

Dynamische Systeme

PROF. DR. STANISLAUS MAIER-PAAPE

19. Februar 2021

Vorwort

Das vorliegende Skript ist parallel zu meiner Vorlesung „Dynamische Systeme“ vom WS 2020/2021 entstanden. Es enthält die wichtigsten Sätze, Lemmata und einige Beispiele, letztere aber i.d.R. nicht vollständig. Ebenso wurde weitestgehend auf die Angabe von Beweisen verzichtet. Damit handelt es sich bei diesem Skript nur um einen roten Faden, welcher das Erlernen des Stoffs der Vorlesungen und Übungen erleichtern soll. Ein regelmäßiger Besuch von beiden ist daher unerlässlich.

Aachen, Februar 2021

Stanislaus Maier-Paape

© Prof. S. Maier-Paape
Institut für Mathematik
RWTH Aachen
Templergraben 55
52062 Aachen

Einleitung

Literatur: Alligood, Sauer, Yorke: Chaos [ASY96]

Dynamische Systeme modellieren zeitabhängige Prozesse, z.B.

- Bevölkerungsentwicklung (von Jahr zu Jahr) [diskret] $t = 1, 2, 3, \dots$
- stetige Änderung von Konzentrationen
bei einer chemischen Reaktion [kontinuierlich] $t \geq 0, t \in \mathbb{R}$

Situation: (diskret) $X =$ Menge der zulässigen Zustände (\mathbb{R}, \mathbb{R}^n , Teilmengen U von \mathbb{R}^n, \dots)
„Phrasenraum“

x_k : Zustand des Systems zur Zeit k

$f(x_k)$: Zustand des Systems zur Zeit $k + 1$

X und $f: X \rightarrow X$ erzeugen ein **diskretes dynamisches System**.

$$\begin{aligned} \text{Die Folge } x_0, x_1, x_2, \dots \text{ mit } x_{k+1} = f(x_k) & \quad k \in \mathbb{N}_0 \\ \text{oder } x_k = f^{(k)}(x_0) & \quad (0.1) \end{aligned}$$

heißt **Bahn (Orbit)** des System mit Startzustand x_0 .

Beispiel 0.0.1 (Bevölkerungswachstum)

$$X = [0, \infty)$$

$x_k =$ Größe der Bevölkerung im Jahr k

- *Modell mit konstantem Wachstum:* $x_{k+1} = c \cdot x_k$
d.h. $f(x) = c \cdot x$, mit $c > 0$ fest.

Start bei $x_0 \in X \rightarrow$ Bahn $x_k = x_0 \cdot c^k$

Ziel: Studiere asymptotisches Verhalten der Bahnen (in Abhängigkeit von x_0) insbesondere

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = ?$$

Beispiel 0.0.2 (Logistische Abbildung)

beschränkte Ressourcen \rightarrow Wachstumsgrenzen (Modell für „**Erde**“)

- *Logistisches Modell:*

$$x_{k+1} = dx_k \cdot (\mu - x_k)$$

mit $X = [0, \mu]$ und Parametern $0 < d \leq \frac{4}{\mu}$.

M ist eine obere Schranke z.B. für die Bevölkerung. Damit ist hier $f(x) = d \cdot x (\mu - x)$.

Beispiel 0.0.3 (Fibonacci Folge)

- *Modell für Hasenvermehrung*

$$y_k = y_{k-1} + y_{k-2} \quad y_0 = y_1 = 1 \quad (0.2)$$

Erklärung der Formel

- $y_k =$ Anzahl der Hasenpaare im Jahr k
- Hasen sind das erste Jahr unfruchtbar; danach bekommen sie jedes Jahr ein weiteres Paar als Nachwuchs.

Inhaltsverzeichnis

Vorwort	i
Einleitung	iii
Inhaltsverzeichnis	v
I Diskrete Dynamische Systeme	1
1 Eindimensionale Abbildungen	3
1.1 Allgemeine Definitionen	3
1.2 Graphische Darstellung von Orbits	4
1.3 Fixpunkte und ihre Stabilität	5
1.4 Periodische Punkte und ihre Stabilität	7
1.5 Unendlich viele periodische Orbits	9
1.6 Die Sätze von Li–Yorke und Sharkovskii	11
1.7 Reiserouten (Itineraries) und dichte Orbits	13
1.8 Sensitive Abhängigkeit von den Anfangswerten	15
1.9 Devaneys Definition von Chaos	16
1.10 Konjugation von Abbildungen	17
1.11 Lyapunov–Exponenten	19
1.12 Chaotische Orbits	21
2 Höher dimensionale Abbildungen	23
2.1 Affine Abbildungen	23
2.2 Lineare Abbildungen in Normalform oder Standardform	24

2.3	Quellen, Senken und Sattelpunkte	26
2.4	Nichtlineare Abbildungen und der Satz von Hartman–Grobman	28
2.5	Stabile und instabile Mannigfaltigkeit	31
2.6	Zentrumsmanigfaltigkeit und Teillinearisation	36
2.7	Berechnung von instabilen Mengen und globalen Attraktoren	40
2.8	Weitere Themen und Zusammenhang zu kontinuierlichen dynamischen Systemen .	45
II	Kontinuierliche Dynamische Systeme	47
3	Reminiszenzen zu gewöhnlichen Differentialgleichungen	49
3.1	Autonome gewöhnliche Differentialgleichungen und dynamische Systeme	49
3.2	Reskalierung von Vektorfeldern	53
4	Globale Theorie nichtlinearer Systeme	55
4.1	Limesmengen und Attraktoren	55
4.2	Poincaré–Bendixson Theorie	57
4.3	Globale invariante Mannigfaltigkeiten	62
4.4	Zentrumsmanigfaltigkeit	68
4.5	Der Satz von Hartman–Grobman	75
5	Höherdimensionale Dynamik und Chaos	79
5.1	Poincaré–Abbildung	79
5.2	Die Shift–Abbildung	80
5.3	Die Hufeisenabbildung und der Satz von Smale–Birkhoff	81
5.4	Die Melnikov–Methode	85
5.5	Anwendung der Melnikov–Methode auf die Duffing–Gleichung	89
	Index	I
	Literaturverzeichnis	VI

Teil I

Diskrete Dynamische Systeme

Kapitel 1

Eindimensionale Abbildungen

1.1 Allgemeine Definitionen

Definition 1.1.1 (Dynamisches System)

Sei \mathbb{T} die Menge der möglichen Zeitpunkte ($\mathbb{T} = \mathbb{N}_0, \mathbb{Z}, \mathbb{R}_0^+, \mathbb{R}$ sind möglich) und M eine beliebige Menge, genannt **Phasenraum**.

- Ein dynamisches System (**DS**) auf M ist eine Funktion $\varphi: \mathbb{T} \times M \rightarrow M$ mit den folgenden Eigenschaften:

$$\text{DS(1)} \quad \boxed{\varphi(0, x) = x} \quad \text{für alle } x \in M \quad (\text{„Identitätseigenschaft“})$$

$$\text{DS(2)} \quad \boxed{\varphi(t, \varphi(s, x)) = \varphi(t + s, x)} \quad \text{für alle } t, s \in \mathbb{T}, x \in M \quad (\text{„Halbgruppeneigenschaft“})$$

- Für $x_0 \in M$ heißt $\{z = \varphi(t, x_0) : t \in \mathbb{T}\} =: \gamma(x_0)$, die **Bahn** oder der **Orbit** durch x_0 .
- Falls $\mathbb{T} = \mathbb{N}_0$ oder $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ heißt das dynamische System **diskret**, sonst **kontinuierlich**.

Lemma 1.1.2 (diskretes dynamisches System \longleftrightarrow Iteration von Abbildungen)

- (i) Sei φ dynamisches System auf M , $\mathbb{T} = \mathbb{N}_0$ oder \mathbb{Z} .

Setzen wir $f: M \rightarrow M$, $f(x) := \varphi(1, x)$, $x \in M$, dann gilt

$$\boxed{\varphi(k, x) = f^k(x) \quad \text{für alle } k \in \mathbb{T}, x \in M} \quad (1.1)$$

(d.h. φ hat eine Darstellung als Iteration einer Abbildung; insbesondere ist f invertierbar falls $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$.)

(ii) Sei $f: M \rightarrow M$ eine Abbildung. Setzen wir

$$\boxed{\varphi(k, x) := f^k(x) \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}_0, x \in M,} \quad (1.2)$$

dann ist φ ein diskretes dynamisches System auf M .

Zusatz: Falls f invertierbar, macht (1.2) für $k \in \mathbb{Z}$ Sinn, was ein dynamisches System über $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ ergibt.

Bemerkung 1.1.3 Eine ähnliche Verbindung gibt es zwischen kontinuierlichen dynamischen Systemen ($\mathbb{T} = \mathbb{R}_0^+$ oder $\mathbb{T} = \mathbb{R}$) und Lösungsbahnen von Differentialgleichungen.

1.2 Graphische Darstellung von Orbits

Ab jetzt erstmal 1-dim Abbildungen, d.h.

- $M \subset \mathbb{R}$ ist ein Intervall
- $f: M \rightarrow M$ ist reelle Funktion

Beispiel 1.2.1 (Newton Verfahren als DS)

Aufgabe: suche positive Nullstelle von $g(x) = x^2 - 2$ mit Newton Verfahren.

Iteration:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{g(x_k)}{g'(x_k)} = x_k - \frac{x_k^2 - 2}{2x_k},$$

d.h.

$$x_{k+1} = f(x_k) \quad \text{mit} \quad f(x) = \frac{1}{2} \left(x + \frac{2}{x} \right).$$

Die Iteration entspricht einem hin- und herlaufen zwischen Graph G_f und der Winkelhalbierenden.

Beispiel 1.2.2 (Logistische Abbildung)

$$f(x) = 2x(1-x) \quad (\text{entspricht Beispiel 0.0.2 mit, d.h. } \mu = 1 \quad \text{und} \quad d = 2).$$

1.3 Fixpunkte und ihre Stabilität

generelles Ziel: Dynamik des dynamischen Systems verstehen, d.h. das Langzeitverhalten der Bahnen des dynamischen Systems.

dazu sinnvoll: zunächst spezielle (einfache) Bahnen auszeichnen.

Definition 1.3.1 (Fixpunkte)

Ein Punkt $x_0 \in M$ heißt **Fixpunkt** des dynamischen Systems, falls

$$\varphi(t, x_0) = x_0 \quad \forall t \in \mathbb{T}$$

„keine Dynamik“.

Offenbar gilt:

$$x_0 \text{ ist Fixpunkt von } \varphi \iff f(x_0) = x_0, \text{ d.h. } x_0 \text{ ist Fixpunkt der Abbildung } f. \quad (3.1)$$

Dabei wurde φ und f vermöge Lemma 1.1.2 identifiziert.

Beispiel 1.3.2 (Logistische Abbildung)

- $f(x) = 2x(1 - x)$ (vgl. Beispiel 1.2.2)
Fixpunkt $x_0 = \frac{1}{2}$; Bahnen nahe x_0 werden von x_0 angezogen (x_0 ist „**attraktiv**“).
- $f(x) = 4x(1 - x)$
Fixpunkt $x_0 = \frac{3}{4}$ ist aber **nicht** attraktiv.

Im folgenden sei M topologischer Raum, so dass wir von Umgebungen sprechen können.

Definition 1.3.3 (attraktiver Fixpunkt; Senke)

Ein Fixpunkt $x_0 \in M$ eines diskreten dynamischen Systems heißt **attraktiv**, falls eine Umgebung U von x_0 existiert, so dass

$$z_0 \in U \implies \lim_{k \rightarrow \infty} \varphi(k, z_0) = x_0. \quad (3.2)$$

Ein attraktiver Fixpunkt heißt auch **Senke**.

Definition 1.3.4 (abstoßender Fixpunkt; Quelle)

Ein Fixpunkt $x_0 \in M$ eines diskreten dynamischen Systems heißt **abstoßend** oder **Quelle**, falls eine Umgebung U von x_0 existiert, so dass

$$z_0 \in U \setminus \{x_0\} \implies \exists k > 0 \text{ so dass } \varphi(k, z_0) \notin U. \quad (3.3)$$

Beispiel: (Fixpunkt, welcher weder Quelle noch Senke ist):

$$M = [-1, 1], f(x) = -x \implies x_0 = 0 \text{ ist Fixpunkt, aber weder Quelle noch Senke.}$$

Satz 1.3.5 (Charakterisierung Senke; Quelle)

Sei $M \subset \mathbb{R}$ und $f \in \mathcal{C}^1(M)$ mit Fixpunkt $x_0 \in \overset{\circ}{M}$, also x_0 innerer Punkt von M . Dann gilt:

- (i) Falls $|f'(x_0)| < 1$, dann ist x_0 eine Senke für das zu f assoziierte dynamische System.
- (ii) Falls $|f'(x_0)| > 1$, dann ist x_0 eine Quelle für das zu f assoziierte dynamische System.

Beispiel: Nochmal $M = [-1, 1]$, $f(x) = -x$.

Für $x_0 = 0$ ist $|f'(x_0)| = 1$, d.h. **keine** Aussage mit *Satz 1.3.5* möglich.

Beispiel 1.3.6 (Logistische Abbildung)

gesucht: Fixpunkt von

$$f_c(x) = c \cdot x(1 - x), x \in M = [0, 1], 0 < c \leq 4$$

$$f_c(x) = x \iff cx - cx^2 = x \iff cx \left(x - \frac{c-1}{c} \right) = 0$$

Damit

Fall $0 < c \leq 1$:	$x_0 = 0$ ist einziger Fixpunkt in M . Es ist eine Senke.
-----------------------	---

Fall $1 < c \leq 4$:	$x_0 = 0$ und $x_1 = 1 - \frac{1}{c}$ sind (alle) Fixpunkte in M .
-----------------------	--

$x_0 = 0$ ist Quelle für $1 < c \leq 4$

$x_1 = x_1(c) = 1 - \frac{1}{c}$ ist $\begin{cases} \text{Senke} & \text{für } 1 < c < 3 \\ \text{Quelle} & \text{für } 3 < c \leq 4 \end{cases}$

Bemerkung: Bei $c = 3$ verliert auch der zweite Fixpunkt seine Attraktivität.

Es entstehen keine neuen Fixpunkte!

1.4 Periodische Punkte und ihre Stabilität

Frage: Was passiert in obigem Beispiel für $c > 0$ (Langzeitverhalten der Orbits)

Definition 1.4.1 (periodische Punkte)

Sei $k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, $x_0 \in M$ heißt **periodischer Punkt mit Periode k** für ein diskretes dynamisches System, falls

$$\boxed{\varphi(k, x_0) = x_0 \quad \text{aber} \quad \varphi(\ell, x_0) \neq x_0 \quad \text{für} \quad \ell = 1, \dots, k-1.} \quad (4.1)$$

Kurzsprechweise: x_0 ist **Periode- k Punkt**.

Falls x_0 Periode- k Punkt, dann heißt sein Vorwärts-Orbit

$$\gamma(x_0) = \left\{ z = \varphi(t, x_0) : t \in \mathbb{N}_0 \right\} = \left\{ x_0, x_1, \dots, x_{k-1} \right\}, \quad x_i = \varphi(i, x_0)$$

ein **Periode- k Orbit**.

Beispiel 1.4.2 (Logistische Abbildung)

$$\begin{aligned} f_c(x) &= c \cdot x \cdot (1 - x) \\ \implies f_c^2(x) &= c \cdot (cx(1-x)) \cdot (1 - cx(1-x)) \\ &= c^2x - c^2(c+1)x^2 + 2c^3x^3 - c^3x^4 \end{aligned}$$

Gesucht: Periode-2 Punkte, also $f_c^2(x_0) = x_0$.

$$f_c^2(x) = x \iff (-x)(cx + 1 - c) \cdot (c^2x^2 - c(c+1)x + (c+1)) = 0.$$

Lösungen: $\boxed{x_0 = 0}$ $\boxed{x_1 = x_1(c) = 1 - \frac{1}{c}}$ (die Fixpunkte von vorher!)

weitere Lösungen erfüllen:

$$c^2x^2 - c(c+1)x + (c+1) = 0 \quad (*)$$

(*) hat eine Lösung für $c = 3$ und zwei für $c > 3$:

$$x_{\pm} = x_{\pm}(c) = \frac{(c+1) \pm \sqrt{(c+1)(c-3)}}{2c}$$

Definition 1.4.3 Sei p ein k -periodischer Punkt für $f: M \rightarrow M$ ($M \subset \mathbb{R}$).

