix by M. Schiffer, Reprint of the 1950 original.

[16] Dacorogna, B. *Direct methods in the calculus of variations*, vol. 78 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, Berlin, 1989.

[17] Dacorogna, B. *Introduction to the calculus of variations*, third ed. Imperial College Press, London, 2015.

[18] Dall'Acqua, A., Fröhlich, S., Grunau, H.-C., and Schieweck, F. Symmetric Willmore surfaces of revolution satisfying arbitrary Dirichlet boundary data. *Adv. Calc. Var. 4*, 1 (2011), 1–81.

[19] De Giorgi, E. Teoremi di semicontinuà nel calcolo delle variazioni, 1968-1969.

[20] Deckelnick, K., and Grunau, H.-C. Boundary value problems for the one-dimensional Willmore equation. *Calc. Var. Partial Differential Equations 30*, 3 (2007), 293–314.

[21] Deckelnick, K., and Grunau, H.-C. Stability and symmetry in the Navier problem for the one-dimensional Willmore equation. *SIAM J. Math. Anal. 40*, 5 (2008/09), 2055–2076.

[22] Deckelnick, K., Grunau, H.-C., and Röger, M. Minimising a relaxed Willmore functional for graphs subject to boundary conditions. *Interfaces Free Bound. 19*, 1 (2017), 109–140.

[23] DeSimone, A., Kohn, R. V., Müller, S., and Otto, F. Magnetic microstructures—a paradigm of multiscale problems. In *ICIAM 99 (Edinburgh)*. Oxford Univ. Press, Oxford, 2000, pp. 175–190.

[24] Dierkes, U., Hildebrandt, S., Küster, A., and Wohlrab, O. *Minimal surfaces. I*, vol. 295 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, Berlin, 1992. Boundary value problems.

[25] Dierkes, U., Hildebrandt, S., Küster, A., and Wohlrab, O. *Minimal surfaces. II*, vol. 296 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, Berlin, 1992. Boundary regularity.

[26] Dierkes, U., Hildebrandt, S., and Sauvigny, F. *Minimal surfaces*, second ed., vol. 339 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer, Heidelberg, 2010. With assistance and contributions by A. Küster and R. Jakob.

[27] Dierkes, U., Hildebrandt, S., and Tromba, A. J. *Global analysis of minimal surfaces*, second ed., vol. 341 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer, Heidelberg, 2010.

[28] Dierkes, U., Hildebrandt, S., and Tromba, A. J. *Regularity of minimal surfaces*, second ed., vol. 340 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer, Heidelberg, 2010. With assistance and contributions by A. Küster.

[29] do Carmo, M. P. *Differentialgeometrie von Kurven und Flächen*, vol. 55 of *Vieweg Studium: Aufbaukurs Mathematik [Vieweg Studies: Mathematics Course]*. Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1983. Translated from the English by Michael Grüter.

[30] Dunford, N., and Schwartz, J. T. *Linear Operators. I. General Theory.* With the assistance of W. G. Bade and R. G. Bartle. Pure and Applied Mathematics, Vol. 7. Interscience Publishers, Inc., New York; Interscience Publishers, Ltd., London, 1958.

[31] Eells, J., and Fuglede, B. *Harmonic maps between Riemannian polyhedra*, vol. 142 of *Cambridge Tracts in Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 2001. With a preface by M. Gromov.

[32] Eichmann, S. Nonuniqueness for Willmore surfaces of revolution satisfying Dirichlet boundary data. *J. Geom. Anal. 26*, 4 (2016), 2563–2590.

[33] Eichmann, S., and Koeller, A. Symmetry for Willmore surfaces of revolution. *J. Geom. Anal. 27*, 1 (2017), 618–642.

[34] Ekeland, I. *Convexity methods in Hamiltonian mechanics*, vol. 19 of *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3) [Results in Mathematics and Related Areas (3)]*. Springer-Verlag, Berlin, 1990.

[35] Evans, L. C. *Partial differential equations*, vol. 19 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, 1998.

[36] Evans, L. C., and Gariepy, R. F. *Measure theory and fine properties of functions*. Studies in Advanced Mathematics. CRC Press, Boca Raton, FL, 1992.

[37] Finn, R. *Equilibrium capillary surfaces*, vol. 284 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, New York, 1986.

[38] Fonseca, I., and Leoni, G. *Modern methods in the calculus of variations: L^p spaces.* Springer Monographs in Mathematics. Springer, New York, 2007.

[39] Giaquinta, M. *Multiple integrals in the calculus of variations and nonlinear elliptic systems*, vol. 105 of *Annals of Mathematics Studies*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1983.

