

Übungen zur Vorlesung  
Variationsrechnung I  
Serie 10 vom 16.12.2021  
Abgabedatum: 10.1.2021

---

Aufgabe 37

Sei  $I = (0, 1)$ ,  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ,  $\mathcal{G}(v) := \int_I [\varphi(v'(x)) + v(x)] dx$ , wobei

$$\varphi(p) := \begin{cases} (1-p^2)^2 & \text{für } |p| > 1, \\ 0 & \text{für } |p| \leq 1, \end{cases}$$

und es gelte  $\mathcal{G}(u) = \inf_{\mathcal{C}(\alpha, \beta)} \mathcal{G}(\cdot)$  für

$$u \in \mathcal{C}(\alpha, \beta) := \{v \in W^{1,4}(I) : v(0) = \alpha, v(1) = \beta\}.$$

Zeigen Sie:

$$0 = \int_I [\varphi'(u'(x)) - x] \eta'(x) dx \text{ für alle } \eta \in C_0^\infty(I).$$

*Hinweis: Machen Sie sich klar, dass die erste Variation  $\delta \mathcal{G}(u, \eta)$  auch in diesem Setting mit nicht klassisch differenzierbaren Funktionen existiert.*

---

**Definition:** Ein Banachraum  $X$  heißt *uniform konvex*, wenn es zu jedem  $\varepsilon > 0$  ein  $\delta(\varepsilon) > 0$  gibt, so dass gilt: Für  $u, v \in X$  mit  $\|u\|_X = \|v\|_X = 1$  und mit  $\|u - v\|_X \geq \varepsilon$  gilt  $\|u + v\|_X \leq 2(1 - \delta)$ . (Gleichbedeutend ist: Aus  $\|u_k\|_X = \|v_k\|_X = 1$  und  $\|u_k + v_k\|_X \rightarrow 2$  folgt  $\|u_k - v_k\|_X \rightarrow 0$ .)

Aufgabe 38

**[Normkonvergenz & schwache Konvergenz  $\Rightarrow$  starke Konvergenz]**

Sei  $X$  ein uniform konvexer Banachraum. Zeigen Sie: Aus  $u_k \rightharpoonup u$  in  $X$  und  $\|u_k\|_X \rightarrow \|u\|_X$  folgt  $\|u_k - u\|_X \rightarrow 0$ .

*Hinweis: Machen Sie sich klar, dass Sie ohne Einschränkung annehmen dürfen, dass  $\|u_k\|_X = \|u\|_X = 1$ , und nutzen Sie dann die schwache Unterhalbstetigkeit der Norm (vgl. Aufgabe 27 (ii)).*

---

Aufgabe 39

**[Clarkson für  $q \in [2, \infty]$ ]**

Die Banachräume  $L^q(I)$ ,  $1 < q < \infty$ , sind uniform konvex. Zeigen Sie das für  $q \in [2, \infty)$ .

*Hinweis: Beweisen Sie*

$$|x + y|^q + |x - y|^q \leq 2^{q-1}(|x|^q + |y|^q) \text{ für alle } x, y \in \mathbb{R}, q \geq 2.$$

### Aufgabe 39\*

[Clarkson für  $q \in (1, 2)$ ]

Beweisen Sie die Aussage aus Aufgabe 39 für  $q \in (1, 2)$ .

*Hinweis: Sie dürfen benutzen, dass es in einem normierten, uniform konvexen Raum  $X$  mit  $p \in (1, \infty)$  zu jedem  $\varepsilon > 0$  ein  $\delta_p(\varepsilon)$  mit der Eigenschaft*

$$\| \|x\|, \|y\| \leq 1, \|x - y\| \geq \varepsilon \implies \left\| \frac{1}{2}(x+y) \right\|^p \leq (1 - \delta_p) \frac{\|x\|^p + \|y\|^p}{2}$$

*gibt. (Beweis?) Obige Gleichung gilt dann auch für beliebige  $x, y \in X$ , wobei  $\delta_p = \delta_p\left(\frac{\|x-y\|}{\max(\|x\|, \|y\|)}\right)$ . Betrachten Sie nun für  $f, g \in L^p(I)$  die Mengen*

$$M = \left\{ t \in I \mid |f(t) - g(t)|^p \geq \frac{\varepsilon^p}{4} (|f(t)|^p + |g(t)|^p) \left( \geq \frac{\varepsilon^p}{4} \max(|f(t)|^p, |g(t)|^p) \right) \right\}$$

und  $N := I \setminus M$ .

---

### Aufgabe 40

[Existenz unter Nebenbedingung]

Sei  $G \in C^1(\mathbb{R})$ , und es gebe eine Konstante  $C \geq 0$ , so dass  $|G'(z)| \leq C(1 + |z|)$  für alle  $z \in \mathbb{R}$ . Beweisen Sie die Existenz einer Funktion

$$u \in \mathcal{C}_0 := \{w \in W_0^{1,2}((0, 1)) : \int_0^1 G(w(x)) dx = 0\},$$

so dass  $\mathcal{D}(u) = \inf_{\mathcal{C}_0} \mathcal{D}$ , wobei

$$\mathcal{D}(w) := \frac{1}{2} \int_0^1 |u'(x)|^2 dx$$

das Dirichlet-Integral bezeichnet. Hierbei nehmen wir an, dass die Klasse  $\mathcal{C}_0$  zulässiger Funktionen nicht leer ist.

---