Dann heißt p

- (i) **periodische Senke**, falls p Senke von f^k
- (ii) **periodische Quelle**, falls p Quelle von f^k

ist.

Problem: Die obige Eigenschaft sollte eigentlich eine Eigenschaft des k -periodischen Orbits $\{x_0 = p, x_1, \dots, x_{k-1}\}$ sein und nicht vom Startpunkt p abhängen.

Das ist aber noch **nicht** klar!

Lemma 1.4.4 Sei $M \subset \mathbb{R}$ und $f \in \mathcal{C}^1(M, M)$ und $p \in M$ sei k -periodischer Punkt mit Orbit $\{x_0 = p, x_1, \dots, x_{k-1}\}$. Dann gilt:

$$\boxed{(f^k)'(p) = f'(x_0) \cdot f'(x_1) \cdot f'(x_2) \cdots f'(x_{k-1})} \quad (4.2)$$

Sofern f differenzierbar ist, erhalten wir also:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left| f'(x_0) \cdots f'(x_{k-1}) \right| < 1 \implies p \text{ ist periodische Senke} \\ \left| f'(x_0) \cdots f'(x_{k-1}) \right| > 1 \implies p \text{ ist periodische Quelle} \end{array} \right. \quad (4.3)$$

Bemerkung: Da die Bedingung in (4.3) nicht nur vom Anfangswert $p = x_0$ abhängt, sondern für alle Punkte auf dem Orbit gleich ist, haben wir tatsächlich eine Eigenschaft der Orbits.

Beispiel 1.4.5 (Logistische Abbildung)

Diskutiere die Stabilität der Periode-2 Punkte

$$x_{\pm} = x_{\pm}(c) = \frac{(c+1) \pm \sqrt{(c+1)(c-3)}}{2c}$$

der logistischen Abbildung für $c \geq 3$ (vgl. Beispiel 1.4.2).

Ergebnis:

$$\begin{array}{ll}
 c = 3: & \left| f'_c(x_+) \cdot f'_c(x_-) \right| = 1 \quad \text{keine Aussage} \\
 3 < c < 1 + \sqrt{6} \approx 3.45: & \left| f'_c(x_+) \cdot f'_c(x_-) \right| < 1 \quad \boxed{\text{Senke}} \\
 c = 1 + \sqrt{6}: & \left| f'_c(x_+) \cdot f'_c(x_-) \right| = 1 \quad \text{keine Aussage} \\
 1 + \sqrt{6} < c \leq 4: & \left| f'_c(x_+) \cdot f'_c(x_-) \right| > 1 \quad \boxed{\text{Quelle}}
 \end{array}$$

Das heißt, bei $c = 1 + \sqrt{6}$ verliert der Periode-2 Orbit durch x_+ und x_- seine Stabilität.

Bemerkung: Was passiert danach?

Man kann zeigen, dass es eine Folge von „Verzweigungspunkten“ c_k gibt mit

$$\boxed{c_0 = 1, c_1 = 3, c_2 = 1 + \sqrt{6}, \dots}$$

so dass:

$$\boxed{\text{Für } c_k < c \leq c_{k+1} \text{ hat die logistische Abbildung einen anziehenden } 2^k\text{-periodischen Orbit, welcher fast alle anderen Orbits anzieht.}} \quad (4.4)$$

Die Folge $(c_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ konvergiert: $c_k \rightarrow c^* \approx 3.56994 \dots$

Außerdem lässt sich zeigen, dass

$$\boxed{\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{c_{k-1} - c_{k-2}}{c_k - c_{k-1}} = 4.669201609 \dots} \quad \text{(Feigenbaum-Konstante)} \quad (4.5)$$

1.5 Unendlich viele periodische Orbits

Bei der logistischen Abbildung ist für $c > c^*$ die Dynamik „kompliziert“.

Dazu ein weiteres Beispiel:

Beispiel 1.5.1 (Zelt–Abbildung; engl. tent map)

$$h(x) := \begin{cases} 2x, & 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 2 - 2x, & \frac{1}{2} < x \leq 1 \end{cases}$$

h hat zwei Fixpunkte $x_0 = 0$ und $x_1 = \frac{2}{3}$.

Periode 2–Punkte: Was ist h^2 ?

$$0 \leq x \leq \frac{1}{4} \implies h(x) \in [0, \frac{1}{2}] \implies h^2(x) = 4x$$

$$\frac{1}{4} \leq x \leq \frac{1}{2} \implies h(x) \in [\frac{1}{2}, 1] \implies h^2(x) = 2 - 4x$$

$$\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{3}{4} \implies h(x) \in [\frac{1}{2}, 1] \implies h^2(x) = 4x - 2$$

$$\frac{3}{4} \leq x \leq 1 \implies h(x) \in [0, \frac{1}{2}] \implies h^2(x) = 4 - 4x$$

Teile $[0, 1]$ in 2^k Teilintervalle

$$I_\ell = I_\ell^{(k)} := \left[\frac{\ell}{2^k}, \frac{\ell+1}{2^k} \right], \quad \ell = 0, \dots, 2^k - 1$$

der Breite 2^{-k} auf, auf welchen der Graph von h^k eine affin lineare Funktion ist (welche die Werte 0 und 1 verbindet).

$$\implies \boxed{h^k(x) = x, \quad x \in [0, 1], \text{ hat } 2^k \text{ Lösungen.}}$$

Allerdings sind das noch lange **keine** Periode– k Orbits (zumindest nicht alle)!

Satz 1.5.2 (Existenz von Periode– k Punkten)

- (i) Für jedes $k \in \mathbb{N}$ hat die Zelt–Abbildung (mindestens) **einen Periode– k Orbit**.
- (ii) Die Menge der periodischen Punkte der Zelt–Abbildung ist dicht in $[0, 1]$.

Bemerkung: Derselbe Satz gilt auch für die spezielle logistische Abbildung $f_4(x) = 4x(1 - x)$, $x \in [0, 1]$, welches „dieselbe Form“ hat.

1.6 Die Sätze von Li–Yorke und Sharkovskii

Die Ergebnisse von *Sektion 1.5* sind sehr speziell (benutzen die spezielle Struktur).

Ziel: Sätze die für große Klassen von Abbildungen gelten.

Satz 1.6.1 (Fixpunktsatz; Existenz eines Fixpunkts)

Sei $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, $M \subset \mathbb{R}$, und sei $I \subset M$ kompaktes Intervall mit

$$\boxed{f(I) \supset I}.$$

Dann hat f einen Fixpunkt in I .

Korollar 1.6.2 Sei $f: M \rightarrow M$ stetig, $M \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, so dass ein Periode-2 Orbit existiert. Dann hat f auch einen Fixpunkt.

Korollar 1.6.3 Sei $f: M \rightarrow M$ stetig, $M \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, so dass ein Periode-3 Orbit existiert. Dann hat f^2 einen Fixpunkt (und damit hat auch f einen Fixpunkt).

Ein Periode-3 Orbit hat aber **viel** mehr Konsequenzen:

Hauptsatz 1.6.4 (Li–Yorke [LY75], 1975)

Sei $M \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f: M \rightarrow M$ stetig.

Falls f einen Periode-3 Orbit hat, dann hat f Periode- k Orbits für **jedes** $k \in \mathbb{N}$.

Originalartikel „Period Three Implies Chaos“

Zum Beweis brauchen wir noch 2 Lemmata.

Lemma 1.6.5 Sei $F: I \rightarrow \mathbb{R}$ stetig mit $I \subset \mathbb{R}$ Intervall.

$I_1 \subset F(I)$ sei ein kompaktes Intervall.

Dann existiert ein kompaktes Intervall $I_0 \subset I$ mit $F(I_0) = I_1$.

Lemma 1.6.6 Sei $F: J \rightarrow J$ stetig mit $J \subset \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, und seien I_0, I_1, \dots, I_n kompakte Intervalle mit

$$I_k \subset J, \quad k = 0, \dots, n \quad \text{und} \quad \boxed{I_{k+1} \subset F(I_k) \quad \text{für} \quad k = 0, \dots, n-1}$$

Dann existieren Mengen Q_0, \dots, Q_n mit

- (1) $Q_{k+1} \subset Q_k \subset I_0$ für $k = 0, \dots, n-1$
- (2) $F^k(Q_k) = I_k$ für $k = 0, \dots, n$
- (3) Q_k ist kompaktes Intervall für $k = 0, \dots, n$.

Zusatz: Für jedes $x \in Q_n = \bigcap_{k=0}^n Q_k$ gilt:

$$\boxed{F^k(x) \in I_k \text{ für alle } k = 0, \dots, n.} \quad (6.1)$$

Der Satz von Li–Yorke hat noch eine wesentliche Verallgemeinerung:
 Ordne dazu die natürlichen Zahlen wie folgt:

Definition 1.6.7 (Sharkovskii Ordnung)

$$\begin{array}{cccccccccc}
 3 & \triangleleft & 5 & \triangleleft & 7 & \triangleleft & 9 & \triangleleft & 11 & \triangleleft & \dots & & & & & & (ungerade\ Zahlen) \\
 \triangleleft & 2 \cdot 3 & \triangleleft & 2 \cdot 5 & \triangleleft & 2 \cdot 7 & \triangleleft & 2 \cdot 9 & \triangleleft & 2 \cdot 11 & \triangleleft & \dots \\
 \triangleleft & 4 \cdot 3 & \triangleleft & 4 \cdot 5 & \triangleleft & 4 \cdot 7 & \triangleleft & 4 \cdot 9 & \triangleleft & 4 \cdot 11 & \triangleleft & \dots \\
 \triangleleft & 8 \cdot 3 & \triangleleft & 8 \cdot 5 & \triangleleft & 8 \cdot 7 & \triangleleft & 8 \cdot 9 & \triangleleft & 8 \cdot 11 & \triangleleft & \dots \\
 & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & & & & \\
 \triangleleft & 2^k \cdot 3 & \triangleleft & 2^k \cdot 5 & \triangleleft & 2^k \cdot 7 & \triangleleft & 2^k \cdot 9 & \triangleleft & 2^k \cdot 11 & \triangleleft & \dots \\
 & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \dots \\
 \triangleleft & \dots & \triangleleft & 2^m & \triangleleft & 2^{m-1} & \triangleleft & \dots & \triangleleft & 8 & \triangleleft & 4 & \triangleleft & 2 & \triangleleft & 1
 \end{array}$$

Damit gilt:

Satz 1.6.8 (Sharkovskii) (1964)

Sei $f: M \rightarrow M$ stetig, $M \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und es existiere ein Periode- n Punkt von f .
 Dann hat für beliebiges $m \triangleright n$ die Abbildung f auch einen Periode- m Punkt.

Beweis: (vgl. Buch [ASY], Seite 135 ff).

1.7 Reiserouten (Itineraries) und dichte Orbits

- wesentliches Hilfsmittel im letzten Paragraph:

Folge von Intervallen I_k mit $f(I_k) \supset I_{k+1}$.

Damit war die Konstruktion eines Orbits mit $f^k(x) \in I_k$ für alle k möglich.

Das ist die Grundidee für sogenannte „Reiserouten“.

Beispiel 1.7.1 (Zelt-Abbildung h)

Setze

$$L := \left[0, \frac{1}{2}\right]$$

$$R := \left[\frac{1}{2}, 1\right]$$

Dann gilt

$$h(L) = [0, 1] = L \cup R$$

$$h(R) = [0, 1] = L \cup R$$

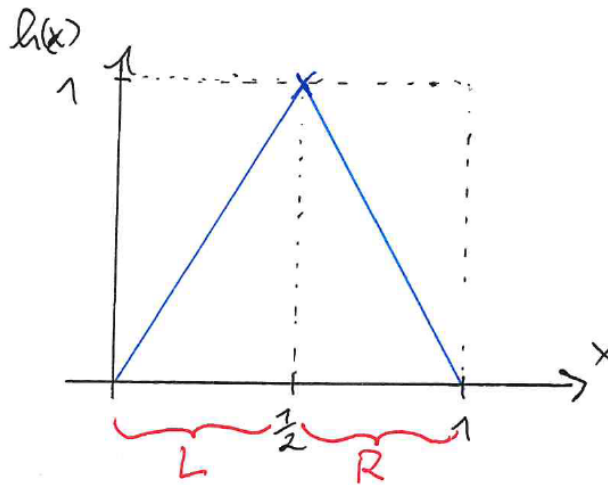


Abbildung 1.1: Zelt-Abbildung

Start in L kann nach L oder R führen; Start in R ebenso.

Definition 1.7.2 (Reiserouten)

Sei $x_0 \in [0, 1]$ beliebiger Anfangswert für die Zelt-Abbildung h mit Orbit $(x_k)_{k=0}^{\infty}$.

Die Reiseroute dieses Orbits ist eine Folge $(S_k)_{k=0}^{\infty}$ von Symbolen L oder R , mit

$$S_k = \begin{cases} L, & \text{wenn } h^k(x_0) \in L \\ R, & \text{wenn } h^k(x_0) \in R \end{cases}$$

Beachte, dass S_k nicht eindeutig ist, falls $f^k(x) = \frac{1}{2}$.

Beispiele: Reiseroute für $x_0 = \frac{2}{5} \in L$: $LR LR LR \dots$

Reiseroute für $x_0 = \frac{2}{9} \in L$: $LLR LLR LLR \dots$

Problem: Lässt sich sagen, welche Teilmenge von $[0, 1]$ auf Reiserouten führt, die mit einer vorgegebenen (endlichen) Symbolsequenz beginnen?

Satz 1.7.3 Sei $I_k \subset [0, 1]$ ein Intervall, welches aus allen Punkten besteht, deren Reiseroute (für die Zelt-Abbildungen h) mit einer (festen) k -Symbolfolge S_0, \dots, S_{k-1} startet (mit $S_i \in \{L, R\}$). Dann gilt:

(i) $|I_k| = 2^{-k}$

(ii) Zu jeder solchen Symbolfolge gibt es genau ein Intervall.

Satz 1.7.4 (Unterteilungsalgorithmus für Zelt-Abbildung):

Sei $I_k = [a, b]$ ein Intervall aus Satz 1.7.3, welches mit der k -Symbolsequenz S_0, \dots, S_{k-1} identifiziert wird. Sei $n := \#R$ in der Sequenz S_0, \dots, S_{k-1} .

(i) Falls n ungerade, dann gilt

$$\begin{aligned} \left[a, \frac{a+b}{2} \right] &\longleftrightarrow S_0, \dots, S_{k-1}, R \\ \left[\frac{a+b}{2}, b \right] &\longleftrightarrow S_0, \dots, S_{k-1}, L, \end{aligned}$$

das heißt, diese Teilintervalle entsprechen den angegebenen Symbolsequenzen.

(ii) Falls n gerade, dann gilt

$$\begin{aligned} \left[a, \frac{a+b}{2} \right] &\longleftrightarrow S_0, \dots, S_{k-1}, L \\ \left[\frac{a+b}{2}, b \right] &\longleftrightarrow S_0, \dots, S_{k-1}, R. \end{aligned}$$

Zu jeder Reiseroute finden wir wenigstens einen Orbit:

Satz 1.7.5 Betrachte die Zelt-Abbildung h und eine beliebige Symbolsequenz $\{S_k\}_{k \in \mathbb{N}_0}$ mit $S_k \in \{L, R\}$. Dann existiert genau ein $x_0 \in [0, 1]$, so dass

$$h^n(x_0) \in S_n \quad \forall n \in \mathbb{N}_0.$$

Definition 1.7.6 (dichte Orbits)

Sei $M \subset \mathbb{R}$ Intervall und $f: M \rightarrow M$ eine Abbildung. Ein Orbit $\{x_n\}_{n=0}^\infty$ von f heißt **dicht**, falls $\forall p \in M \quad \forall \varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}_0$ existiert mit

$$x_{n_0} = f^{n_0}(x_0) \in B_\varepsilon(p).$$

D.h. dichte Orbits kommen jedem Punkt beliebig nahe.