[40] Giaquinta, M., and Hildebrandt, S. A priori estimates for harmonic mappings. *J. Reine Angew. Math. 336* (1982), 124–164.

[41] Giaquinta, M., and Hildebrandt, S. *Calculus of variations. I*, vol. 310 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, Berlin, 1996. The Lagrangian formalism.

[42] Giaquinta, M., and Hildebrandt, S. *Calculus of variations. II*, vol. 311 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, Berlin, 1996. The Hamiltonian formalism.

[43] Gilbarg, D., and Trudinger, N. S. *Elliptic partial differential equations of second order*. Classics in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 2001. Reprint of the 1998 edition.

[44] Giusti, E., Ed. *Harmonic mappings and minimal immersions*, vol. 1161 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 1985. Lectures given at the first 1984 session of the Centro Internationale Matematico Estivo (CIME) held at Montecatini, June 24–July 3, 1984.

[45] Grunau, H.-C. The asymptotic shape of a boundary layer of symmetric Willmore surfaces of revolution. In *Inequalities and applications 2010*, vol. 161 of *Internat. Ser. Numer. Math.* Birkhäuser/Springer, Basel, 2012, pp. 19–29.

[46] Guillemin, V., and Pollack, A. *Differential topology.* Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1974.

[47] Hajł asz, P. Sobolev mappings, co-area formula and related topics. In *Proceedings on Analysis and Geometry (Russian) (Novosibirsk Akademgorodok, 1999)* (2000), Izdat. Ross. Akad. Nauk Sib. Otd. Inst. Mat., Novosibirsk, pp. 227–254.

[48] Hélein, F. *Harmonic maps, conservation laws and moving frames*, second ed., vol. 150 of *Cambridge Tracts in Mathematics.* Cambridge University Press, Cambridge, 2002. Translated from the 1996 French original, With a foreword by James Eells.

[49] Hélein, F. Hamiltonian formalisms for multidimensional calculus of variations and perturbation theory. In *Noncompact problems at the intersection of geometry, analysis, and topology*, vol. 350 of *Contemp. Math.* Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2004, pp. 127–147.

[50] Hélein, F., and Kouneiher, J. Finite dimensional Hamiltonian formalism for gauge and quantum field theories. *J. Math. Phys. 43*, 5 (2002), 2306–2347.

[51] Hélein, F., and Kouneiher, J. Covariant Hamiltonian formalism for the calculus of variations with several variables: Lepage-Dedecker versus De Donder-Weyl. *Adv. Theor. Math. Phys. 8*, 3 (2004), 565–601.

[52] Hélein, F., and Kouneiher, J. The notion of observable in the covariant Hamiltonian formalism for the calculus of variations with several variables. *Adv. Theor. Math. Phys. 8*, 4 (2004), 735–777.

[53] Hildebrandt, S. *Analysis 1*, corrected ed. Springer-Lehrbuch. [Springer Textbook]. Springer, Berlin, 2006.

[54] Hildebrandt, S., and von der Mosel, H. On two-dimensional parametric variational problems. *Calc. Var. Partial Differential Equations 9*, 3 (1999), 249–267.

[55] Hildebrandt, S., and von der Mosel, H. Plateau's problem for parametric double integrals. I. Existence and regularity in the interior. *Comm. Pure Appl. Math. 56*, 7 (2003), 926–955. Dedicated to the memory of Jürgen K. Moser.

[56] Hildebrandt, S., and von der Mosel, H. Plateau's problem for parametric double integrals. II. Regularity at the boundary. *J. Reine Angew. Math. 565* (2003), 207–233.

[57] Hildebrandt, S., and Von Der Mosel, H. Conformal representation of surfaces, and Plateau's problem for Cartan functionals. *Riv. Mat. Univ. Parma (7) 4** (2005), 1–43.

[58] Hildebrandt, S., and von der Mosel, H. Conformal mapping of multiply connected Riemann domains by a variational approach. *Adv. Calc. Var. 2*, 2 (2009), 137–183.

[59] Jost, J. *Differentialgeometrie und Minimalflächen*. Springer-Lehrbuch. [Springer Textbook]. Springer-Verlag, Berlin, 1994.

[60] Kazdan, J. L., and Warner, F. W. Curvature functions for compact 2-manifolds. *Ann. of Math. (2) 99* (1974), 14–47.

[61] Koskela, P., Malý, J., and Zürcher, T. Luzin's condition (N) and Sobolev mappings. *Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Lincei Mat. Appl. 23*, 4 (2012), 455–465.

