Rheinisch-Westfälische Technische Hochschule Aachen
Institut für Mathematik
Prof. Dr. Heiko von der Mosel
Anna Lagemann, Kristin Lüke

Übungen zur Vorlesung
Variationsrechnung I
Serie 7 vom 24.11.2021
Abgabedatum: 6.12.2021

Aufgabe 25 **[Beispiele von Sobolevfunktionen]**

(i) Zeigen Sie, dass die Funktion

$$u(x) := |x|, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

in $W^{1,\infty}(B_1(0))$ liegt.

(ii) Sei $n = 2$. Zeigen Sie, dass die Funktion

$$u(x) := \begin{cases} \log\log\frac{1}{|x|} & \text{für } x \in B_1(0)\setminus\{0\} \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

für $0 < R < 1$ in $W^{1,2}(B_R(0))$ liegt.

(iii) Sei $n = 1$. Ist die *Heavyside-Funktion*

$$u(x) := \begin{cases} 1 & \text{für } x \geq 0 \\ 0 & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

eine Sobolevfunktion? Begründen Sie Ihre Antwort.

(iv)* Sei $q \in [1,\infty)$. Konstruieren Sie eine Funktion $u \in W^{1,q}(B_1(0))$, die unbeschränkt auf jeder offenen Teilmenge des Einheitsballes $B_1(0) \subset \mathbb{R}^n$ ist. *Hinweis: Bauen Sie in eine abzählbar dichte Teilmenge $(\xi_k)_k \subset B_1(0)$ jeweils die auch in der Vorlesung diskutierte Punktsingularität $x \mapsto |x|^{-\alpha}$ für geeignetes $\alpha = \alpha(n,q)$ ein.*

Aufgabe 26
[Beispiele zu den Einbettungssätzen]

(i) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Zeigen Sie, dass keine stetige Einbettung des Raumes $W^{1,q}(\Omega)$ in $L^\infty(\Omega)$ existiert falls $q = n$, (vgl. mit dem Sobolevschen Einbettungssatz, Satz 2.9 (i) der Vorlesung).

Hinweis: Betrachten Sie dazu z.B. die Funktion

$$u(x) := \log(1 + |\log|x||) \quad \text{für } x \in B_1(0) \subset \mathbb{R}^n.$$

(ii) Zeigen Sie, dass die Funktion $u : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $u(x,y) := x\log|\log r|$ mit $r := \sqrt{x^2+y^2}$ von der Klasse $W^{2,2}(B_{1/2}(0))$ ist, dass aber der Gradient ∇u auf $B_{1/2}$ unbeschränkt ist, und vergleichen Sie mit dem Morrey-Sobolevschen Einbettungssatz, Satz 2.9 der Vorlesung. Zeigen Sie darüberhinaus, dass der Einheitsnormalenvektor ν_u des Graphen von u im $\mathbb{R}^3$,

$$\nu_u := \frac{1}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}} \begin{pmatrix} -\nabla u \\ 1 \end{pmatrix},$$

andererseits einen wohldefinierten Limes besitzt, wenn $r \to 0$.

Aufgabe 27

[Nichtkompakte Einbettung] Zeigen Sie an einem Beispiel, dass die Einbettung $W^{1,2}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^n)$ für $1 \leq q < 2n/(n-2)$ nicht kompakt ist.

Aufgabe 28 **[Punktweise Konvergenz (fast überall)]**

(i) Sei $\{v_k\} \subset W^{1,\infty}(\mathbb{R}^n)$ eine beschränkte Folge. Beweisen Sie die Existenz einer Teilfolge $\{v_{k_i}\} \subset \{v_k\}$, die für $i \to \infty$ lokal gleichmäßig gegen eine Grenzfunktion $u \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^n)$ konvergiert.

(ii)* Sei $\{v_k\} \subset W^{1,q}(\mathbb{R}^n)$, $q \in (1,\infty]$ eine beschränkte Folge. Beweisen Sie die Existenz einer Teilfolge $\{v_{k_i}\} \subset \{v_k\}$, die für $i \to \infty$ $\mathscr{L}^n$-fast überall gegen eine Grenzfunktion $u \in W^{1,q}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n) \cap L^q(\mathbb{R}^n)$ konvergiert.

Hinweis zu (ii): Benutzen Sie auf Bällen $B_j(0) \subset \mathbb{R}^n$, $j \in \mathbb{N}$, die Kompaktheit der Sobolevschen Einbettung (Satz 2.9 in Variationsrechnung I) $W^{1,q}(B_j(0)) \hookrightarrow L^q(B_j(0))$.*