Satz 1.7.7 Die Zelt-Abbildung h hat dichte Orbits.

Zusammenfassung 1.7.8 (Eigenschaften der Zelt-Abbildung h ; vgl. Beispiel 1.7.1)

Die Zelt-Abbildung hat

- periodische Orbits für jede mögliche Periodenlänge (Satz 1.5.2)
- dichte Orbits (Satz 1.7.7)
- Zu jeder Reiseroute existiert ein eindeutiger Orbit mit dieser Reiseroute (Satz 1.7.5)

1.8 Sensitive Abhängigkeit von den Anfangswerten

Beispiel 1.8.1 Am attraktiven Fixpunkt: Sei x_0 mit $f(x_0) = x_0$ und $|f'(x_0)| < 1$. Für $\tilde{x}_0 \neq x_0$, aber nahe bei x_0 , konvergiert der Orbit von \tilde{x}_0 gegen x_0 , d.h., kleine Fehler/Abweichungen im Anfangswert haben **keine** wesentlichen Konsequenzen.

Ähnlich: Logistische Abbildung mit $c < c^*$

(c^* war der Grenzpunkt der Periodenverdopplungen, vgl. (4.4) in *Sektion 1.4*)

Dort gibt es immer einen attraktiven periodischen Orbit!

Beispiel 1.8.2 (Zelt-Abbildung)

- ▷ in jeder Umgebung von $x_0 = 0$ finden wir Punkte, welche nach Iteration nach $\frac{1}{2}$ oder 1 kommen, also weit weg von x_0 .
- ▷ kleine Abweichungen im Anfangswert haben schließlich große Effekte.

Definition 1.8.3 (Sensitive Abhängigkeit vom Anfangswert)

Sei $f: M \rightarrow M$.

- (i) Wir sagen ein Punkt $x_0 \in M$ hat **sensitive Abhängigkeit vom Anfangswert** für f , falls

$$\exists d > 0, \text{ so dass in } \mathbf{jeder} \text{ Umgebung } N \text{ von } x_0 \quad \exists x \in N \quad \exists k \in \mathbb{N} \quad \text{mit} \\ |f^k(x) - f^k(x_0)| \geq d.$$

- (ii) Hat jedes $x_0 \in M$ obige Eigenschaften, dann sagen wir f hat **sensitive Abhängigkeit vom Anfangswert**.

Satz 1.8.4 Die Zelt-Abbildung hat sensitive Abhängigkeit vom Anfangswert.

1.9 Devaneys Definition von Chaos

Ziel: Fixiere was chaotisches (oder kompliziertes und nicht vorhersagbares) Verhalten für Abbildungen bedeuten soll. Dazu brauchen wir noch eine weitere Struktur.

Definition 1.9.1 (topologisch transitiv)

Eine Abbildung $f: M \rightarrow M$ heißt **topologisch transitiv**, falls für alle nichtleeren offenen Mengen $U, V \subset M$ ein $k \in \mathbb{N}$ existiert mit

$$f^k(U) \cap V \neq \emptyset.$$

Damit lässt sich M **nicht** in zwei disjunkte invariante Mengen mit nichtleeren Inneren zerlegen, d.h. $M = M_1 \dot{\cup} M_2$ mit $f(M_i) = M_i$ und $\overset{\circ}{M}_i \neq \emptyset$ ist nicht möglich.

Satz 1.9.2 Sei $f: M \rightarrow M$ eine Abbildung mit $M \subset \mathbb{R}$. Falls f einen dichten Orbit hat, dann ist f topologisch transitiv.

Definition 1.9.3 (Chaos nach Devaney [Dev03])

Sei $f: M \rightarrow M$ eine Abbildung (M metrischer Raum).

Dann heißt f **chaotisch** (im Sinne von Devaney), falls gilt:

- (1) f hat sensitive Abhängigkeit vom Anfangswert
- (2) f ist topologisch transitiv
- (3) periodische Orbits sind dicht in M .

Bemerkungen 1.9.4 Chaotische Abbildungen haben folgende Eigenschaften:

- (1) Unvorhersagbarkeit
- (2) Unzerlegbarkeit
- (3) Periodische Orbits als reguläres Element

Satz 1.9.5 Die Zelt-Abbildung h ist chaotisch.

Satz 1.9.6 Die Abbildung

$$f: [0, 1] \longrightarrow [0, 1]$$

$$f(x) = 2x \text{ mod } 1.$$

ist chaotisch.

1.10 Konjugation von Abbildungen

Ziel: Auch $f(x) = 4x(1-x)$ ist chaotisch; verwende „Ähnlichkeit“ zur Zelt-Abbildung.

Definition 1.10.1 (konjugiert; semikonjugiert)

(a) Seien f und g Abbildungen, $f: M \rightarrow M$, $g: N \rightarrow N$.

Dann heißen f und g **semikonjugiert**, wenn eine stetige, injektive Abbildung $C: M \rightarrow N$ existiert, so dass

$$\boxed{C \circ f = g \circ C \quad \text{auf } M.} \quad (10.1)$$

(b) Ist C zusätzlich surjektiv, dann heißen f und g **konjugiert**

(c) und **topologisch konjugiert**, wenn C^{-1} auch stetig ist (d.h. C ist Homöomorphismus).

Beispiel 1.10.2 Die Zelt-Abbildung

$$h(x) = \begin{cases} 2x, & x \in [0, \frac{1}{2}] \\ 2 - 2x, & x \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases} \quad \text{und } g(x) = 4x(1-x), \quad x \in [0, 1]$$

sind vermöge

$$C(x) := \frac{1 - \cos(\pi x)}{2}, \quad x \in [0, 1] \quad \text{konjugiert.}$$

Satz 1.10.3 Seien $f: M \rightarrow M$, $g: N \rightarrow N$ vermöge $C: M \rightarrow N$ semikonjugiert.

Dann gilt:

(i) C bildet Orbits von f auf Orbits von g ab.

(ii) $C: M \rightarrow C(M) = \text{im}(M)$ ist bijektiv und $C^{-1}: C(M) \rightarrow M$ bildet Orbits von g auf Orbits von f ab. Genauer gilt:

$$y_0 \in C(M) \implies \begin{cases} \text{Zum Orbit } y_{k+1} = g(y_k) \in C(M) \\ \text{ist } C^{-1}(y_k) \text{ ein Orbit von } f \end{cases}$$

(iii) Für jedes $k \in \mathbb{N}$ gilt:

$$f^k = C^{-1} \circ g^k \circ C \quad \text{auf } M, \quad g^k = C \circ f^k \circ C^{-1} \quad \text{auf } C(M)$$

Welche Eigenschaften von Abbildungen bleiben bei Konjugation erhalten?

Gilt etwa „ f chaotisch $\implies g$ chaotisch“?

Lemma 1.10.4 *Seien $f: M \rightarrow M$, $g: N \rightarrow N$ konjugierte Abbildungen. Falls f topologisch transitiv ist, dann ist auch g topologisch transitiv.*

Lemma 1.10.5 *Seien $f: M \rightarrow M$, $g: N \rightarrow N$ konjugierte Abbildungen. Dann gilt:*

- (i) *C bildet Periode- k Punkte von f auf Periode- k Punkte von g ab und umgekehrt.*
- (ii) *Sind die periodischen Punkte von f in M dicht, dann sind die periodischen Punkte von g dicht in N .*

Beispiel 1.10.6 (sensitive Abhängigkeit bleibt bei Konjugation „nicht“ erhalten)

$$\begin{aligned} \text{Sei } M &= (1, \infty), \quad f(x) = 2x && \text{und} \\ N &= (0, \infty), \quad g(x) = x + \ln 2 \end{aligned}$$

Dann sind f und g konjugiert vermöge der Abbildung

$$C: M \rightarrow N, \quad C(x) := \ln x.$$

Problem dabei: f hat sensitive Abhängigkeit von Anfangswerten, aber g nicht.

Satz 1.10.7 (Banks, Brooks, Carus, Davis, Stacey, 1992, [BBC⁺92])

Sei $f: M \rightarrow M$ stetig, M ein metrischer Raum mit unendlich vielen Elementen (d.h. $|M| = \infty$). Falls f topologisch transitiv und falls periodische Orbits dicht liegen, dann hat f auch sensitive Abhängigkeit von den Anfangswerten. D.h. in Definition 1.9.3 von Chaos nach Devaney ist für solche metrische Räume M der Punkt (1) redundant.

Korollar 1.10.8 *Sei $f: M \rightarrow M$, $g: N \rightarrow N$ stetige Abbildungen mit $M, N \subset \mathbb{R}$ Intervalle. Falls f und g konjugiert sind, dann gilt:*

$$f \text{ ist chaotisch (nach Devaney)} \implies g \text{ ist chaotisch (nach Devaney)}$$

Korollar 1.10.9 *Die logistische Abbildung $f(x) = 4x(1 - x)$, $x \in [0, 1]$, ist chaotisch (nach Devaney).*

Tatsächlich lässt sich Satz 1.10.7 für $M \subset \mathbb{R}$ sogar noch toppen:

Satz 1.10.10 (Vellekoop, Berglund, 1994, [VB94])

Sei $f: M \rightarrow M$ stetig, $M \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und f topologisch transitiv.

Dann gilt:

- (i) *Periodische Orbits von f sind dicht in M*
- (ii) *f hat sensitive Abhängigkeit von Anfangswerten*

Folglich ist f chaotisch nach Devaney.

1.11 Lyapunov-Exponenten

Die *Definition 1.9.3* (Chaos nach Devaney) ist ein erster Versuch Chaos zu definieren, hat aber auch gewisse Nachteile (wie die anderen Definitionen auch!)

Beispiel 1.11.1 (gestauchte Zelt-Abbildung):

$$\begin{aligned} \tilde{h}: [0, 1] &\longrightarrow [0, 1] \\ \tilde{h}(x) &:= \begin{cases} 0 & \text{für } x \in [0, \frac{1}{4}] \cup [\frac{3}{4}, 1] \\ 4x - 1 & \text{für } x \in (\frac{1}{4}, \frac{1}{2}] \\ -4x + 3 & \text{für } x \in (\frac{1}{2}, \frac{3}{4}) \end{cases} \end{aligned}$$

\tilde{h} hat keinen dichten Orbit, aber es hat kompliziertes, „chaotisches“ Verhalten.

Weiteres Ziel: „Lyapunov-Exponenten“, welche auf eine neue Definition von Chaos führen.

Definition 1.11.2 (Lyapunov-Nummer und Exponenten)

- (a) Sei $f: I \rightarrow I$ differenzierbar, $I \subset \mathbb{R}$ und $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ Orbit von f .
Falls der Grenzwert

$$L(x_0) := \lim_{n \rightarrow \infty} \left| f'(x_0) \cdot \cdots \cdot f'(x_{n-1}) \right|^{\frac{1}{n}} \quad (11.1)$$

in \mathbb{R} existiert, dann heißt $L(x_0)$ **Lyapunov-Nummer** von $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$.

- (b) Der **Lyapunov-Exponent** $\lambda(x_0)$ ist definiert als

$$\lambda(x_0) := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \ln |f'(x_k)|, \quad (11.2)$$

sofern der Grenzwert existiert.

Bemerkungen 1.11.3 (i) $\lambda(x_0)$ existiert $\iff L(x_0)$ existiert mit $L(x_0) \neq 0$
und $\ln L(x_0) = \lambda(x_0)$

(ii) Lyapunov-Exponenten / Nummern lassen sich **nicht** immer definieren.

(iii) $L(x_0) = L(x_1) = L(x_2) = \cdots$

(iv) Ist p Fixpunkt von f mit $f'(p) \neq 0$, dann ist $\lambda(p) = \ln |f'(p)|$. Damit gilt:

$$\begin{aligned} p &\text{ ist abstoßend (Quelle), falls } \lambda(p) > 0 \\ p &\text{ ist anziehend (Senke), falls } \lambda(p) < 0 \end{aligned} \quad (11.3)$$

(v) Falls $p \in I$ Periode- k Punkt von f ist mit

$$f'(f^i(p)) \neq 0 \quad \forall i = 0, \dots, k-1,$$

dann hat p **Lyapunov-Nummer**

$$L(p) = \left[\prod_{i=0}^{k-1} |f'(f^i(p))| \right]^{\frac{1}{k}} \quad (11.4)$$

und **Lyapunov-Exponent**

$$\lambda(p) = \frac{1}{k} \sum_{i=0}^{k-1} \ln |f'(f^i(p))| \quad (11.5)$$

(vi) Sei jetzt $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ beliebiger Orbit von f , dessen Lyapunov-Nummer $L(x_0)$ existiert. Dann gilt für große k

$$\left| (f^k)'(x_0) \right| = \left| f'(x_{k-1}) \right| \cdot \left| f'(x_{k-2}) \right| \cdots \left| f'(x_0) \right| \approx \left[L(x_0) \right]^k.$$

Mit dem Mittelwertsatz folgt für $L := L(x_0)$

$$\tilde{x}_0 \approx x_0 \implies \left| f^k(\tilde{x}_0) - f^k(x_0) \right| \approx L^k |\tilde{x}_0 - x_0|. \quad (11.6)$$

Bemerkung 1.11.4 Für jeden Orbit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ ($x_n = f^n(x_0)$) beschreibt die Lyapunov-Nummer

$$L(x_0) = e^{\lambda(x_0)}$$

die lokale Streckung der Iterierten, welche nahe bei x_0 starten (vgl. (11.6)).

Beispiel 1.11.5 (Logistische Abbildung)

Mit dem **Matlab Programm** *Lyapunov.m* lassen sich Lyapunov-Exponenten, z.B. für die logistische Abbildung

$$f_c(x) = c \cdot x(1-x), \quad x \in [0, 1],$$

berechnen.

Definition 1.11.6 (asymptotisch periodisch)

Sei $f: M \rightarrow M \subset \mathbb{R}^m$ eine Abbildung. Ein Orbit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ heißt **asymptotisch periodisch**, falls der Orbit gegen einen periodischen Orbit konvergiert, d.h. es existiert ein periodischer Orbit $(y_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ mit $y_0 = y_k = y_{2k} \cdots$ (also Periode $k \geq 1$) und

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n - y_n| = 0. \quad (11.7)$$

Satz 1.11.7 Sei $f: I \rightarrow I$ differenzierbar, $I \subset \mathbb{R}$.

Falls der Orbit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ die Bedingung $f'(x_n) \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ erfüllt und asymptotisch periodisch ist mit Grenzorbit $(y_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$, dann sind deren Lyapunov-Exponenten gleich:

$$\lambda(x_0) = \lambda(y_0)$$

Beweis: [ASY96], S. 108–109

Bemerkung 1.11.8 Der Lyapunov-Exponent ist i.d.R. nicht stetig (dort wo er definiert ist).

1.12 Chaotische Orbits

Für Devaney's Chaos wesentlich:

- sensitive Abhängigkeit vom Anfangswert
- Existenz von dichten Orbits \longleftrightarrow topologische Transitivität (Irregularität).

Beide Konzepte finden sich abgewandelt in:

Definition 1.12.1 (chaotische Orbits, Alligood/Sauer/Yorke [ASY96], S. 110)

Sei $f: I \rightarrow I$, $I \subset \mathbb{R}$ Intervall und sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ ein Orbit von f .

Der Orbit heißt **chaotisch**, falls

- (i) der Orbit ist beschränkt
- (ii) der Orbit ist **nicht** asymptotisch periodisch und
- (iii) der Lyapunov-Exponent erfüllt $\lambda(x_0) > 0$.

Beispiel 1.12.2 (Zelt-Abbildung)

Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ ein dichter Orbit der Zelt-Abbildung.

Dann gilt $x_n \neq \frac{1}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$ und damit $h'(x_n) = \pm 2 \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$, also

$$L(x_0) = 2, \quad \lambda(x_0) = \ln 2 > 0$$

Offenbar ist der dichte Orbit auch **nicht** asymptotisch periodisch.

