Rheinisch-Westfälische Technische Hochschule Aachen
Institut für Mathematik
Prof. Dr. Heiko von der Mosel
Anna Lagemann

Übungen zur Vorlesung
Variationsrechnung I
Serie 2 vom 15.10.2021
Abgabedatum: 2.11.2021

Aufgabe 5 **[Sturm-Liouville-Operator]**

Für $u \in C^2(I) \cap C^0(\bar{I})$, $I = (a,b)$, gelte

$$\begin{aligned} -u''(x) + c(x)u(x) &= f(x), \\ u(a) &= \alpha, \\ u(b) &= \beta, \end{aligned} \tag{1}$$

wobei $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ und $c : \bar{I} \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion ist. Weiterhin gebe es Konstanten $0 < c_0 \leq c_1$, so dass

$$c_0 \leq c(x) \leq c_1 \text{ für alle } x \in I. \tag{2}$$

(a) Beweisen Sie:

$$u(x) \leq \max\{\alpha, \beta, c_0^{-1} \sup_{y \in I} |f(y)|\} \text{ für alle } x \in \bar{I}.$$

(b) Die in (a) zu beweisende Aussage stellt eine *a priori* Abschätzung für die Lösung von (1) dar, d.h. eine Abschätzung von $u(x)$ durch Konstanten, die nur von den Daten α, β, c, f in (1) abhängen. Zeigen Sie durch ein Gegenbeispiel, dass eine solche a priori Abschätzung für Lösungen von (1) i.A. nicht möglich ist, falls $0 > c_1 \geq c(x) \geq c_0$ für alle $x \in I$ anstelle von (2) gilt.

Aufgabe 6 **[Fundamentallemma** DuBois-Reymond **II]**

Beweisen Sie die folgende Variante des Fundamentallemmas:

Sei $I = (a,b)$, $-\infty < a < b < \infty$ und $f \in C^0(\bar{I})$ erfülle

$$\int_I f(x)\eta(x)\,dx = 0 \quad \text{für alle } \eta \in C^0(\bar{I}) \quad \text{mit} \int_I \eta(x)\,dx = 0,$$

dann gibt es eine Konstante $c \in \mathbb{R}$, so dass $f(x) = c$ für alle $x \in \bar{I}$.

Hinweis: Nehmen Sie das Gegenteil an. Konstruieren Sie zu zwei Punkten mit unterschiedlichen f-Werten eine stetige Funktion η mit Träger in hinreichend kleinen, disjunkten, aber gleichgroßen Umgebungen dieser beiden Punkte, so dass die Werte jeweils entgegengesetztes Vorzeichen auf diesen Umgebungen haben.

Aufgabe 7 **[Euler-Lagrange-Gleichung höherer Ordnung]**

Sei $I := (a,b) \subset \mathbb{R}$ mit $-\infty < a < b < \infty$ und $u \in C^{2m}(I, \mathbb{R}^N)$, $m \geq 1$ ein schwacher kritischer Punkt von

$$\mathscr{F}(v) := \int_I F(x, v(x), v'(x), \dots, v^{(m)}(x))\, dx,$$

wobei $F = F(x, z, p_1, \dots, p_m) \in C^{m+1}(I \times \mathbb{R}^N \times \cdots \times \mathbb{R}^N)$.

Beweisen Sie: Für alle $x \in I$ gilt

$$F_z(x, u(x), u'(x), \dots, u^{(m)}(x)) + \sum_{i=1}^{m} (-1)^i \frac{d^i}{dx^i} \left[F_{p_i}(x, u(x), u'(x), \dots, u^{(m)}(x)) \right] = 0.$$

Aufgabe 8 **[Parameterinvariantes Variationsintegral = CARTAN-Funktional]**

Sei

$$\mathscr{F}_I(u) := \int_I F(u(x), u'(x))\, dx, \quad I = (a,b),$$

mit $F \in C^0(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N)$ ein Variationsintegral definiert auf der Funktionenklasse $u \in C^1(\bar{I}, \mathbb{R}^N)$. Zeigen Sie, dass die beiden folgenden Aussagen äquivalent sind:

(i) $\mathscr{F}$ is *parameterinvariant*, d.h. es gilt $\mathscr{F}_I(u) = \mathscr{F}_J(u \circ \sigma)$ für alle $u \in C^1(\bar{I}, \mathbb{R}^N)$, und für alle C^1-Diffeomorphismen $\sigma : \overline{J} \to \overline{I}$ von $\overline{J} := [c,d]$ auf $\overline{I}$ mit $\frac{d}{d\tau}\sigma(\tau) > 0$ für alle $\tau \in \overline{J}$.

(ii) $F(z, .)$ ist positiv homogen 1. Ordnung, d.h. es gilt

$$F(z, tp) = tF(z,p) \text{ für alle } t > 0,\ z, p \in \mathbb{R}^N. \tag{H}$$

Hinweis: Für den Beweis von "(i) ⇒ (ii)" wähle für beliebige $(z,p) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$ eine Kurve $u \in C^1(\bar{I}, \mathbb{R}^N)$ (mit $I = (-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$, $\varepsilon_0 > 0$) mit $u(0) = z$, $u'(0) = p$, und den Diffeomorphismus $\sigma : [-\varepsilon_0/t, \varepsilon_0/t] \to \bar{I}$ definiert durch $\sigma(\tau) := t \cdot \tau$, für $\tau \in [-\varepsilon_0/t, \varepsilon_0/t]$ und für beliebiges (aber festes) $t > 0$.