[62] Koskela, P., Malý, J., and Zürcher, T. Luzin's condition (N) and modulus of continuity. *Adv. Calc. Var. 8*, 2 (2015), 155–171.

[63] Köthe, G. *Topologische lineare Räume. I.* Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Bd. 107. Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1960.

[64] Kurzke, M., and von der Mosel, H. The Douglas problem for parametric double integrals. *Manuscripta Math. 110*, 1 (2003), 93–114.

[65] Lichtenstein, L. Über einige Existenzprobleme der Variationsrechnung. Methode der unendlich vielen Variablen. *J. Reine Angew. Math. 145* (1915), 24–85.

[66] Lin, F.-H. Gradient estimates and blow-up analysis for stationary harmonic maps. *Ann. of Math. (2) 149*, 3 (1999), 785–829.

[67] Malý, J. The area formula for $W^{1,n}$-mappings. *Comment. Math. Univ. Carolin. 35*, 2 (1994), 291–298.

[68] Malý, J., and Martio, O. Lusin's condition (N) and mappings of the class $W^{1,n}$. *J. Reine Angew. Math. 458* (1995), 19–36.

[69] Mania, B. Sopra un esempio di Lavrentieff. *Boll. Unione Mat. Ital. 13* (1934), 147–153.

[70] Mawhin, J., and Willem, M. *Critical point theory and Hamiltonian systems*, vol. 74 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, New York, 1989.

[71] Maz'ja, V. G. *Sobolev spaces*. Springer Series in Soviet Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 1985. Translated from the Russian by T. O. Shaposhnikova.

[72] Menne, U. Ein maßtheoretischer Zugang zu Unterhalbstetigkeit und Konvergenz von Funktionalen. Master's thesis, Bonn University, 2004.

[73] Mo, X. Harmonic maps from Finsler manifolds. *Illinois J. Math. 45*, 4 (2001), 1331–1345.

[74] Mo, X., and Yang, Y. The existence of harmonic maps from Finsler manifolds to Riemannian manifolds. *Sci. China Ser. A 48*, 1 (2005), 115–130.

[75] Mo, X., and Zhao, L. Regularity of weakly harmonic maps from a Finsler surface into an n-sphere. *Pacific J. Math. 253*, 1 (2011), 145–155.

[76] Morrey, Jr., C. B. *Multiple integrals in the calculus of variations*. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 130. Springer-Verlag New York, Inc., New York, 1966.

[77] Moser, J. On a nonlinear problem in differential geometry. In *Dynamical systems (Proc. Sympos., Univ. Bahia, Salvador, 1971)*. Academic Press, New York, 1973, pp. 273–280.

[78] Moser, J. Periodic orbits near an equilibrium and a theorem by Alan Weinstein. *Comm. Pure Appl. Math. 29*, 6 (1976), 724–747.

[79] Moser, R. *Partial regularity for harmonic maps and related problems*. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Hackensack, NJ, 2005.

[80] Müller, S. Microstructures, phase transitions and geometry. In *European Congress of Mathematics, Vol. II (Budapest, 1996)*, vol. 169 of *Progr. Math.* Birkhäuser, Basel, 1998, pp. 92–115.

[81] Müller, S. Variational models for microstructure and phase transitions. In *Calculus of variations and geometric evolution problems (Cetraro, 1996)*, vol. 1713 of *Lecture Notes in Math.* Springer, Berlin, 1999, pp. 85–210.

[82] Nirenberg, L. Remarks on nonlinear problems. In *The Chern Symposium 1979 (Proc. Internat. Sympos., Berkeley, Calif., 1979)*. Springer, New York-Berlin, 1980, pp. 189–197.

[83] Nitsche, J. C. C. *Vorlesungen über Minimalflächen*. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1975. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 199.

[84] Paneitz, S. M. A quartic conformally covariant differential operator for arbitrary pseudo-Riemannian manifolds (summary). *SIGMA Symmetry Integrability Geom. Methods Appl. 4* (2008), Paper 036, 3.

[85] Protter, M. H., and Weinberger, H. F. *Maximum principles in differential equations*. Springer-Verlag, New York, 1984. Corrected reprint of the 1967 original.

[86] Rabinowitz, P. H. Periodic solutions of Hamiltonian systems. *Comm. Pure Appl. Math. 31*, 2 (1978), 157–184.

[87] Rabinowitz, P. H. Periodic solutions of a Hamiltonian system on a prescribed energy surface. *J. Differential Equations 33*, 3 (1979), 336–352.