Folge: Jeder dichte Orbit der Zelt-Abbildung ist chaotisch.

Beispiel 1.12.3 (2x mod 1–Abbildung)

Sei $f(x) = 2x \bmod 1$, $x \in [0, 1]$.

Zu $x \in [0, 1)$ existieren $a_i \in \{0, 1\}$ mit $x = \sum_{k \geq 1} \frac{a_k}{2^k}$ (nicht eindeutig!).

Als **Binardarstellung** von $x = [0, a_1, a_2, a_3, a_4, \dots]_2$ wählen wir diese endlich (falls möglich) und unendlich (falls nötig). Dann hat f auf $[0, 1)$ die Darstellung

$$f(x) = \left([0, a_1, a_2, a_3, a_4, \dots]_2 \right) = [0, a_2, a_3, a_4, \dots]_2. \quad (12.1)$$

Alle Orbits von f , die weder Fixpunkt, periodisch, oder schließlich auf einem Fixpunkt oder periodischen Orbit landen, sind chaotisch.

Beispiel 1.12.4 (Logistische Abbildung $f(x) = 4x(1 - x)$, $x \in [0, 1]$)

Numerik von Beispiel 1.11.5: Scheinbar fast alle Orbits haben Lyapunov–Exponent $\ln 2$.

Genauer lässt sich mit Hilfe der Konjugation zur Zelt–Abbildung h mit $f \circ C = C \circ h$, wobei

$$C(x) = \frac{1 - \cos(\pi x)}{2}, \quad C: [0, 1] \rightarrow [0, 1],$$

folgendes zeigen:

Lemma 1.12.5 Falls

$$\frac{\ln |C'(y_n)|}{n} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty) \quad \text{für } y_n := C^{-1}(x_n) \neq \frac{1}{2},$$

dann hat der Orbit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von f **Lyapunov–Exponent** $\lambda(x_0) = \ln 2$.

Folgerung 1.12.6 Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Orbit von f zu $y_n = C^{-1}(x_n)$ mit y_n Orbit der Zelt–Abbildung h zur Reiseroute $LR LRR LRRR LRRRR LRRRRR LRRRRR L \dots$. Dann ist der Orbit chaotisch, aber **nicht dicht**.

Kapitel 2

Höher dimensionale Abbildungen

Wir betrachten Abbildungen $f: M \rightarrow M$, $M \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$.

Zunächst: Dynamik nahe eines Fixpunkts $p \in M$ ($f(p) = p$).

2.1 Affine Abbildungen

Sei

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ f(x) &= Ax + b \quad \text{mit } A \in \mathbb{R}^{n \times n}, b \in \mathbb{R}^n \\ x &\in M = \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

Lemma 2.1.1 (eindeutiger Fixpunkt)

Falls A keine Eigenwerte $= 1$ hat, dann hat f einen eindeutigen Fixpunkt.

Die Diskussion der affinen Abbildungen vereinfacht sich wesentlich, wenn wir annehmen, dass $f(x) = Ax + b$ (mindestens) einen Fixpunkt p hat.

Lemma 2.1.2 (Konjugation zur linearen Abbildung)

Sei $f(x) = Ax + b$ mit Fixpunkt $p \in \mathbb{R}^n$. Setze $g(x) := Ax$ und $C(x) := x - p$. Dann sind f und g topologisch konjugiert, d.h.

$$\boxed{g \circ C = C \circ f.} \tag{1.1}$$

Es genügt dann also lineare Abbildungen zu studieren.

2.2 Lineare Abbildungen in Normalform oder Standardform

Wir betrachten $f(x) = Ax$, $x \in \mathbb{R}^n$ mit $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ in (reeller) **Jordan–Normalform**:

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{J_1} & & & \\ & \boxed{J_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boxed{J_m} \end{pmatrix} \quad (2.1)$$

mit dazugehöriger Zerlegung $\mathbb{R}^n = U_1 \oplus \cdots \oplus U_m$ mit $U_\ell \subset \mathbb{R}^n$ und

$$\boxed{J_\ell: U_\ell \longrightarrow U_\ell \quad (\text{invariant}),}$$

wobei jedes $J_\ell \in \mathbb{R}^{n_\ell \times n_\ell}$ ($U_\ell \cong \mathbb{R}^{n_\ell}$ mit $n_1 + \cdots + n_m = n$) die Form

$$J_\ell = \begin{pmatrix} \boxed{L_\ell} & Id & & \\ & \boxed{L_\ell} & Id & \\ & & \ddots & Id \\ & & & \boxed{L_\ell} \end{pmatrix}$$

hat mit $L_\ell = (\lambda) \in \mathbb{R}$, $Id = (1)$ oder $L_\ell = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$, $Id = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$.

Die Eigenwerte von A sind die $\lambda \in \mathbb{R}$ bzw. $a \pm bi \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ mit $b \neq 0$.

Lemma 2.2.1 Sei $x \in \mathbb{R}^n$, $x = \sum_{\ell=1}^m y_\ell$ mit

$$y_\ell = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ * \\ * \\ * \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in U_\ell \cong \mathbb{R}^{n_\ell} \subset \mathbb{R}^n.$$

Dann ist

$$\boxed{Ax = J_1 y_1 + \cdots + J_m y_m} \quad (2.2)$$

Beispiel 2.2.2 $A = (\lambda) \in \mathbb{R}^{1 \times 1}$, $x \in \mathbb{R}$ liefert $A^k x = \lambda^k x$.

Beispiel 2.2.3 $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$,

$x \mapsto Ax$ beschreibt eine Drehung.

Beispiel 2.2.4 Sei $\lambda \in \mathbb{R}$, $A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$.

Dann ist für $\lambda \neq 0$

$$A^k = \begin{pmatrix} \lambda^k & k\lambda^{k-1} \\ 0 & \lambda^k \end{pmatrix} = \lambda^k \begin{pmatrix} 1 & \frac{k}{\lambda} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Beispiel 2.2.5

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} = \lambda Id + D, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad D^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad D^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Für $k \geq 2$ gilt:

$$\begin{aligned} A^k &= \binom{k}{0} \lambda^k \cdot D^0 + \binom{k}{1} \lambda^{k-1} D^1 + \binom{k}{2} \lambda^{k-2} D^2 = \\ &= \begin{pmatrix} \lambda^k & k\lambda^{k-1} & \frac{k(k-1)}{2} \lambda^{k-2} \\ 0 & \lambda^k & k\lambda^{k-1} \\ 0 & 0 & \lambda^k \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Beispiel 2.2.6 $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, $a > 1 > b > 0$

Beispiel 2.2.7 $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, $0 < a < b < 1$

Zusammenfassung 2.2.8 \triangleright Die Dynamik von $x_{k+1} = Ax_k$ „zerfällt“ in Dynamik auf invarianten Unterräumen

\triangleright Dynamik in den Unterräumen wird durch $|\lambda|$ bzw. $a^2 + b^2$ (Betrag des Eigenwerts) bestimmt.

2.3 Quellen, Senken und Sattelpunkte

Untersuche: Stabilität des Fixpunkts $p = 0$ von $f(x) = Ax$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, und die Dynamik nahe 0.

Satz 2.3.1 (reelle Jordan Normalform)

Falls $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, dann existiert eine invertierbare Matrix $C \in \mathbb{R}^{n \times n}$, so dass

$$\boxed{J = C^{-1}AC} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

in reeller **Jordan Normalform** ist (vgl. (2.1)).

Korollar 2.3.2 Eine lineare Abbildung $f(x) = Ax$, $x \in \mathbb{R}^n$, und seine reelle Jordan Normalform $J \in \mathbb{R}^{n \times n}$, bzw. $y \mapsto Jy$, $y \in \mathbb{R}^n$, sind vermöge $y \mapsto Cy$ topologisch konjugiert:

$$\boxed{CJ = AC}$$

Wiederholungen: (Sektion 1.3) für p Fixpunkt von f ist p eine

Senke: \exists Umgebung U von p , so dass $\forall x \in U$ gilt: $f^k(x) \rightarrow p$ ($k \rightarrow \infty$)

Quelle: \exists Umgebung U von p , so dass $\forall x \in U \setminus \{p\}$ $\exists k \in \mathbb{N}$: $f^k(x) \notin U$.

Für eindimensionale Abbildungen waren Senken und Quellen „generische“ Fixpunkte. In höheren Dimensionen ist das **falsch**.

Beispiel 2.3.3

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \rightarrow \text{Senke}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \text{Quelle}$$

Was macht $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$?

Definition 2.3.4 (ausgezeichnete invariante Unterräume von $x \mapsto Ax$)

Sei $f(x) = Ax$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Setze

- (a) $U^- := \text{span}\{\text{Eigenvektoren und Hauptvektoren von } A \text{ zu Eigenwerten } \lambda \text{ mit } |\lambda| < 1\}$
(stabiler Unterraum),
- (b) $U^+ := \text{span}\{\text{Eigenvektoren und Hauptvektoren von } A \text{ zu Eigenwerten } \lambda \text{ mit } |\lambda| > 1\}$
(instabiler Unterraum),
- (c) $U^0 := \text{span}\{\text{Eigenvektoren und Hauptvektoren von } A \text{ zu Eigenwerten } \lambda \text{ mit } |\lambda| = 1\}$
(zentraler Unterraum).

Offenbar gilt:

$$\boxed{\mathbb{R}^n = U^- \oplus U^0 \oplus U^+} \quad (3.1)$$

Beobachtung 2.3.5 $U := U^{+/-/0}$ ist invariant: $x \in U \implies f^k(x) \in U \quad \forall k \in \mathbb{N}_0$

Satz 2.3.6 (Stabilität/Instabilität von $p = 0$ für $f(x) = Ax$)

- (i) $x \in U^- \iff f^k(x) \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow \infty) \quad \text{exponentiell}$
- (ii) $x \in U^+ \setminus \{0\} \implies \|f^k(x)\| \rightarrow \infty \quad (k \rightarrow \infty) \quad \text{exponentiell}$

Falls A invertierbar gilt:

- (i)' $x \in U^- \setminus \{0\} \implies \|f^{-k}(x)\| \rightarrow \infty \quad (k \rightarrow \infty) \quad \text{exponentiell}$
- (ii)' $x \in U^+ \iff f^{-k}(x) \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow \infty) \quad \text{exponentiell}$

(iii) Ist $U^0 = \{0\}$ und $U^-, U^+ \neq \{0\}$, sowie A invertierbar, dann gilt:

$$x \notin U^- \cup U^+ \implies \|f^k(x)\| \rightarrow \infty \quad (k \rightarrow \pm\infty) \quad \text{exponentiell}$$

(iv) $p = 0$ ist eine Senke $\iff U^- = \mathbb{R}^n$

(v) $p = 0$ ist eine Quelle $\iff U^+ = \mathbb{R}^n$

In höheren Dimensionen ($n \geq 2$) ist $U^0 = \{0\}$ „generisch“.

Definition 2.3.7 (Sattelpunkt)

Ein Fixpunkt $p \in \mathbb{R}^n$ von $f(x) = Ax + b$ heißt **Sattelpunkt**, falls für die invarianten Unterräume von $x \mapsto Ax$ aus Definition 2.3.4 gilt:

$$\boxed{\begin{array}{l} U^0 = \{0\} \\ U^+ \neq \{0\} \\ U^- \neq \{0\} \end{array}} \quad (\text{Situation von Satz 2.3.6 (iii)})$$

2.4 Nichtlineare Abbildungen und der Satz von Hartman–Grobman

Literatur: Hartman [Har64]

Wie ist die Dynamik nahe eines Fixpunkts $p \in \mathbb{R}^n$ von $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$?

Insbesondere: bestimmte Stabilität von p !

Idee: Nahe p ist

$$f(x) \approx f(p) = p + Df(p) \cdot (x - p) \quad (\text{affin linear})$$

und via $y := x - p$ konjugiert zu

$$Ay := Df(p) \cdot y \quad (\text{linear})$$

Offen: Ist auch f konjugiert zu $Df(p): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ($\cong \mathbb{R}^{n \times n}$)

Definition 2.4.1 (hyperbolischer Fixpunkt)

Sei $f: U \rightarrow U$, $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, eine differenzierbare Abbildung mit Fixpunkt $p \in U$.

Wir nennen p einen **hyperbolischen Fixpunkt**, wenn für alle Eigenwerte λ von $Df(p)$ gilt, dass $|\lambda| \neq 1$ ist.

Satz 2.4.2 (Hartman–Grobman)

Sei $f: M \rightarrow M$, $M \subset \mathbb{R}^n$ offen, eine C^1 -Abbildung mit Fixpunkt $p \in M$, so dass

- $Df(p) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ invertierbar ist und
- p hyperbolischer Fixpunkt von f ist.

Dann existiert eine Umgebung $U = U_p$ von p und ein Homöomorphismus $h: U \rightarrow h(U) \subset \mathbb{R}^n$ (d.h. h ist stetig, bijektiv, h^{-1} stetig) mit $h(p) = 0 \in h(U)$, so dass

$$\boxed{Df(p) = h \circ f \circ h^{-1} \text{ „auf } h(U)\text{“}.} \quad (4.1)$$

Damit sind f und $Df(p) =: L$ lokal bei p topologisch konjugiert.

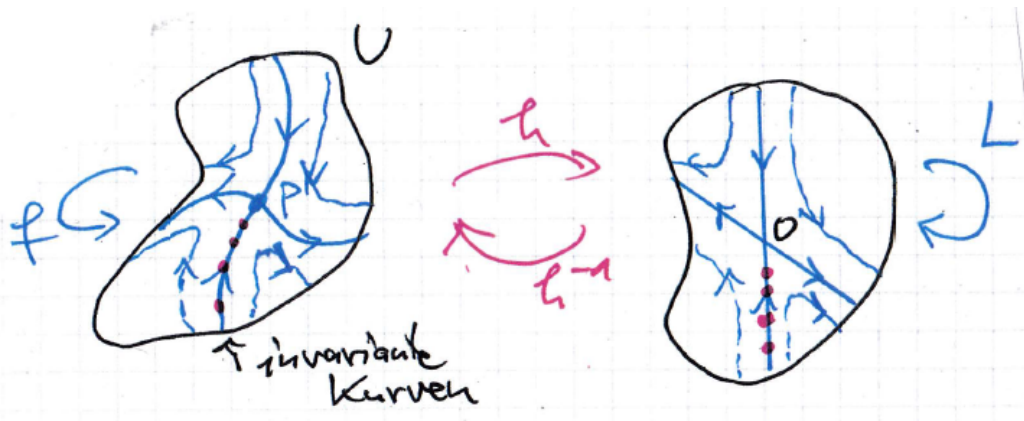


Abbildung 2.1: Situation des Hartman-Grobman am Sattelfixpunkt p von f

Weitere Literatur: [Ama95], [KH95] und [PdM82]

Beispiel 2.4.3 alle ($n = 1$)

(i) Falls $Df(p)$ nicht invertierbar ist, gilt der Satz nicht:

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = x^2, \quad \text{Fixpunkt } p = 0.$$

(ii) $f(x) = 2x(1 - x)$, $p = 0$, $Df(0) = 2$ invertierbar und alle Eigenwerte mit $|\lambda| \neq 1$.

(iii) $f(x) = 4x(1 - x)$, $p = \frac{3}{4}$, $Df(\frac{3}{4}) = -2$.

Bemerkung 2.4.4 Lokale Konjugationen überführen Orbits in Orbits, solange sie in den lokalen Umgebungen bleiben:

verwende $\boxed{f = h^{-1} \circ Df(p) \circ h \text{ auf } U}$

Beispiel 2.4.5 Falls $Df(p)$ nicht hyperbolisch, ist der Satz falsch:

z.B. $f(x) = x \pm x^k$, $k = 2, 3$, $p = 0$ ist **einzig** Fixpunkt.

Korollar 2.4.6 Sei $f: M \rightarrow M \subset \mathbb{R}^n$, \mathcal{C}^1 -Abbildung mit Fixpunkt $p \in \mathbb{R}^n$.

