Rheinisch-Westfälische Technische Hochschule Aachen
Institut für Mathematik
Prof. Dr. Heiko von der Mosel
Kristin Lüke

Übungen zur Vorlesung
Variationsrechnung I
Serie 11 vom 14.1.2022
Abgabedatum: 24.1.2022

Aufgabe 41 Sei $f \in L^2((0,1))$. Zeigen Sie, dass das Variationsintegral

$$\mathscr{F}(w) := \int_0^1 \left[\frac{1}{2}|w'(x)|^2 - f(x)w(x)\right] dx$$

einen *eindeutigen* Minimierer in der Klasse

$$\mathscr{C} := \{w \in W_0^{1,2}((0,1)) : |w'(x)| \leq 1 \text{ für } \mathscr{L}^1\text{-fast alle } x \in (0,1)\}$$

besitzt.

Aufgabe 42

[Erweiterung des Testraumes für Variationsungleichungen]

Sei $I = (a,b) \subset \mathbb{R}$ ein endliches Intervall, und $u \in W^{1,q}(I)$, $q \in (1,\infty]$, erfülle die Ungleichung

$$\int_I u'(x)\phi'(x)\,dx \geq 0 \qquad \text{für alle } \phi \in C_0^\infty(I,\mathbb{R}_+),$$

wobei $\mathbb{R}_+ := \{t \in \mathbb{R} : t \geq 0\}$ bezeichnet. Zeigen Sie, dass dieselbe Ungleichung dann auch für alle $\phi \in W_0^{1,q'}(I,\mathbb{R}_+)$ mit $\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1$ gilt.

Hinweis: Eine Möglichkeit ist, den Träger von ϕ durch Vorschalten geeigneter linearer Transformationen zunächst zu verkleinern, um dann mit einem nichtnegativen Faltungskern zu falten.

Aufgabe 43

[Konkave Funktionen]

Sei I ein endliches Intervall in $\mathbb{R}$ und $u : \bar{I} \to \mathbb{R}$ eine beschränkte konkave Funktion.

(i) Zeigen Sie, dass in *allen* Punkten die einseitigen Ableitungen

$$u'(y^-) := \lim_{z \to y^-} \frac{u(z) - u(y)}{z - y} \quad \text{und} \quad u'(y^+) := \lim_{z \to y^+} \frac{u(z) - u(y)}{z - y}$$

existieren und geordnet sind: $u'(y^-) \geq u'(y^+)$ für alle $y \in I$.

(ii) Beweisen Sie: Falls u zusätzlich differenzierbar ist auf $\bar{I}$, dann ist $u \in C^1(\bar{I})$ und die Ableitungsfunktion u' ist monoton fallend auf $\bar{I}$.

Aufgabe 44

[Konkave Einhüllende und Yosida-Transformation]

(i) Zeigen Sie, dass für eine beschränkte Funktion $\psi : \bar{I} \to \mathbb{R}$ die Funktion

$$\operatorname{conc}(\psi)(x) := \inf\{v(x) : v \text{ konkav}, v \geq \psi \text{ auf } \bar{I}.\}$$

konkav ist. (Man nennt $\operatorname{conc}(\psi)$ die *konkave Einhüllende* von ψ.)

(ii) Zeigen Sie, dass die *Yosida-Transformierten*

$$Y_\lambda \psi(x) := \inf_{y \in \mathbb{R}} \{\psi(y) + \lambda |x - y|\}$$

für beliebige $\lambda > 0$ *subadditiv* sind, falls $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+ := \{t \in \mathbb{R} : t \geq 0\}$ subadditiv ist, d.h. falls $\psi(\xi + \eta) \leq \psi(\xi) + \psi(\eta)$ für alle $\xi, \eta \in \mathbb{R}$.
