Rheinisch-Westfälische Technische Hochschule Aachen
Institut für Mathematik
Prof. Dr. Heiko von der Mosel
Anna Lagemann

Übungen zur Vorlesung Variationsrechnung I Serie 6 vom 18.11.2021 Abgabedatum: 29.11.2021

Aufgabe 21

[N-Teilchensystem]

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein endliches offenes Intervall. Betrachte ein N-Teilchensystem mit positiven Punktmassen m_i für $i = 1, \dots, N$ im R^3, wobei die Positionsvektoren durch $u_i(t) \in C^2(\bar{I}, \mathbb{R}^3)$, $i = 1, \dots, N$, als Vektorfunktionen der Zeit beschrieben werden. Die zugehörige kinetische Energie des Teilchensystems $u := (u_1, \dots, u_N)$ zur Zeit t ist

$$T(u'(t)) := \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} m_i |u_i'(t)|^2,$$

während die potentielle Energie des Systems durch eine Funktion $V = V(t,z) \in C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{3N})$ beschrieben wird, so dass das Wirkungsfunktional den Integranden $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{3N} \times \mathbb{R}^{3N} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $F(t,z,p) := T(p) - V(t,z)$ besitzt.

(i) Leiten Sie die Euler-Lagrange Gleichungen des Wirkungsfunktionals her und bestimmen Sie die zugehörige Hamiltonfunktion.

(ii) Zeigen Sie, dass die Hamiltonfunktion entlang der Lösung der Euler-Lagrange Gleichungen, d.h. für $v := F_p(t,u,u')$ als *Gesamtenergie*

$$H(t,u,v) = T(u') + V(t,u)$$

geschrieben werden kann.

Aufgabe 22

Sei $f \in C^1(\mathbb{R}^N)$, $q > 1$, und es gebe $c_0 > 0$, so dass

$$c_0 |p|^q \le f(p) \text{ für alle } p \in \mathbb{R}^N.$$

Zeigen Sie:

(i) $\nabla f(.) : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ surjektiv.

(ii) Falls f zusätzlich konvex ist, dann gilt $|\nabla f(p)| \to \infty$ für $|p| \to \infty$.

Hinweis: Betrachten Sie für Teil (i) zu beliebig vorgegebenem $v \in \mathbb{R}^N$ die Funktion $g_v : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ mit $g_v(x) := f(x) - x \cdot v$. Nutzen Sie für Teil (ii) die wegen der Konvexität gültige Beziehung

$$f(0) \ge f(p) + (0-p)\nabla f(p) \quad \textit{für alle } p \in \mathbb{R}^N.$$

Aufgabe 23

[Stetigkeit von Infima]

(i) Sei $f = f(\eta, \xi) \in C^0(\mathbb{R}^M \times \mathbb{R}^N)$ für $N, M \in \mathbb{N}$, und $T \subset \mathbb{R}^M$ eine beschränkte nichtleere Teilmenge. Zeigen Sie, dass dann die Funktion

$$F(\xi) := \inf_{\eta \in T} f(\eta, \xi)$$

stetig ist.

(ii) Sei $A = A(\xi) \in C^0(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^{l \times l})$ für $N, l \in \mathbb{N}$, so dass $A(\xi)$ symmetrisch ist für alle $\xi \in \mathbb{R}^N$. Zeigen Sie, dass der kleinste Eigenwert $\lambda = \lambda(\xi)$ von $A(\xi)$ aufgefasst als Funktion von $\xi \in \mathbb{R}^N$ stetig ist.

(iii)* Versuchen Sie, die Stetigkeitsaussage aus Teil (i) auf eine möglichst allgemeine Situation zu generalisieren.

Aufgabe 24

[Unterhalbstetigkeit]

Sei $(\mathscr{M}, d)$ ein metrischer Raum mit Metrik d, dann heißt eine Funktion $f : \mathscr{M} \to \mathbb{R}$ *folgenunterhalbstetig*, genau dann wenn für alle Folgen $\{x_n\}_n \in \mathbb{N} \subset \mathscr{M}$ und $x \in \mathscr{M}$ mit $d(x_n, x) \to 0$ für $n \to \infty$ die Ungleichung

$$f(x) \leq \liminf_{n \to \infty} f(x_n)$$

gilt. Andererseits heißt f *folgenoberhalbstetig*, wenn für alle solche Folgen gilt

$$\limsup_{n \to \infty} f(x_n) \leq f(x).$$

(i) Zeigen Sie: Eine auf dem $\mathbb{R}^n$ unterhalbstetige Funktion f nimmt auf jeder nichtleeren kompakten Menge $K \subset \mathbb{R}^n$ ihr Infimum an, d.h. es gibt ein $x \in K$, so dass

$$f(x) = \inf_K f(.).$$

(ii) Sei $(\mathscr{M}, d)$ ein metrischer Raum mit Metrik d. Zeigen Sie: $f : \mathscr{M} \to \mathbb{R}$ ist folgenunterhalbstetig (bzw. folgenoberhalbstetig) genau dann, wenn $f^{-1}[(a, \infty)]$ (bzw. $f^{-1}[(-\infty, a)]$) offen ist für alle $a \in \mathbb{R}$.