Dann gilt:

- (i) Falls für alle Eigenwerte λ von $Df(p)$ gilt, dass $|\lambda| < 1$, dann ist p eine Senke von f .
- (ii) Falls für alle Eigenwerte λ von $Df(p)$ gilt, dass $|\lambda| > 1$, dann ist p eine Quelle von f .

Beispiel 2.4.7 (Henon–Abbildung)

$$\boxed{f_{a,b}(x, y) := (a - x^2 + by, x)} \quad \text{mit Parametern } a, b \in \mathbb{R}. \quad (4.2)$$

Fixpunkte: $f_{a,b}(x, y) = (x, y)$

$$x_{+,-} = \frac{1}{2} \left(b - 1 \pm \sqrt{(b-1)^2 + 4a} \right), \quad y_{+,-} = x_{+,-} \quad (4.3)$$

Existenz von **zwei Fixpunkten** falls $4a > -(b-1)^2$.

Stabilität der Fixpunkte via Linearisierung:

$$Df_{a,b}(x, y) = \begin{pmatrix} -2x & b \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Bemerkung 2.4.8 Ist der Fixpunkt p **nicht** hyperbolisch, gilt der Satz von Hartman–Grobman in der Regel nicht. Man kann die Abbildung f aber noch „teilweise linearisieren“ (vgl. Sektion 2.6).

Bemerkung 2.4.9 (Stabilität von Periode- k Punkten)

Wie für $n = 1$ ist ein Periode- k Punkt p von $f: M \rightarrow M$, $M \subset \mathbb{R}^n$ eine

- (i) periodische Senke von f , falls p Senke von f^k .
- (ii) periodische Quelle von f , falls p Quelle von f^k .

Die Diskussion der Stabilität führt auf die Eigenwerte der Matrix (Setze $p_0 := p$, $p_i := f^i(p_0)$)

$$Df^k(p_0) = Df(p_{k-1}) \cdot Df(p_{k-2}) \cdots Df(p_1) \cdot Df(p_0) \quad (4.4)$$

Zyklisches Vertauschen der Matrizen auf der **rechten Seite** verändert (nicht beliebiges Vertauschen!) die Eigenwerte **nicht** (vgl. Lemma A.2, S. 558 in [ASY96])

Folge: Eigenwerte von $Df^k(p_0)$ und $Df^k(p_i)$, $i = 1, \dots, k-1$ sind gleich und damit handelt es sich um eine Eigenschaft des periodischen Orbits $\{p_0, p_1, \dots, p_{k-1}\}$.

Beispiel 2.4.10 (Henon–Abbildung; Periode–2 Punkte)

Wieder sei $f_{a,b}(x, y) = (a - x^2 + by, x)$. Periode-2 Punkte lösen $f_{a,b}^2(x, y) = (x, y)$.

Periode-2 Punkte (für $b \neq 1$):

$$\tilde{x}_{1/2} = \frac{1}{2} \left((1-b) \pm \sqrt{(1-b)^2 + 4(a - (1-b)^2)} \right) = \frac{1}{2} \left((1-b) \pm \sqrt{4a - 3(1-b)^2} \right),$$

$$\tilde{y}_{1,2} = \frac{a - \tilde{x}_{1,2}^2}{1-b} \quad \text{existieren für} \quad \boxed{4a > 3(1-b)^2}$$

2.5 Stabile und instabile Mannigfaltigkeit

bisher: Satz von Hartman–Grobman liefert **Info zur Dynamik** nahe am hyperbolischen Fixpunkt.

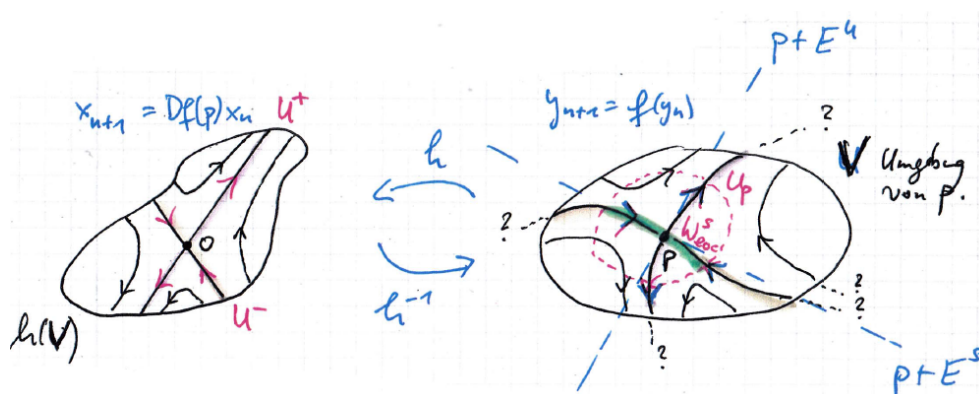


Abbildung 2.2: Situation des Hadamard-Perron am Sattelfixpunkt p von f

Offene Fragen:

- (a) Wie glatt ist $h^{-1}(U^-)$ („lokale stabile Mannigfaltigkeit“) bzw. $h^{-1}(U^+)$ („lokale instabile Mannigfaltigkeit“)?

(b) Lassen sich diese Mannigfaltigkeiten global fortsetzen?

Satz 2.5.1 (Hadamard–Perron)

(a) Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $\varphi: U \rightarrow U$ ein **Diffeomorphismus** und $p \in U$ ein **hyperbolischer Fixpunkt** von φ .

Dann gibt es eine Umgebung $U_p \subset U$ von p , so dass

$$W_{loc}^s(p) = W_{loc}^s := \left\{ x \in U_p : \varphi^m(x) \in U_p, m \in \mathbb{N}, \lim_{m \rightarrow \infty} \varphi^m(x) = p \right\} \quad (5.1)$$

eine \mathcal{C}^1 -Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^n ist, die positiv invariant ist, d.h. $\varphi(W_{loc}^s) \subset W_{loc}^s$.

(b) Des Weiteren hat der **Tangententialraum** an W_{loc}^s im Punkt p die Darstellung

$$T_p(W_{loc}^s) = p + E^s, \quad (5.2)$$

wobei $E^s \subset \mathbb{R}^n$ ein Unterraum ist mit $\dim(E^s) = \dim(U^-)$.

(c) W_{loc}^s ist als Graph über E^s darstellbar, d.h. $\exists g: E^s \rightarrow E^u$ mit $g(0) = 0$, $Dg(0) = 0$ und

$$W_{loc}^s = \left(p + \{s + g(s) : s \in E^s\} \right) \cap U_p.$$

Notation:

- E^s bzw. E^u ist der **stabile** bzw. **instabile Unterraum** von f bei p .
- W_{loc}^s heißt **lokale stabile Mannigfaltigkeit** bei p .

Bemerkung 2.5.2 (a) Wendet man den obigen Satz auf φ^{-1} an, bekommt man die \mathcal{C}^1 -Glattheit der lokalen instabilen Mannigfaltigkeit bei p .

$$W_{loc}^u = W_{loc}^u(p) = \left\{ x \in U_p : \varphi^{-m}(x) \in U_p, m \in \mathbb{N}, \lim_{m \rightarrow \infty} \varphi^{-m}(x) = p \right\} \quad (5.3)$$

mit $T_p(W_{loc}^u) = E^u + p$ und W_{loc}^u ist lokal als Graph über E^u darstellbar.

(b) Ist p Senke, dann ist $W_{loc}^u(p) = \{p\}$; ist p Quelle, dann ist $W_{loc}^s(p) = \{p\}$.

(c) $W_{loc}^{u/s}(p)$ sind so glatt wie φ .

Bemerkung 2.5.3 (Zur Erinnerung)

$M \subset \mathbb{R}^n$ ist k -dimensionale (Unter)mannigfaltigkeit der Klasse \mathcal{C}^α , wenn es zu jedem $x_0 \in M$ eine offene Umgebung $V_2 \subset \mathbb{R}^n$ und eine Abbildung

$$\psi: V_1 \longrightarrow V_2, \quad V_1 \subset \mathbb{R}^k \text{ offen,}$$

gibt mit

- (a) ψ ist injektiv und C^α
- (b) $\text{rang}(D\psi) = k$ auf V_1 (voller Rang!)
- (c) $\psi(V_1) = V_2 \cap M$

Definition 2.5.4 ((globale) stabile/instabile Mannigfaltigkeit)

Sei $f: U \rightarrow U$, $U \subset \mathbb{R}^n$, injektiv und glatt mit Sattelfixpunkt $p = f(p)$ (d.h. keine Eigenwerte $|\lambda| = 1$). Wir setzen

(globale) stabile Mannigfaltigkeit: $W^s = W^s(p) := \{x \in U: f^k(x) \rightarrow p \quad (k \rightarrow \infty)\}$

(globale) instabile Mannigfaltigkeit:

$$W^u = W^u(p) := \left\{ x \in U: f^{-k}(x) \in U \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad \text{und} \quad f^{-k}(x) \rightarrow p \quad (k \rightarrow \infty) \right\}$$

Beispiel 2.5.5 $f(y) = Ay$, $x \in \mathbb{R}^n$ mit Unterräumen U^-, U^+ und $U^0 = \{0\}$ gemäß Definition 2.3.4. Dann ist $W^s(0) = U^-$ und $W^u(0) = U^+$.

Beispiel 2.5.6 $f(x, y) = \left(\frac{x}{2}, 2y - 7x^2\right)$

f ist glatt und invertierbar:

$$f^{-1}(v, w) = \left(2v, 14v^2 + \frac{w}{2}\right) \quad \text{für } (v, w) \in \mathbb{R}^2$$

Stabilität des Fixpunkts $p = (0, 0)$?

$$Df(0, 0) = \left(\begin{array}{cc} \frac{1}{2} & 0 \\ 14x & 2 \end{array} \right) \Big|_{(x,y)=(0,0)} = \left(\begin{array}{cc} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 2 \end{array} \right)$$

p ist Sattelpunkt.

Instabile Mannigfaltigkeit:

$$W^u(0) = \left\{ (0, y) : y \in \mathbb{R} \right\} \tag{5.4}$$

Stabile Mannigfaltigkeit:

$$W^s(0) = \left\{ (x, 4x^2) : x \in \mathbb{R} \right\} =: M \tag{5.5}$$

Definition 2.5.7 (Immersion)

Seien $k, n \in \mathbb{N}$, $k \leq n$, $U \subset \mathbb{R}^n$, $V \subset \mathbb{R}^k$ offen. Eine \mathcal{C}^1 -Abbildung $\psi: V \rightarrow U$ heißt **Immersion**, wenn die lineare Abbildung $D\psi(x): \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ für alle $x \in V$ vollen Rang hat, d.h.

$$\text{rang}\left(\underbrace{D\psi(x)}_{\in \mathbb{R}^{k \times n}}\right) = k \quad \forall x \in V.$$

Notation: $\psi(V)$ heißt **immersierte Mannigfaltigkeit**.

Beispiele 2.5.8 Immersierte Mannigfaltigkeit sind im Allgemeinen **keine** Mannigfaltigkeit im Sinne von Bemerkung 2.5.3.

Satz 2.5.9 (globale stabile Mannigfaltigkeit)

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $\varphi: U \rightarrow U$ ein Diffeomorphismus.

Zu jedem hyperbolischen Fixpunkt $p \in U$ von φ gibt es ein $k \leq n$ und eine injektive Immersion $\psi: \mathbb{R}^k \rightarrow U$ mit

(a) $\psi(0) = p,$

(b) $\psi(\mathbb{R}^k) = \left\{ x \in U: \lim_{m \rightarrow \infty} \varphi^m(x) = p \right\} = W^s(p),$

(c) $T_p\left(\psi(\mathbb{R}^k)\right) = p + E^s \quad \text{und} \quad \dim(E^s) = k.$

D.h. die globale stabile Mannigfaltigkeit von p ist eine k -dimensionale immersierte Mannigfaltigkeit mit $k = n - \text{MorseIndex}(p)$ im \mathbb{R}^n (**doppelpunktfrei**), aber eben im Allgemeinen **keine** Mannigfaltigkeit im Sinne von Bemerkung 2.5.3.

Bemerkungen 2.5.10 (a) Ersetzt man φ durch φ^{-1} ist auch die globale instabile Mannigfaltigkeit

$$W^u(p) = \left\{ x \in U: \lim_{m \rightarrow \infty} \varphi^{-m}(x) = p \right\}$$

eine immersierte Mannigfaltigkeit im \mathbb{R}^n mit Dimension = MorseIndex (p)

(b) Die lokalen invarianten Mannigfaltigkeiten sind natürlich enthalten:

$$W_{loc}^u(p) \subset W^u(p), \quad W_{loc}^s(p) \subset W^s(p) \tag{5.6}$$

und es gilt:

$$\begin{aligned} W^u(p) &= \bigcup_{n>0} \varphi^n(W_{loc}^u(p)) \\ W^s(p) &= \bigcup_{n>0} \varphi^{-n}(W_{loc}^s(p)), \end{aligned} \tag{5.7}$$

d.h. die globalen invarianten Mannigfaltigkeiten erhält man durch Iteration der lokalen invarianten Mannigfaltigkeiten.

(c) Nach Definition:

$$p \neq q \quad \text{hyperbolische Fixpunkte} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} W^s(p) \cap W^s(q) = \emptyset \\ W^u(p) \cap W^u(q) = \emptyset \end{cases}$$

Beispiel 2.5.11 ([ASY96], S. 404)

$$f(r, \Theta) = (r^2, \Theta - \sin \Theta) \quad (\text{Polar - Koordinaten})$$

Fixpunkte:

$$p_0 := (r = 0, \Theta \text{ beliebig}) \quad (\text{Senke})$$

$$(r, \Theta) = (1, 0) =: p_1 \quad (\text{Sattel}) \quad \text{und} \quad p_2 := (1, \pi) \quad (\text{Quelle})$$

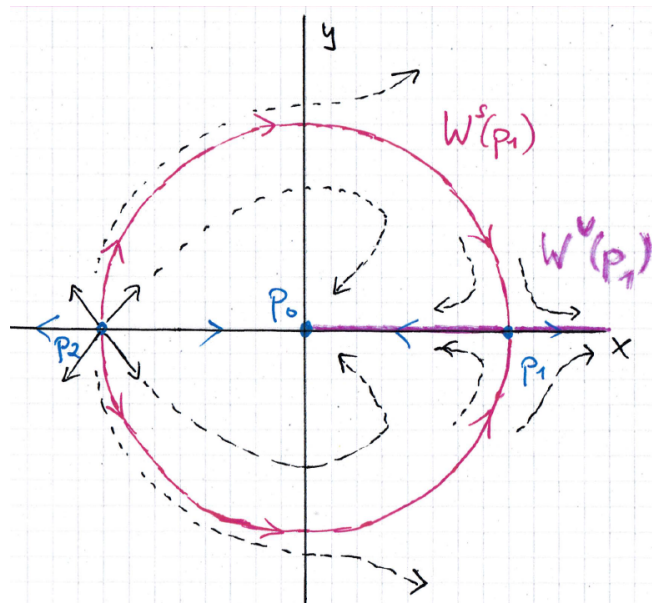


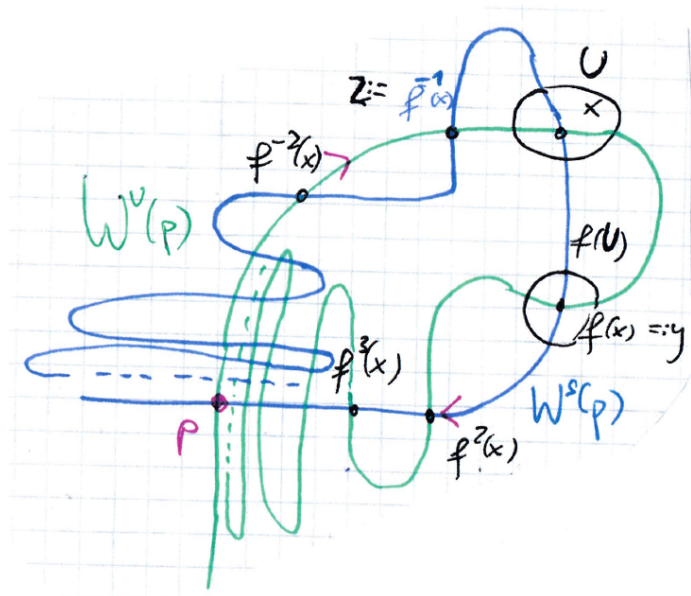
Abbildung 2.3: Drei Fixpunkte von f samt invariantem Einheitskreis

Definition 2.5.12 Sei $f: U \rightarrow U$, $U \subset \mathbb{R}^n$, invertierbar mit hyperbolischem Fixpunkt $p = f(p)$. Ein Punkt $x \neq p$ mit der Eigenschaft

$$\lim_{k \rightarrow \pm\infty} f^k(x) = p$$

heißt **homokliner Punkt** für p .

