

Übungen zur Vorlesung
Variationsrechnung I
Serie 1 vom 13.10.2021
Abgabedatum: 25.10.2021

Aufgabe 1 [Beispiel eines Minimierers in $C^1 \setminus C^2$ und Nichtlösbarkeit]

(i) Beweisen Sie, dass die Funktion

$$u_*(x) := \begin{cases} 0 & \text{für } x \in [-1, 0], \\ x^2 & \text{für } x \in (0, 1] \end{cases}$$

der *eindeutige* Minimierer von

$$\mathcal{F}(u) := \int_{-1}^1 u^2(x) [2x - u'(x)]^2 dx$$

in der Klasse

$$\mathcal{C}(0, 1) := \{u \in C^1([-1, 1]) : u(-1) = 0, u(1) = 1\}$$

ist.

(ii)* Beweisen Sie, dass das Funktional

$$\mathcal{F}(u) := \int_{-1}^1 x^2 (u'(x))^2 dx$$

nicht in der Klasse

$$\mathcal{C}(-1, 1) := \{u \in C^1([-1, 1]) : u(-1) = -1, u(1) = 1\}$$

minimierbar ist.

Hinweis: Zeigen Sie mit Hilfe einer geeigneten Funktionenfolge, dass $\inf_{\mathcal{C}(-1,1)} \mathcal{F}(\cdot) = 0$, und anschließend, dass es keine Funktion $u \in \mathcal{C}(-1,1)$ mit $\mathcal{F}(u) = 0$ geben kann.

*Allgemeiner Hinweis: Lösungen zu Aufgaben mit einem * werden mit Zusatzpunkten belohnt.*

Aufgabe 2 [1. Variation & Euler-Lagrange-Gl. in mehreren Dimensionen]

Betrachte Variationsintegrale der Form

$$\mathcal{F}(u) := \int_{\Omega} F(x, u(x), Du(x)) dx, \quad (1)$$

wobei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, offen und beschränkt ist, $F \in C^1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^{nN})$, $u \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$, und wobei $Du(x)$ die Jakobische von u bezeichnet.

- Leiten Sie analog zur Vorlesung eine Formel für die erste Variation $\delta \mathcal{F}(u, \phi)$ her (vgl. Def. 1.1), wobei $\phi \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$.
- Wie lauten die zugehörigen Euler-Lagrangeschen Gleichungen für eine schwache \mathcal{F} -Extremale $u \in C^2(\Omega, \mathbb{R}^N)$, wobei $F \in C^2(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^{nN})$ vorausgesetzt sei (vgl. Prop. 1.6)?
- Geben Sie für $N = 1$, $n \geq 1$ die Euler-Lagrangeschen Gleichungen für die Funktionale

$$\mathcal{D}(u) := \frac{1}{2} \int_{\Omega} |Du(x)|^2 dx, \quad (\text{Dirichlet Integral}) \quad (2)$$

$$\mathcal{F}(u) := \mathcal{D}(u) + \int_{\Omega} f(x)u(x) dx, \quad (3)$$

$$\mathcal{G}(u) := \mathcal{D}(u) + \int_{\Omega} g(u(x)) dx, \quad (4)$$

an, wobei $f \in C^0(\overline{\Omega})$ und $g \in C^1(\mathbb{R}^N)$.

Aufgabe 3 [Mittelwertkonvergenz]

Sei $x \in I = (a, b) \subset \mathbb{R}$ und $I_i \subset I$ eine Folge von Intervallen, so dass folgendes gilt: Es gibt Zahlen $\sigma, r_i > 0$ mit $\lim_{i \rightarrow \infty} r_i = 0$, so dass

$$I_i \subset (x - r_i, x + r_i) \quad \text{und} \quad |I_i| \geq \sigma |(x - r_i, x + r_i)| = 2\sigma r_i \quad \text{für alle } i \in \mathbb{N}.$$

Beweisen Sie: Ist x ein Lebesgue Punkt von $f \in L^1(I)$, dann gilt

$$f(x) = \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{1}{|I_i|} \int_{I_i} f(y) dy.$$

Bemerkung. Der Punkt x muss nicht in I_i liegen, nicht einmal in $\overline{I_i}$.

Zusatz*: Versuchen Sie, die Aussage auch im \mathbb{R}^n zu formulieren und zu beweisen, indem Sie die Intervalle I_i durch Borelmengen $E_i \subset \mathbb{R}^n$ und die Intervalle $(x - r_i, x + r_i)$ durch offene Bälle

$$B_{r_i}(x) := \{y \in \mathbb{R}^n : |y - x| < r_i\}$$

ersetzen.

Aufgabe 4 [Kreisbögen als Lösungen von Euler-Lagrange-Gleichungen]

Leiten Sie die Euler-Lagrange-Gleichung für das Funktional

$$\mathcal{F}(u) := \int_0^1 \{ \sqrt{1 + (u'(x))^2} + Hu(x) \} dx, \quad H = \text{const} \in (-1, 1) \setminus \{0\},$$

her, und beweisen Sie unter geeigneten Annahmen an Integrationskonstanten, dass für jede Lösung $u \in C^2((0, 1))$ der Euler-Lagrange-Gleichung der Graph von u

$$\text{graph } u := \{(x, u(x)) : x \in (0, 1)\}$$

ein Kreisbogen mit Radius $R := 1/|H|$ darstellt.