[88] Rabinowitz, P. H. *Minimax methods in critical point theory with applications to differential equations*, vol. 65 of *CBMS Regional Conference Series in Mathematics*. Published for the Conference Board of the Mathematical Sciences, Washington, DC; by the American Mathematical Society, Providence, RI, 1986.

[89] Reˇ setnjak, J. G. General theorems on semicontinuity and convergence with functionals. *Sibirsk. Mat. Ž. 8* (1967), 1051–1069.

[90] Rivière, T. Everywhere discontinuous harmonic maps into spheres. *Acta Math. 175*, 2 (1995), 197–226.

[91] Rivière, T., and Struwe, M. Partial regularity for harmonic maps and related problems. *Comm. Pure Appl. Math. 61*, 4 (2008), 451–463.

[92] Rudin, W. *Real and complex analysis*, third ed. McGraw-Hill Book Co., New York, 1987.

[93] Scheven, C. Dimension reduction for the singular set of biharmonic maps. *Adv. Calc. Var. 1*, 1 (2008), 53–91.

[94] Scholtes, S. Elastic catenoids. *Analysis (Munich) 31*, 2 (2011), 125–143.

[95] Schwartz, L. *Théorie des distributions.* Publications de l'Institut de Mathématique de l'Université de Strasbourg, No. IX-X. Nouvelle édition, entiérement corrigée, refondue et augmentée. Hermann, Paris, 1966.

[96] Schygulla, J. Willmore minimizers with prescribed isoperimetric ratio. *Arch. Ration. Mech. Anal. 203*, 3 (2012), 901–941.

[97] Shen, Y., and Zhang, Y. Second variation of harmonic maps between Finsler manifolds. *Sci. China Ser. A 47*, 1 (2004), 39–51.

[98] Simon, L. Existence of surfaces minimizing the Willmore functional. *Comm. Anal. Geom. 1*, 2 (1993), 281–326.

[99] Simon, L. Theorems on the regularity and singularity of minimal surfaces and harmonic maps. In *Lectures on geometric variational problems (Sendai, 1993)*. Springer, Tokyo, 1996, pp. 115–150.

[100] Struwe, M. *Variational methods*, second ed., vol. 34 of *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3) [Results in Mathematics and Related Areas (3)]*. Springer-Verlag, Berlin, 1996. Applications to nonlinear partial differential equations and Hamiltonian systems.

[101] Struwe, M. Partial regularity for biharmonic maps, revisited. *Calc. Var. Partial Differential Equations 33*, 2 (2008), 249–262.

[102] SUTTON, A. P., AND BALLUFFI, R. *Interfaces in Crystalline Materials.* Oxford University Press, 1995.

[103] TACHIKAWA, A. Erratum: "A partial regularity result for harmonic maps into a Finsler manifold" [Calc. Var. Partial Differential Equations **16** (2003), no. 2, 217–224; MR1959178 (2004a:58023a)]. *Calc. Var. Partial Differential Equations 16*, 2 (2003), 225–226.

[104] TACHIKAWA, A. A partial regularity result for harmonic maps into a Finsler manifold. *Calc. Var. Partial Differential Equations 16*, 2 (2003), 217–224.

[105] TACHIKAWA, A. Partial regularity results up to the boundary for harmonic maps into a Finsler manifold. *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire 26*, 5 (2009), 1953–1970.

[106] TACHIKAWA, A. Existence and regularity of weakly harmonic maps into a Finsler manifold with a special structure. *Bull. Lond. Math. Soc. 44*, 5 (2012), 1020–1033.

[107] TACHIKAWA, A. $C^{1,\alpha}$-regularity of energy minimizing maps from a 2-dimensional domain into a Finsler space. *Houston J. Math. 39*, 4 (2013), 1175–1186.

[108] VOLOVSKIY, G. Die Poincaré Ungleichung und die Fortsetzungseigenschaft von Gebieten. Master's thesis, RWTH Aachen University, 2012.

[109] VON DER MOSEL, H., AND WINKLMANN, S. On weakly harmonic maps from Finsler to Riemannian manifolds. *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire 26*, 1 (2009), 39–57.

[110] VON WAHL, W. Vorlesung über gewöhnliche differentialgleichungen. Report 07-15, Bayreuth University, 2003. online available from https://www.diffgleichg.uni-bayreuth.de/en/team/prof-von-wahl/Lecture-Notes/index.html.

[111] ZIEMER, W. P. Change of variables for absolutely continuous functions. *Duke Math. J. 36* (1969), 171–178.

[112] ZIEMER, W. P. *Weakly differentiable functions*, vol. 120 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1989. Sobolev spaces and functions of bounded variation.

Index