Bemerkung: Jeder Punkt $x \in W^s(p) \cap W^u(p)$ ist homokliner Punkt.
Homokline Punkte können zu Chaos führen.

Abbildung 2.4: Sattelfixpunkt p von f mit „homoclinic tangle“

2.6 Zentrumsmannigfaltigkeit und Teillinearisation

Sowohl für Hartman–Grobman, als auch für Hadamard–Perron ist es wesentlich, dass der betrachtete Fixpunkt hyperbolisch ist. Man kann o.B.d.A folgende Situation annehmen:
 $f: M \rightarrow \mathbb{R}^n$, mit $0 \in M \subset \mathbb{R}^n$ und

$$f(x) = Ax + g(x), \quad x \in M \quad (6.1)$$

wobei

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{A^-} & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{A^0} & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{A^+} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad g(0) = 0, \quad Dg(0) = 0 \quad (6.2)$$

und $\mathbb{R}^n = X^- \oplus X^0 \oplus X^+ = \mathbb{R}^{n^-} \times \mathbb{R}^{n^0} \times \mathbb{R}^{n^+}$; $X^{-/0/+}$ seien die **verallgemeinerten Eigenräume** von A zu Eigenwerten λ mit $|\lambda| < 1$, $|\lambda| = 1$ und $|\lambda| > 1$.

Der allgemeine Fall wird darauf reduziert:

Lemma 2.6.1 Sei $h: \underbrace{U(p)}_{\substack{\text{Umgebung} \\ \text{von } p}} \rightarrow \mathbb{R}^n$, mit $U(p) \subset \mathbb{R}^n$, \mathcal{C}^1 -Abbildung mit Fixpunkt $p = h(p)$.

Sei $B := Dh(p) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und $A := T^{-1}BT \in \mathbb{R}^{n \times n}$ seine (reelle) **Jordansche Normalform**. Setzen wir $C(x) := T^{-1}(x - p)$ und $C^{-1}(x) = p + Tx$, dann sind h und f aus (6.1) und (6.2) topologisch konjugiert vermöge C .

Auch nahe eines **nichthyperbolischen Fixpunkts** existieren stabile/instabile Mannigfaltigkeiten. Es entsteht aber eine neue invariante Mannigfaltigkeit:

Satz 2.6.2 (Zentrumsmannigfaltigkeit)

Sei $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ glatter \mathcal{C}^∞ -Diffeomorphismus der Form (6.1) und (6.2) und sei $m \in \mathbb{N}$ fest. Dann existieren Umgebungen $U_m^- \subset \mathbb{R}^n \cong X^- \subset \mathbb{R}^n$, $U_m^0 \subset \mathbb{R}^n \cong X^0 \subset \mathbb{R}^n$ und $U_m^+ \subset \mathbb{R}^n \cong X^+ \subset \mathbb{R}^n$ der 0 und \mathcal{C}^m -Funktionen

$$\begin{aligned} s: U_m^- &\longrightarrow U_m^0 \times U_m^+ && \text{„stabile Mannigfaltigkeit“} \\ c: U_m^0 &\longrightarrow U_m^- \times U_m^+ && \text{„Zentrumsmannigfaltigkeit“} \\ u: U_m^+ &\longrightarrow U_m^- \times U_m^0 && \text{„instabile Mannigfaltigkeit“,} \end{aligned} \quad (6.3)$$

so dass ihre **Graphen** \mathcal{S}, \mathcal{C} und \mathcal{U} ,

$$\text{z.B. } \mathcal{S} = \left\{ (x^-, x^0, x^+) : x^0 = s^0(x^-), x^+ = s^+(x^-) \right\}, \text{ wobei } s = (s^0, s^+),$$

folgende Eigenschaften haben:

- (a) $(0, 0, 0) \in \mathcal{S}, \mathcal{C}, \mathcal{U}$ und die Graphen $\mathcal{S}, \mathcal{C}, \mathcal{U}$ sind jeweils **tangential** an X^-, X^0, X^+ bei 0.
- (b) $\mathcal{S}, \mathcal{C}, \mathcal{U}$ sind **lokal invariant** bezüglich der Dynamik $x_{k+1} = f(x_k)$.
- (c) Falls für $x \in U_m := U_m^- \times U_m^0 \times U_m^+$ gilt, dass $x \in \mathcal{S}$, dann folgt $f^k(x) \rightarrow 0$ ($k \rightarrow \infty$).
- (d) Falls für $x \in U_m$ gilt, dass $x \in \mathcal{U}$, dann folgt $f^{-k}(x) \rightarrow 0$ ($k \rightarrow \infty$).
- (e) Ist $x \in U_m$, so dass $f^k(x) \in U_m \quad \forall k \in \mathbb{Z}$, dann ist $x \in \mathcal{C}$.

Bemerkung 2.6.3 Es gibt noch zwei weitere **lokal invariante** (für $x_{n+1} = f(x_n)$) Mannigfaltigkeiten, die Graphen sind von

$$\begin{aligned} sc: U_m^- \times U_m^0 &\longrightarrow U_m^+ && \text{(center-stable manifold } \mathcal{S}^c) \\ uc: U_m^0 \times U_m^+ &\longrightarrow U_m^- && \text{(center-unstable manifold } \mathcal{U}^c) \end{aligned}$$

Eigenschaften:

- (a)' $(0, 0, 0) \in \mathcal{S}^c, \mathcal{U}^c$ und die Graphen \mathcal{S}^c und \mathcal{U}^c sind jeweils **tangential** an $X^- \oplus X^0$ und $X^0 \oplus X^+$ bei 0.
- (b)' $\mathcal{S} \cup \mathcal{C} \subset \mathcal{S}^c, \mathcal{U} \cup \mathcal{C} \subset \mathcal{U}^c$
- (c)' Gilt für $x \in U_m$, dass $f^k(x) \rightarrow 0$ ($k \rightarrow \infty$), dann folgt $x \in \mathcal{S}^c$.
- (d)' Gilt für $x \in U_m$, dass $f^{-k}(x) \rightarrow 0$ ($k \rightarrow \infty$), dann folgt $x \in \mathcal{U}^c$.
- (e)' $\boxed{\mathcal{S}^c \cap \mathcal{U}^c = \mathcal{C}}$

Des Weiteren gilt:

Satz 2.6.4 (verallgemeinerter Hartman–Grobman)

In der Situation von Satz 2.6.2 existiert ein **Homöomorphismus** $h: U \rightarrow h(U)$ für eine offene Menge U mit $0 \in U$, $h(0) = 0$, so dass

Falls $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ bzw. $(x_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ Orbit von f in U (oder auch nur ein Teil davon), dann ist $(h(x_k))_{k \in \mathbb{N}}$ bzw. $(h(x_k))_{k \in \mathbb{Z}}$ ein Orbit der Abbildung

$$\psi(x) := Ax + \begin{pmatrix} 0 \\ g^0(c^-(x^0), x^0, c^+(x^0)) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (6.4)$$

und umgekehrt. Hier ist

$$x = x^- + x^0 + x^+ \quad \text{und} \quad c = (c^-, c^+) \quad \text{bzw.} \quad g = (g^-, g^0, g^+).$$

Bemerkung: Die neue Abbildung ist teilweise **linear** und **entkoppelt**:

$$\begin{pmatrix} x^- \\ x^0 \\ x^+ \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} A^- x^- \\ A^0 x^0 + g^0(x^0 + c(x^0)) \\ A^+ x^+ \end{pmatrix}, \quad (6.5)$$

wobei $x^0 + c(x^0) = (c^-(x^0), x^0, c^+(x^0))$ identifiziert wird.

Satz 2.6.5 Die Funktion

$$\begin{aligned} c = (c^-, c^+) : U_m^0 &\longrightarrow U_m^- \times U_m^+ \\ x^0 &\longmapsto (c^-(x^0), c^+(x^0)), \end{aligned}$$

welche die **Zentrumsmannigfaltigkeit** beschreibt, erfüllt folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned} A^-c^-(x^0) + g^-(x^0 + c(x^0)) &= c^-\left(A^0x^0 + g^0(x^0 + c(x^0))\right) \\ A^+c^+(x^0) + g^+(x^0 + c(x^0)) &= c^+\left(A^0x^0 + g^0(x^0 + c(x^0))\right) \end{aligned} \quad (6.6)$$

Damit lassen sich **nichthyperbolische Fixpunkte** analysieren (genaue Dynamik auf der Zentrumsmannigfaltigkeit ist interessant).

Beispiel 2.6.6

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ f(x) &= (\alpha x - y^2, y + xy) \end{aligned}$$

mit Parameter $\alpha > 0$, wobei $\alpha \neq 1$. $p = (0, 0)$ ist Fixpunkt und

$$Df(x, y) = \begin{pmatrix} \alpha & -2y \\ y & 1+x \end{pmatrix} \implies Df(0, 0) = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = A.$$

D.h. es existiert eine instabile ($\alpha > 1$) bzw. stabile ($0 < \alpha < 1$)

Mannigfaltigkeit und eine **Zentrumsmannigfaltigkeit**.

Behauptung: Die Zentrumsmannigfaltigkeit ist **Graph** einer Funktion der Form $x = c(y)$, für welche gilt

$$\alpha \cdot c(y) - y^2 = c(y + y \cdot c(y)). \quad (6.7)$$

Man berechnet

$$c(y) = \frac{1}{\alpha-1} y^2 + o(y^3). \quad (6.8)$$

Dies sagt aber noch **nichts** über die Dynamik auf \mathcal{C} aus!

nur klar: \mathcal{C} ist lokal invariant.

Die verallgemeinerte Satz von Hartman–Grobman liefert, dass f lokal konjugiert zur Abbildung (die Parabeln von \mathcal{C} werden gerade gebogen) ψ ist:

$$\psi \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x \\ y + g^0(y + c(y)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x \\ y + y \cdot c(y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x \\ y + \frac{1}{\alpha-1} y^3 + o(y^4) \end{pmatrix}, \quad (6.9)$$

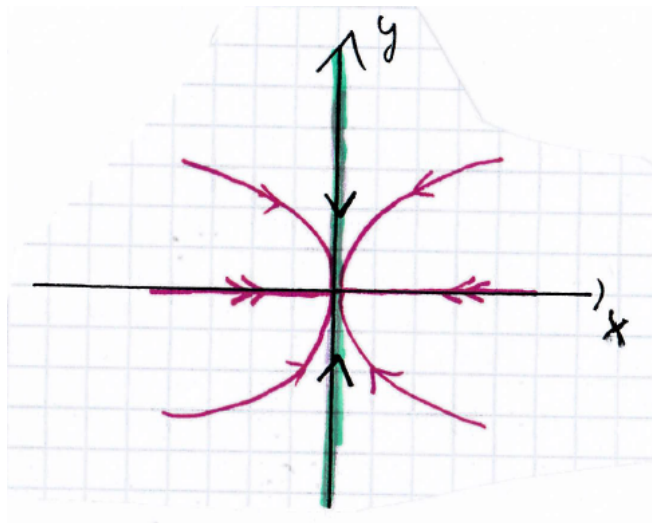


Abbildung 2.5: Dynamik von ψ nahe $p = (0, 0)$ für $\alpha \in (0, 1)$.

wobei wieder $y + c(y) = (c(y), y)$ identifiziert wird.

Dabei ist $p = (0, 0)$ Fixpunkt von ψ , welcher für (festes) $\alpha \in (0, 1)$ eine Senke (vgl. Abbildung 2.5) und für $\alpha > 1$ eine Quelle von ψ ist.

2.7 Berechnung von instabilen Mengen und globalen Attraktoren

Literatur: Dellnitz & Hohmann [DH97]

Beschränkte invariante Mengen eines dynamischen Systems sind Teil eines **globalen Attraktors**, welchen wir hier untersuchen und danach effektiv berechnen wollen.

Sei im Folgenden

$$X \subset \mathbb{R}^n \text{ mit Metrik } d \text{ und } f: X \rightarrow X \text{ ein Diffeomorphismus,} \quad (7.1)$$

sowie $x_{k+1} = f(x_k)$, für $x_0 \in X$, die Orbits der Iteration von f .

Beispiel 2.7.1 (Henon–Abbildung)

$f_{a,b}(x, y) = (a - x^2 + by, x)$, $(x, y) \in X = \mathbb{R}^2$ ist für $b \neq 0$ ein Diffeomorphismus mit

$$f_{a,b}^{-1}(v, w) = \left(w, \frac{1}{b}(v - a + w^2) \right), \quad (v, w) \in \mathbb{R}^2.$$

Definition 2.7.2 (stabile / instabile Mengen)

Eine Menge $M \subset X$ heißt **invariant**, wenn $f(M) = M$. Die Mengen

$$V^s(M) := \left\{ x \in X : \underbrace{\text{dist}\left(f^k(x), f^k(M)\right)}_{=M} \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty \right\}$$

$$V^u(M) := \left\{ x \in X : \text{dist}\left(f^k(x), f^k(M)\right) \rightarrow 0, \quad k \rightarrow -\infty \right\}$$

heißten die **stabile und instabile Menge** von M . Hierbei ist $\text{dist}(y, M) := \inf_{z \in M} d(y, z)$.

Definition 2.7.3 (attraktive Mengen)

- (a) Eine invariante Menge $A \subset X$ heißt **attraktiv** mit **Fundamentalumgebung** U (U offen mit $A \subset U \subset X$),

$$\forall \text{ offenen } V \supset A \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \text{so dass } f^k(U) \subset V \quad \forall k \geq N. \quad (7.2)$$

- (b) Die Menge

$$\text{Bas}(A) = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} f^{-k}(U) \quad (7.3)$$

heißt „**basin of attraction**“ (Becken der Anziehung) von A .

- (c) Falls $\text{Bas}(A) = X$ und zusätzlich A kompakte Menge ist, dann heißt A der **globale Attraktor** (für die von f erzeugte Dynamik).

Bemerkung 2.7.4 (a) Der Begriff „globaler Attraktor“ wird in der Literatur leider nicht einheitlich gebraucht.

- (b) Globale Attraktoren sind von großem Interesse für die Langzeitdynamik, weil sie alle Orbits anziehen. Insbesondere existiert für alle $\varepsilon > 0$ ein $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, so dass

$$f^k(U) \subset A_\varepsilon := \{x \in X : \text{dist}(x, A) < \varepsilon\} \quad \forall k \geq N(\varepsilon). \quad (7.4)$$

Des Weiteren existiert für jedes $x \in X = \text{Bas}(A)$ ein $k_0 = k_0(x)$, so dass

$$f^{k+k_0}(x) \in A_\varepsilon \quad \forall k \geq N(\varepsilon). \quad (7.5)$$

- (c) Falls M invariant ist und sein Abschluss ganz in X liegt ($\overline{M} \subset X$), dann ist \overline{M} auch invariant, weil f und f^{-1} stetig sind. Falls also A in Definition 2.7.3 zusätzlich **abgeschlossen** ist, dann gilt:

$$A = \bigcap_{k \geq 0} f^k(U). \quad (7.6)$$

- (d) Die Mengen $f^{-k}(U)$ in (7.3) sind offen, da $f^k: X \rightarrow X$ Diffeomorphismus. Damit ist $\text{Bas}(A)$ offen und im Falle eines globalen Attraktors ist auch X offen.

Sei also im Folgenden immer A der globale Attraktor.

