Rheinisch-Westfälische Technische Hochschule Aachen
Institut für Mathematik
Prof. Dr. Heiko von der Mosel
Anna Lagemann

Übungen zur Vorlesung Variationsrechnung I Serie 5 vom 12.11.2021 Abgabedatum: 22.11.2021

Aufgabe 17 **[Legendre-Transformation]**

Die zu einer Funktion $F : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ *Legendre Transformierte* $F^* : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ ist definiert durch

$$F^*(\zeta) := \sup_{p \in \mathbb{R}^N} \{\zeta \cdot p - F(p)\}.$$

Zeigen Sie für $N = 1$:

(i) Für $q \in (1,\infty)$ und $F(p) := |p|^q/q$ ist $F^*(\zeta) = |\zeta|^{q'}/q'$, wobei $1/q + 1/q' = 1$.

(i)* Zeigen Sie, dass $F(p) = |p|^q/q$ für $q \in (1,2]$ auf $\mathbb{R}$ lokal stark konvex ist.

(ii) Berechnen Sie für $F(p) = \sqrt{1+p^2}$ die Legendre Transformierte F^*.

(iii) Berechnen Sie F^* und $(F^*)^*$ zu der *Indikator-Funktion* des Intervalls $(0,1)$, d.h. zu

$$F(p) := \begin{cases} 0 & \text{für } \ p \in (0,1) \\ +\infty & \text{für } \ p \in \mathbb{R} \setminus (0,1). \end{cases}$$

(iv) Für $P \in \mathbb{R}^{2\times 2} \simeq \mathbb{R}^4$ sei $F_1(P) := \det P$ und $F_2(P) := (\det P)^2$. Berechnen Sie F_i^* und $(F_i^*)^*$ für $i = 1,2$.

Aufgabe 18

[Stetige Fortsetzung]

Seien X ein normierter Vektorraum, Y ein Banachraum und $Z \subset X$ eine dichte Teilmenge, d.h. der Abschluss $\overline{Z}$ ist identisch mit X.

(i) Zeigen Sie, dass jede gleichmäßig stetige Funktion $f : Z \to Y$ genau eine (gleichmäßig) stetige Fortsetzung $\tilde{f} : X \to Y$ besitzt.

(ii) Sei Z zusätzlich ein Unterraum von X. Beweisen Sie, dass es zu $T \in L(Z,Y)$ genau eine stetige Fortsetzung $\tilde{T} \in L(X,Y)$ gibt, wobei $L(Z,Y)$ den Raum der stetigen linearen Abbildungen von Z nach Y bezeichnet. (Die Stetigkeit einer solchen linearen Abbildung $T : Z \to Y$ ist äquivalent zu ihrer Beschränktheit, d.h. T ist stetig genau dann, wenn es eine Konstante $C \geq 0$ gibt, so dass $\|T(z)\|_Y \leq C\|z\|_Z$ für alle $z \in Z$, wobei man für die Norm $\|\cdot\|_Z$ auf dem Teilraum $Z \subset X$ die Norm $\|\cdot\|_X$ des umgebenden Raumes X wählen kann.)

Hinweis: Das *Prinzip der eindeutigen stetigen Fortsetzung* wird wiederholt in der Vorlesung benutzt werden, siehe z.B. den Beweis von Lemma 2.7.

Zur Erinnerung: Ein *metrischer Raum* ist ein Paar $(\mathscr{M}, d)$, wobei $\mathscr{M}$ eine Menge ist und $d : \mathscr{M} \times \mathscr{M} \to \mathbb{R}$ eine Abbildung mit folgenden Eigenschaften für alle $x, y, z \in \mathscr{M}$:

(i) $d(x,y) \geq 0$ und $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$,

(ii) $d(x,y) = d(y,x)$ (Symmetrie),

(iii) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ (Dreiecksungleichung).

$(\mathscr{M}, d)$ heißt *vollständiger* metrischer Raum, falls jede Cauchy-Folge in $\mathscr{M}$ einen Grenzwert in $\mathscr{M}$ besitzt. Ein normierter Vektorraum $(Y, \|.\|_Y)$ heißt *Banachraum*, falls Y ein vollständiger metrischer Raum bezüglich der induzierten Metrik $d(x,y) := \|x-y\|_Y$ ist.

Aufgabe 19

[$(C^1(\bar{I}), \|.\|_{1,2})$ nicht vollständig]

Zeigen Sie, dass $(C^1(\bar{I}), \|.\|_{1,2})$, $I = (a,b) \subset \mathbb{R}$ mit $-\infty < a < b < \infty$, nicht vollständig ist, wobei $\|u\|_{1,2} := \|u\|_{L^2(I)} + \|u'\|_{L^2(I)}$ ist.

Hinweis: Geben Sie ein Beispiel einer Cauchy-Folge in $C^1(\bar{I})$ an, deren Grenzwert (bezüglich $\|.\|_{1,2}$) nicht überall differenzierbar ist.

Aufgabe 20

[Eigenschaften von Differenzenquotienten]

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge. Beweisen Sie für $u \in L^p(\Omega)$, $v \in L^q(\Omega)$, $1 \leq p \leq \infty$ mit $p^{-1} + q^{-1} = 1$ die folgenden Eigenschaften von Differenzenquotienten $\triangle_h^{e_l} \equiv \triangle_h$, $e_l \in S^{n-1}, l \in \{1, \ldots, n\}, h \neq 0$ (definiert durch $\triangle_h^{e_l} f(x) := (f(x + he_l) - f(x))/h$):

(i)

$$\triangle_h(uv)(x) = (\triangle_h u)(x)v(x) + u_h(x)\triangle_h v(x) = (\triangle_h u)(x)v_h(x) + u(x)\triangle_h v(x)$$

für fast alle $x \in \Omega$, $|h| < \operatorname{dist}(x, \partial\Omega)$, wobei für eine Funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}$

$$f_h(x) := f(x + he_l)$$

gesetzt wurde.

(ii) Falls u oder v kompakten Träger in Ω haben, dann gilt für $|h| \ll 1$

$$\int_\Omega u(x)\triangle_h v(x)\,dx = -\int_\Omega \triangle_{-h} u(x)v(x)\,dx.$$
