

Übungen zur Vorlesung
Variationsrechnung I
Serie 8 vom 2.12.2021
Abgabedatum: 13.12.2021

Aufgabe 29

[Eine Kettenregel für Sobolevfunktionen]

Beweisen Sie: Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und nichtleer. Dann ist für $u \in W^{1,q}(\Omega)$, $1 \leq q \leq \infty$, und $f \in C^1(\mathbb{R})$ mit $f(0) = 0$ und $f' \in L^\infty(\mathbb{R})$, die Komposition $f \circ u \in W^{1,q}(\Omega)$, und es gilt

$$D(f \circ u) = f'(u)Du.$$

Hinweis: Approximieren Sie u zunächst mit glatten Funktionen u_m .

Aufgabe 30

[Poincaré Ungleichungen]

Sei $\Omega \subset \subset \mathbb{R}^n$ offen und $1 \leq q < \infty$. Beweisen Sie:

- (i) Falls Ω zusammenhängend ist und $\partial\Omega \in C^{0,1}$, dann gibt es eine Konstante $C = C(n, q, \Omega)$, so dass

$$\int_{\Omega} |u - \bar{u}_{\Omega}|^q dx \leq C(n, q, \Omega) \int_{\Omega} |\nabla u|^q dx \quad \text{für alle } u \in W^{1,q}(\Omega),$$

wobei wir

$$\bar{u}_{\Omega} := \int_{\Omega} u(x) dx = \frac{1}{\mathcal{L}^n(\Omega)} \int_{\Omega} u(x) dx$$

gesetzt haben.

- (ii) Sei $\alpha \in (0, 1]$, Ω zusammenhängend und $\partial\Omega \in C^{0,1}$, dann gibt es eine Konstante $C = C(n, q, \Omega, \alpha)$, so dass

$$\int_{\Omega} |u|^q dx \leq C(n, q, \Omega, \alpha) \int_{\Omega} |\nabla u|^q dx \quad \text{für alle } u \in W^{1,q}(\Omega) \text{ mit } \mathcal{L}^n(\{u=0\}) \geq \alpha \mathcal{L}^n(\Omega).$$

- (iii) Es gibt eine Konstante $C = C(n, q, \Omega)$, so dass

$$\int_{\Omega} |u|^q dx \leq C(n, q, \Omega) \int_{\Omega} |\nabla u|^q dx \quad \text{für alle } u \in W_0^{1,q}(\Omega).$$

Zeigen Sie abschließend, dass man für $\Omega = B_R(x_0) \subset \mathbb{R}^n$ die Konstanten $C = C(n, q)R^q$ in (i) und (iii), bzw. $C = C(n, q, \alpha)R^q$ in (ii) wählen kann.

Aufgabe 31

[Schwache Konvergenz]

Sei X ein Banachraum mit seinem Dualraum X^* , dann heißt eine Folge $(x_k) \subset X$ *schwach konvergent* gegen $x \in X$ (“ $x_k \rightharpoonup x$ in X für $k \rightarrow \infty$ ”), wenn

$$\langle l, x_k \rangle_{X^* \times X} := l(x_k) \rightarrow l(x) = \langle l, x \rangle_{X^* \times X} \quad \text{für alle } l \in X^*.$$

Die Konvergenz $x_k \rightarrow x$ bezüglich der Norm in X nennen wir im Folgenden auch *starke Konvergenz* – sie wird oft auch als *Normkonvergenz* bezeichnet.

Zeigen Sie:

- (i) Starke Konvergenz impliziert schwache Konvergenz.
- (ii) Die Norm in X ist *schwach unterhalbstetig*, d.h. es gilt

$$x_k \rightharpoonup x \quad \Rightarrow \quad \|x\|_X \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \|x_k\|_X.$$

- (iii) Sei $B : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ eine symmetrische, positiv-semidefinite und stetige Bilinearform. Zeigen Sie: Falls $x_k \rightharpoonup x$ in X , dann gilt

$$B(x, x) \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} B(x_k, x_k).$$

Hinweis: Für den Beweis der Aussage (ii) können Sie (ohne Beweis) eine Folgerung aus dem Satz von Hahn-Banach benutzen: Zu jedem Element x in einem normierten linearen Raum X gibt es ein lineares stetiges Funktional l aus dem Dualraum X^ von X , so dass $\|l\|_{X^*} = 1$ und $l(x) = \|x\|_X$.*

Aufgabe 32

[Klassische Nullrandwerte]

Sei $1 \leq q < \infty$ und $I = (a, b) \subset \mathbb{R}$, $-\infty < a < b < \infty$.

Zeigen Sie: Für $u \in W^{1,q}(I)$ mit $u(a) = u(b) = 0$ gilt $u \in W_0^{1,q}(I)$.