Lemma 2.7.5 (a) Der globale Attraktor $A \subset X$ zieht alle beschränkten Mengen $B \subset X$ mit $\overline{B} \subset X$ in folgendem Sinne an:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{x \in B} \text{dist}(f^k(x), A) \longrightarrow 0 \quad (7.7)$$

- (b) Der globale Attraktor enthält alle **beschränkten invarianten** Mengen B mit $\overline{B} \subset X$.
(c) Der globale Attraktor ist eindeutig.

Definition 2.7.6 Sei $Q \subset X$ kompakte Menge. Die Menge

$$A_Q := \bigcap_{k \geq 0} f^k(Q) \quad (7.8)$$

heißt **globaler Attraktor relativ zu Q** .

Bemerkung 2.7.7 (a) A_Q ist kompakt.

- (b) Jede invariante Menge $B \subset Q$ ist enthalten in A_Q .
(c) Es gilt $A_Q \subset f(A_Q)$, aber i.d.R. $f(A_Q) \not\subset A_Q$.

Weitere Eigenschaften von A_Q :

Lemma 2.7.8 (a) $A_Q = \{x \in Q: f^{-k}(x) \in Q \text{ für alle } k \in \mathbb{N}\}$.

- (b) $A_Q \subset A$.
(c) Gilt zusätzlich $A \subset Q$, dann ist $A_Q = A$.
(d) A_Q enthält Teile der instabilen Menge (vgl. Definition 2.7.2) von invarianten Teilmengen von Q .

Definition 2.7.9 (Subdivisions-Algorithmus; Dellnitz, Hohmann [DH97])

Input: $Q \subset X \subset \mathbb{R}^n$ mit Q kompakt; $f: X \rightarrow X$ Diffeomorphismus.

Output: Folge $\mathcal{B}_0, \mathcal{B}_1, \dots$. Jedes \mathcal{B}_k , $k \geq 0$, enthält eine Sammlung von endlich vielen kompakten Teilmengen von Q , welche wie folgt konstruiert werden: $\mathcal{B}_0 := \{Q\}$. Ist die Sammlung \mathcal{B}_{k-1} bereits konstruiert, erhält man \mathcal{B}_k in zwei Schritten:

1. Subdivision: konstruiere zunächst eine Sammlung $\widehat{\mathcal{B}}_k$, so dass

$$\bigcup_{B \in \widehat{\mathcal{B}}_k} B = \bigcup_{B \in \mathcal{B}_{k-1}} B \quad \text{und} \quad \text{diam}(\widehat{\mathcal{B}}_k) \leq \Theta \cdot \text{diam}(\mathcal{B}_{k-1})$$

für ein $\Theta \in (\Theta_{\min}, \Theta_{\max})$ mit $0 < \Theta_{\min} < \Theta_{\max} < 1$.

2. Selektion: Setze

$$\mathcal{B}_k := \left\{ B \in \widehat{\mathcal{B}}_k : f(B') \cap B \neq \emptyset \quad \text{für ein} \quad B' \in \widehat{\mathcal{B}}_k \right\}.$$

Konvergenz des Subdivisions-Algorithmus

Sei

$$Q_k := \bigcup_{B \in \mathcal{B}_k} B \subset Q. \tag{7.9}$$

Dann gilt nach Konstruktion $Q_{k+1} \subset Q_k$. Wir setzen $Q_\infty := \bigcap_{k \geq 0} Q_k$.

Satz 2.7.10 (Konvergenz; Dellnitz, Hohmann [DH97])

Die mit dem Subdivisions-Algorithmus konstruierten Mengen Q_k konvergieren zum globalen Attraktor A_Q relativ zu Q in **Hausdorff-Distanz** für $k \rightarrow \infty$, d.h.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} h(Q_k, A_Q) = 0, \tag{7.10}$$

$$\text{wobei } h(M_1, M_2) := \max \left\{ \sup_{x \in M_1} \text{dist}(x, M_2), \sup_{y \in M_2} \text{dist}(y, M_1) \right\}.$$

Dies ist äquivalent mit der Aussage, dass

$$Q_\infty = A_Q. \tag{7.11}$$

Beweis: Der Beweis wird in mehreren Lemmata erbracht:

Lemma 1: $A_Q \subset Q_k$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$.

Lemma 2: Sei $B \subset Q$ negativ invariant, also $f^{-1}(B) \subset B$, bzw. $B \subset f(B)$.
Dann ist B im globalen Attraktor A_Q relativ zu Q enthalten.

Lemma 3: $Q_\infty \subset f(Q_\infty)$

Damit folgt unmittelbar (7.11), denn mit Lemma 1 ist $A_Q \subset Q_\infty$ und aus Lemma 2 und Lemma 3 folgt sofort $Q_\infty \subset A_Q$. □

Bemerkung 2.7.11 (a) *Durch geschickte Wahl von Q lassen sich manchmal invariante Teilmengen des globalen Attraktors separat approximieren.*

(b) *Der Subdivisions-Algorithmus braucht $f: X \rightarrow X$ Diffeomorphismus nicht. Tatsächlich genügt für die Anwendung, dass $f: X \rightarrow X$ stetig und injektiv.*

(c) *Eine weitere Anwendung ist die Visualisierung von kontinuierlichen dynamischen Systemen (mit $f = \text{time-}t\text{-map}$ des Flusses).*

Implementierung des Subdivisions-Algorithmus: GAIO

Matlab-Erweiterung zum herunterladen: <https://github.com/gaio/gaioguy/GAIO>

Bemerkung 2.7.12 (a) *Der Divisions-Schritt wird in GAIO über Bisektion durchgeführt (jeweils in einer Koordinate pro Schritt werden die Quader halbiert).*

(b) *Im Selektions-Schritt ist zu prüfen, ob zu*

$$B \in \widehat{\mathcal{B}}_k \quad \text{ein} \quad B' \in \widehat{\mathcal{B}}_k \quad \text{existiert mit} \quad f(B') \cap B \neq \emptyset, \quad (7.12)$$

damit B in \mathcal{B}_k übernommen wird. Dieser Schritt wird nur diskret „umgesetzt“. Dazu werden auf den Kanten der B' -Quader endlich viele Testpunkte $TP(B')$ eingeführt und (7.12) wird ersetzt durch die Abfrage

$$\text{existiert } B' \in \widehat{\mathcal{B}}_k \quad \text{und ein } z \in TP(B') \quad \text{mit} \quad f(z) \in B? \quad (7.13)$$

Beispiele: (Henon-Abbildung (vgl. Beispiel 2.4.7))

1. Approximation von A_Q mit \mathcal{B}_{12} in Abbildung 2.6

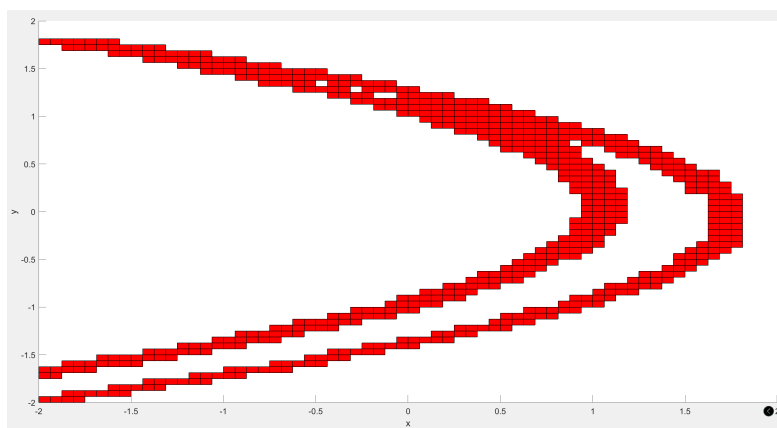
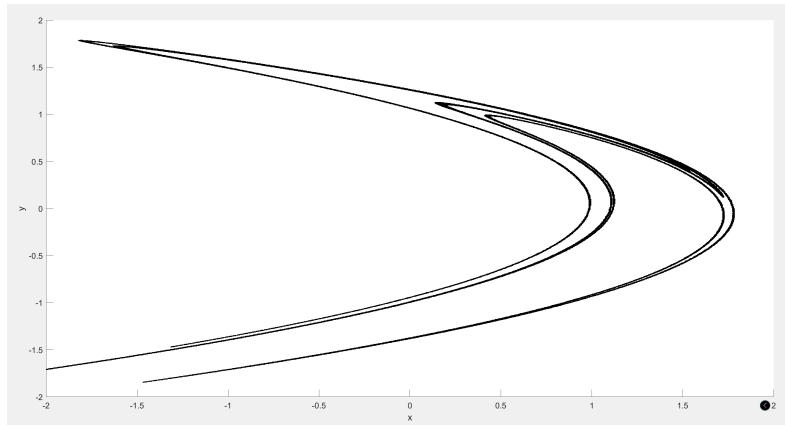


Abbildung 2.6: Startbox $Q = [-2, 2]^2$

und deutlich feinere **2. Approximation** mit \mathcal{B}_{20} in Abbildung 2.7.

Abbildung 2.7: Startbox $Q = [-2, 2]^2$

2.8 Weitere Themen und Zusammenhang zu kontinuierlichen dynamischen Systemen

- Lyapunov-Exponenten für Abbildungen $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$
 - ▷ ein Orbit bekommt n Lyapunov-Exponenten (sofern sie existieren)
 - ≐ Expansions- und Kontraktionsraten (in verschiedenen Richtungen)
- Chaotische Orbits werden ähnlich wie in *Sektion 1.12* definiert, falls
 - ▷ Orbit beschränkt und **nicht** asymptotisch periodisch ist
 - ▷ und des Weiteren der maximale Lyapunov-Exponent positiv ist.
- Konzept der **horseshoe Abbildung** $h: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, so dass ein Quadrat $Q = ABCD$ gemäß Abbildung 2.8 abgebildet wird.

Ziel: Studiere Dynamik von h auf

$$H := \{x \in Q: h^k(x) \in Q \quad \forall k \in \mathbb{Z}\}$$

- Definiere Reiserouten $(S_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ mit $S_i \in \{L, R\}$.
- Jede Reiseroute entspricht einem Punkt aus H .
- Dynamik von h auf H ist chaotisch (im Sinne von Devaney), weil konjugiert zur Shift-Dynamik auf zwei Symbolen $\{L, R\}$.

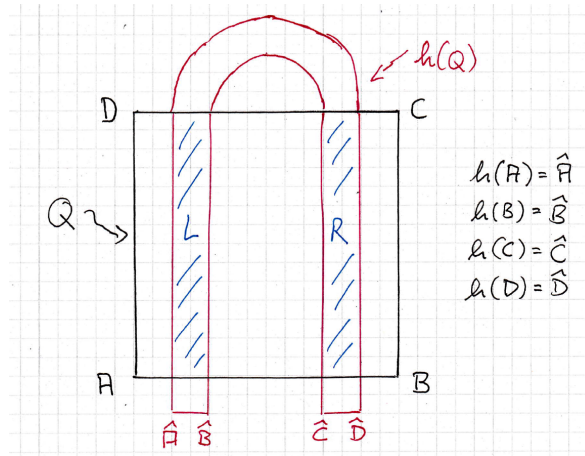


Abbildung 2.8: horseshoe Abbildung

- Chaotisches Verhalten bei **kontinuierlichen dynamischen Systemen** wird praktisch immer bei davon abgeleiteten Abbildungen nachgewiesen (z.B. Time-one-map oder Poincaré-Abbildung eines periodischen Orbits).
- Homoklines Gewirr tritt auch bei kontinuierlichen dynamischen Systemen auf (ähnlich Ende *Sektion 2.5*)
 - ▷ in dieser Situation lassen sich horseshoe Abbildungen auf invarianten Teilmengen finden \rightarrow chaotisches Verhalten.

Teil II

Kontinuierliche Dynamische Systeme

Kapitel 3

Reminiszenzen zu gewöhnlichen Differentialgleichungen

Themen:

- Invariante Mengen
- Limesmengen und Attraktoren
- Poincaré–Bendixon Theorie
- Höherdimensionale dynamische Systeme
- Gradientensysteme
- Topologische Methoden

Das Standardbeispiel eines kontinuierlichen dynamischen Systems ist der Fluss einer autonomen gewöhnlichen Differentialgleichung. Deshalb

3.1 Autonome gewöhnliche Differentialgleichungen und dynamische Systeme

Aus der Theorie für gewöhnliche Differentialgleichungen ist bekannt:

Sei $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit $D_f \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen und f hinreichend glatt (z.B. \mathcal{C}^1). Zu $(\tau, \xi) \in D_f$ sucht man Lösungen $x = x(t) \in \mathbb{R}^n$ der gewöhnlichen Differentialgleichung

$$(AWP) \quad x' = f(t, x) \text{ mit Anfangswert } x(\tau) = \xi.$$

Wir bezeichnen die allgemeine Lösung $x = \lambda(t; \tau, \xi)$, $\lambda: D_\lambda \rightarrow \mathbb{R}^n$.

(Existenz und Eindeigkeitssatz mit maximalem Definitionsintervall $t \in I_{\max}(\tau, \xi)$
 \longleftrightarrow Picard–Lindelöf)

Lemma 3.1.1 (Kozykel–Eigenschaft)

Für $\tau \in \mathbb{R}$ und $\xi \in \mathbb{R}^n$ mit $(\tau, \xi) \in D_f$ gilt:

$$\lambda(t; \tau, \xi) = \lambda(t; s, \lambda(s; \tau, \xi)) \quad \text{für alle } t \in I_{\max}(\tau, \xi), s \in I_{\max}(\tau, \xi)$$

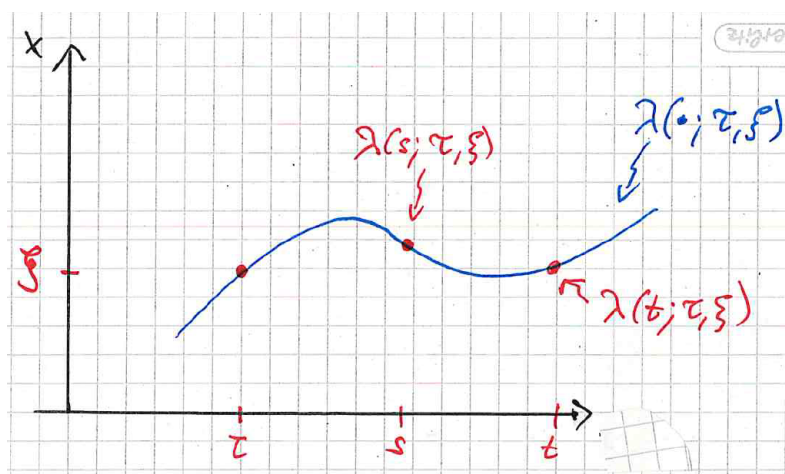


Abbildung 3.1: Kozykel–Eigenschaft

Im Folgenden betrachten wir **autonome** Differentialgleichungen:

$$\boxed{x' = f(x)} \tag{1.1}$$

für $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}^n$ (lokal) Lipschitz–stetig mit $D_f \subset \mathbb{R}^n$ offen .

In diesem Fall lässt sich *Lemma 3.1.1* verbessern:

Lemma 3.1.2 (Translationsinvarianz für autonome Differentialgleichungen)

Sei $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}^n$ Lipschitz–stetig mit $D_f \subset \mathbb{R}^n$ und $x_0 \in D_f$ beliebig.

Dann unterscheiden sich maximale Lösungen von

$$x' = f(x), \quad x(t_0) = x_0 \tag{1.2}$$

nur durch einen Zeitshift. D.h. für alle $t_0 \in \mathbb{R}$ gilt.

