Rheinisch-Westfälische Technische Hochschule Aachen
Institut für Mathematik
Prof. Dr. Heiko von der Mosel
Kristin Lüke

Übungen zur Vorlesung
Variationsrechnung I
Serie 9 vom 9.12.2021
Abgabedatum: 20.12.2021

Aufgabe 33

[Absolutstetige Funktionen]

Sei $I = (a,b) \subset \mathbb{R}$, $-\infty < a < b < \infty$. Zeigen Sie: Gilt für $u, v \in L^1(I)$ die Identität

$$u(x) - u(y) = \int_y^x v(t)\,dt \quad \text{für } \mathscr{L}^1\text{-fast alle } x, y \in \bar{I},$$

dann ist $u \in W^{1,1}(I)$ mit schwacher Ableitung $u' = v$. *Hinweis: Wählen Sie ein Teilintervall (a_1, b_1), außerhalb dessen eine gegebene Testfunktion $\phi \in C_0^\infty(I)$ verschwindet, und so dass für a_1, b_1 die vorausgesetzte Identität gilt.*

Aufgabe 34

[Unterhalbstetigkeit des Längenfunktionals]

Zeigen Sie, dass das Längenfunktional $\mathscr{L}(u) := \int_0^1 \sqrt{1 + (u'(x))^2}\,dx$ unterhalbstetig ist bezüglich der schwachen Konvergenz in $W^{1,q}((0,1))$, $q \in (1, \infty)$, nicht aber stetig bezüglich dieser Konvergenz.

Hinweis: Für ein Gegenbeispiel gegen die schwache Stetigkeit approximieren Sie eine konstante Funktion geeignet durch Zackenfunktionen.

Aufgabe 35

[Gegenbeispiel zur Unterhalbstetigkeit]

Tonelli's Unterhalbstetigkeitssatz (Satz 3.5) wird für $N > 1$ falsch, wenn man die schwache Konvergenz in $W^{1,p}(I,\mathbb{R}^N)$, $p \in [1,\infty)$, durch die Bedingungen

$$u_k, u \in W^{1,1}(I,\mathbb{R}^N), \quad u_k \to u \text{ in } L^1(I,\mathbb{R}^N) \tag{*}$$

ersetzt.

Zeigen Sie für $N = 2$, $I = (0,1)$, dass die Funktion

$$F(x,z,p) := (z_1 \cdot p_2)^2 \text{ für } z = (z_1,z_2) \in \mathbb{R}^2, p = (p_1,p_2) \in \mathbb{R}^2,$$

ein Gegenbeispiel liefert, d.h., dass zwar F die Voraussetzungen (i)–(iii) aus Satz 3.5 erfüllt, dass aber das Funktional $\mathscr{F}(u) := \int_0^1 F(x,u(x),u'(x))\,dx$ nicht unterhalbstetig ist bezüglich der Konvergenz in (*).

Hinweis: Konstruieren Sie eine Funktionenfolge

$$\{u_k\}_k = \{(u_{1k},u_{2k})\}_k \subset C^{0,1}([0,1],\mathbb{R}^2) \subset W^{1,1}((0,1),\mathbb{R}^2),$$

so dass $u_{1k} \to u_1(x) \equiv 1$ *und* $u_{2k} \to u_2(x) = x$ *in* $L^1((0,1))$ *konvergieren, und so dass* $u_{2k}'(x) \cdot u_{1k}(x) = 0$ *für alle* $x \in (0,1)$.

Aufgabe 36

[Superlinearer Integrand]

Sei $I = (a,b), -\infty < a < b < +\infty$, $\alpha,\beta \in \mathbb{R}^N$, $F \in C^0(\bar{I} \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N)$, $\mathscr{F}(u) := \int_I F(x,u(x),u'(x))\,dx$, und es gebe eine Funktion $\theta : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, so dass

$$\begin{aligned} F(x,z,p) &\geq \theta(p) \geq 0 \text{ für alle } (x,z,p) \in \bar{I} \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \\ \frac{\theta(p)}{|p|} &\to \infty \text{ für } |p| \to \infty. \end{aligned}$$

Zeigen Sie: Falls für die Folge $\{u_k\}_k \subset \{v \in W^{1,1}(I,\mathbb{R}^N) : v(a) = \alpha, v(b) = \beta\}$ die Zahlenfolge $\{\mathscr{F}(u_k)\}_k$ beschränkt ist, dann ist auch die Zahlenfolge $\{\|u_k\|_{W^{1,1}(I,\mathbb{R}^N)}\}_k$ beschränkt.