(a) $I_{\max}(t_0, x_0) = I_{\max}(0, x_0) + t_0$

(b) $\lambda(t; t_0, x_0) = \lambda(t - t_0; 0, x_0)$ für alle $t \in I_{\max}(t_0, x_0)$

3.1. AUTONOME GEWÖHNLICHE DIFFERENTIALGLEICHUNGEN UND DYNAMISCHE SYSTEME

Lemma 3.1.3 (Gruppeneigenschaft)

Sei $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}^n$ Lipschitz-stetig und λ die allgemeine Lösung von $x' = f(x)$.
Setze für $x \in D_f$

$$\varphi(t, x) := \lambda(t; 0, x), \quad t \in I_{\max}(0, x). \quad (1.3)$$

Dann gilt:

- (a) $\varphi(0, x) = x$ für alle $x \in D_f$
- (b) $\varphi(t + s, x) = \varphi(t, \varphi(s, x))$ für alle $s \in I_{\max}(0, x), t \in I_{\max}(0, \varphi(s, x))$

Definition 3.1.4 (kontinuierliches dynamisches System)

Sei M ein topologischer Raum und $\varphi: \mathbb{R} \times M \rightarrow M$ sei stetig. Dann heißt (M, φ) ein **kontinuierliches dynamisches System**, falls gilt:

<ul style="list-style-type: none"> (i) $\varphi(0, x) = x$ für alle $x \in M$ (ii) $\varphi(t + s, x) = \varphi(t, \varphi(s, x))$ für alle $t, s \in \mathbb{R}, x \in M$ 	(1.4)
--	-------

M heißt **Phasenraum** und φ der **Phasenfluss**. Für jedes $x \in M$ heißen die Mengen

$$\begin{aligned} \gamma^+(x) &:= \{\varphi(t, x), t \geq 0\} && \text{der Vorwärtsorbit durch } x, \\ \gamma^-(x) &:= \{\varphi(t, x), t \leq 0\} && \text{der Rückwärtsorbit durch } x, \\ \gamma(x) &:= \{\varphi(t, x), t \in \mathbb{R}\} && \text{der Orbit durch } x. \end{aligned}$$

Die Abbildungen $\psi = \varphi(t_0, \cdot): M \rightarrow M$ sind Homöomorphismen mit $\psi^{-1} = \varphi(-t_0, \cdot)$.

Beispiel: $M = \mathbb{R}^2, \varphi(t, x_1, x_2) = (x_1 e^t, x_2 e^{-t})$

Satz 3.1.5 („dynamische Systeme \longleftrightarrow autonome gewöhnliche Differentialgleichungen“)

- (a) Sei $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}^n$ Lipschitz-stetig mit $D_f \subset \mathbb{R}^n$ offen. Falls für alle Lösungen von $x' = f(x)$ das maximale Existenzintervall $I_{\max}(t_0, x_0) = \mathbb{R}$ ist für alle $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times D_f$, dann erzeugt $\varphi(t, x) := \lambda(t; 0, x)$ ein dynamisches System auf $M = D_f$.

(b) Die Abbildung $\varphi: \mathbb{R} \times M \rightarrow M$, $M \subset \mathbb{R}^n$ offen, erzeuge ein kontinuierliches dynamisches System (M, φ) und φ sei \mathcal{C}^2 . Setze dann

$$f(x) := \frac{\partial \varphi}{\partial t}(0, x), \quad x \in M =: D_f. \quad (1.5)$$

Dann gilt: $\varphi(t, x) = \lambda(t; 0, x)$, wobei λ die allgemeine Lösung von $x' = f(x)$ ist. f heißt dann **infinitesimaler Erzeuger von φ** .

Satz 3.1.6 (Klassifikation von Orbits)

Sei (φ, M) ein kontinuierliches dynamisches System. Dann gilt für jedes $x \in M$ genau eine der drei folgenden Aussagen:

- (a) $\varphi(\cdot, x)$ ist konstant und $\gamma(x) = \{x\}$.
- (b) $\varphi(\cdot, x)$ ist injektiv (in t), und $\gamma(x)$ ist eine Kurve in M ohne Schnitt- oder Berührungspunkte.
- (c) $\varphi(\cdot, x)$ ist nicht konstant und periodisch (in t). $\gamma(x)$ ist eine geschlossene Kurve in M .

Bemerkung: Ist $M \subset \mathbb{R}$ so treten nur Orbits aus (a) oder (b) auf.

Definition 3.1.7 (invariante Mengen)

Sei (φ, M) ein kontinuierliches dynamisches System. Eine Teilmenge $S \subset M$ heißt **invariant** bzgl. des Flusses φ , falls $\varphi(t, S) \subset S \quad \forall t \in \mathbb{R}$, und **positiv (negativ) invariant** bzgl. des Flusses φ , falls $\varphi(t, S) \subset S \quad \forall t \geq 0$ ($\forall t \leq 0$) gilt.

Beispiel 3.1.8 Betrachte:

$$x' = f(x) \quad \text{mit} \quad f(x) = \begin{pmatrix} -x_1 \\ x_2 + x_1^2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2, \quad x = (x_1, x_2)^\top \quad \text{und} \quad x(0) = c = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2.$$

Der davon erzeugte Fluss ist

$$\varphi(t, c) = \begin{pmatrix} c_1 e^{-t} \\ c_2 e^t + \frac{c_1^2}{3} (e^t - e^{-2t}) \end{pmatrix}.$$

Dann gilt:

$$S := \left\{ x \in \mathbb{R}^2 : x_2 = \frac{-x_1^2}{3} \right\} \quad \text{ist invariant unter } \varphi.$$

3.2 Reskalierung von Vektorfeldern

Ziel: Bedingungen, so dass Lösungen von $x' = f(x)$ für alle Zeiten existieren
 → dynamisches System!

Beispiel 1: $x' = x^2$ (mit Anfangswert $x(t_0) = x_0$)

Beispiel 2: $x' = \frac{x^2}{1+x^2}$

Beispiel 3: $x' = -y + x(1 - x^2 - y^2)$
 $y' = x + y(1 - x^2 - y^2)$

Satz 3.2.1 (Reskalierung von Vektorfeldern)

Sei $D_f \subset \mathbb{R}^n$ offen und sowohl $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}^n$, als auch $\beta: D_f \rightarrow \mathbb{R}^+$ seien Lipschitz-stetig.
 Dann gilt: Die **Phasenportraits** der beiden Systeme

$$x' = f(x) \tag{2.1}$$

und

$$x' = \beta(x) \cdot f(x) \tag{2.2}$$

sind gleich.

Genauer: Falls $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ ein Orbit von (2.1) ist, dann ist Γ auch ein Orbit von (2.2), und umgekehrt.

Korollar 3.2.2 Sei $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ Lipschitz-stetig. Dann stimmen die **Phasenportraits** von

$$x' = f(x) \tag{2.3}$$

und

$$x' = \frac{f(x)}{1 + |f(x)|^2} \tag{2.4}$$

überein, und (2.4) erzeugt ein dynamisches System.

Kapitel 4

Globale Theorie nichtlinearer Systeme

4.1 Limesmengen und Attraktoren

Ziel: Beschreibe das **asymptotische Verhalten** der Orbits des von

$$x' = f(x), \quad x \in D_f =: M \subset \mathbb{R}^n \quad (1.1)$$

erzeugten kontinuierlichen dynamischen Systems (φ, M) aus *Satz 3.1.5*.

- Grenzmengen der Orbits (ω/α -Limesmengen)
- Struktur (Topologie) dieser Grenzmengen?
- Dynamische Eigenschaften dieser Grenzmengen.

Im Folgenden wollen wir immer annehmen, dass (M, d) bzgl. der natürlichen Metrik $d(x, y) = \|x - y\|$ des \mathbb{R}^n vollständig ist.

Zur Erinnerung: $\varphi_t: M \rightarrow M$ bzw. $\varphi: \mathbb{R} \times M \rightarrow M$; wie immer sei $\varphi_t(\xi) = \varphi(t; \xi)$ die Lösung von (1.1) zum Startwert $x(0) = \xi$.

Dann definieren wir die ω/α -Limesmenge von $\xi \in M \subset \mathbb{R}^n$:

$$\omega(\xi) := \left\{ x \in M : \exists \text{ Folge } (t_k)_{k \in \mathbb{N}} \nearrow \infty \text{ mit } \varphi_{t_k}(\xi) \rightarrow x \quad (k \rightarrow \infty) \right\} \quad (1.2)$$

und analog: $\alpha(\xi) := \left\{ x \in M : \exists \text{ Folge } (t_k)_{k \in \mathbb{N}} \searrow -\infty \text{ mit } \varphi_{t_k}(\xi) \rightarrow x \quad (k \rightarrow \infty) \right\} \quad (1.3)$

Satz 4.1.1 (Charakterisierung von α - und ω -Limesmengen)

Sei (M, d) vollständig, $\xi \in M \subset \mathbb{R}^n$, und $\varphi: \mathbb{R} \times M \rightarrow M$ ein kontinuierliches dynamisches System. Dann gilt:

$$\omega(\xi) = \bigcap_{t \geq 0} \overline{\varphi([t, \infty), \xi)}$$

$$\alpha(\xi) = \bigcap_{t \leq 0} \overline{\varphi((-\infty, t], \xi)}$$

ω -Limesmenge: Punkte bei denen der Orbit $\varphi_{\bullet}(\xi)$ für große t immer wieder beliebig nahe vorbeikommt.

Bemerkung: Die α -Limesmenge $\alpha(\xi)$ zu $x' = f(x)$ ist **gleich** der ω -Limesmenge $\omega(\xi)$ zu $x' = -f(x)$.

Satz 4.1.2 (Invarianz von ω -Limesmengen)

ω -Limesmengen, also $\omega(\xi)$, sind **invariante Mengen** für das dynamische System. Analog für $\alpha(\xi)$!

Satz 4.1.3 (Topologische Eigenschaften)

Sei (M, d) vollständiger metrischer Raum und (M, φ) kontinuierliches dynamisches System. Zu $\xi \in M$, sei der positive Halborbit $\gamma^+(\xi) = \varphi([0, \infty), \xi)$ **beschränkt**. Dann gilt: $\omega(\xi)$ ist

- (i) **nicht leer**
- (ii) **kompakt**
- (iii) **und zusammenhängend.**

Außerdem gilt: (iv) $\lim_{t \rightarrow \infty} \text{dist}(\varphi(t, \xi), \omega(\xi)) = 0$.

Analoges gilt für $\alpha(\xi)$, (negativer Halborbit $\gamma^-(\xi)$ beschränkt; $t \rightarrow -\infty$ in (iv)).

Bemerkung: Unbeschränkte ω -Limesmengen können unzusammenhängend sein.

Definition 4.1.4 (attraktive Mengen)

- (a) Eine invariante Menge $A \subset M$ heißt **attraktiv** mit **Fundamentalumgebung** U (U offen mit $A \subset U \subset M$), falls

$$\forall \text{ offenen } V \supset A \quad \exists T \in \mathbb{R}^+, \text{ so dass } \varphi_t(U) \subset V \quad \forall t \geq T. \quad (1.4)$$

(b) Die Menge

$$\text{Bas}(A) = \bigcup_{t \geq 0} \varphi_{-t}(U) \quad (1.5)$$

heißt „basin of attraction“ (Becken der Anziehung) von A .

(c) Falls $\text{Bas}(A) = M$ und zusätzlich A kompakte Menge ist, dann heißt A der **globale Attraktor** (für die von φ erzeugte Dynamik).

Bemerkung 4.1.5 Da $\varphi_t: M \rightarrow M$ für alle $t \in \mathbb{R}$ Diffeomorphismus ist, ist $\varphi_{-t}(U)$ und damit auch $\text{Bas}(A)$ in (1.5) offen. Zusammen mit der Annahme (M, d) vollständig bleibt im Falle eines globalen Attraktors (also $\text{Bas}(A) = M$) damit nur noch $M = \mathbb{R}^n$.

Lemma 4.1.6 Sei (φ, \mathbb{R}^n) ein kontinuierliches dynamisches System.

(a) Der globale Attraktor $A \subset \mathbb{R}^n$ zieht alle beschränkten Mengen $B \subset \mathbb{R}^n$ in folgendem Sinne an:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sup_{x \in B} \text{dist}(\varphi_t(x), A) \rightarrow 0 \quad (1.6)$$

(b) Der globale Attraktor enthält alle **beschränkten invarianten** Mengen B .

(c) Der globale Attraktor ist eindeutig.

Bemerkung 4.1.7 Die in Lemma 2.7.5 nötige Zusatzbedingungen „ $\overline{B} \subset X$ “ ist hier offenbar **nicht** nötig.

4.2 Poincaré–Bendixson Theorie

Literatur: z.B. Hirsch, Smale, *Kapitel 11*, [HS74] oder Alligood, Sauer, Yorke, *Kapitel 8*, [ASY96], bzw. Grüne, Junge [GJ16], *Sektion 9.3*.

In diesem Paragraphen studieren wir nur **planare**, also 2–dimensionale Systeme:

$$\boxed{\begin{array}{l} x' = f(x, y) \\ y' = g(x, y) \end{array}} \iff z' = F(z) \quad \text{für} \quad \begin{array}{l} z = (x, y) \in U \\ F = (f, g) \end{array} \quad (2.1)$$

wobei $f, g: U \rightarrow \mathbb{R}$ (mit $U \subset \mathbb{R}^2$ offen) jeweils C^1 –Funktionen sind. („ C^1 –planare dynamische Systeme“).

Die allgemeine Lösung sei wieder $\varphi_t(x, y) = \varphi(t; x, y) = \varphi(t; z) = \varphi_t(z)$ und $\varphi: \mathbb{R} \times U \rightarrow U$ kontinuierliches dynamisches System. Grund für die Einschränkung auf Flüsse im \mathbb{R}^2 ist folgender Satz:

Satz 4.2.1 (Jordanischer Kurvensatz) (1893)

Sei $J := \{\gamma(s) \in \mathbb{R}^2 : s \in [\alpha, \beta]\}$ eine **Jordan-Kurve** im \mathbb{R}^2
 (d.h. $\gamma: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^2$ stetig, injektiv auf $[\alpha, \beta)$ und geschlossen $\gamma(\alpha) = \gamma(\beta)$).

Dann gilt: J zerlegt \mathbb{R}^2 in zwei Gebiete (Außengebiet G_a und Innengebiet G_i). Genauer:

- $\mathbb{R}^2 \setminus J = G_a \dot{\cup} G_i$
- $\partial G_i = J = \partial G_a$
- G_i ist beschränkt und einfach zusammenhängend („keine Löcher!“).
- G_a ist unbeschränkt und **nicht** einfach zusammenhängend.

Wir verwenden **transversale Schnitte**:

Definition 4.2.2 (Poincaré-Schnitt $\Sigma \subset \mathbb{R}^2$)

- Σ sei nichttrivialer Schnitt einer Geraden mit einer offenen, konvexen Menge des \mathbb{R}^2 .
- Σ sei transversal an den Fluss zu (2.1), d.h.

$$\boxed{\nu \cdot F(z) \neq 0 \quad \text{für alle } z \in \Sigma,} \quad (2.2)$$

wobei $\nu \in \mathbb{R}^2$ der Normalenvektor zu Σ ist.

Bemerkung 4.2.3 (a) Falls Σ transversaler Schnitt für (2.1), dann enthält Σ kein Gleichgewicht und die Vektoren $F(z)$, $z \in \Sigma$ zeigen alle in denselben Halbraum.

(b) Zu jedem regulären Punkt $z_0 \in U \subset \mathbb{R}^2$ (d.h. mit $F(z_0) \neq 0$), existiert ein transversaler Schnitt Σ für (2.1) mit $z_0 \in \Sigma$.

Satz 4.2.4 (Monotonie-Lemma)

Sei Σ transversaler Schnitt für (2.1) und $\mu(\cdot)$ sei eine Lösung von (2.1), welche Σ in der (endlichen oder unendlichen) Folge

$$\mu(t_1), \mu(t_2), \dots, \mu(t_k), \dots \quad \text{mit } t_1 < t_2 < \dots < t_k < \dots$$

schneidet. Dann gilt: Die Folge $(\mu(t_k))_k$ wächst längs Σ bezüglich der linearen Ordnung auf Σ monoton.

Korollar 4.2.5 Sei $z_0 \in U \subset \mathbb{R}^2$ und Σ ein transversaler Schnitt für (2.1).

Dann gilt: $\omega(z_0) \cap \Sigma$ enthält **höchstens einen Punkt**.

Situation (S_{z_0}):

Betrachte (2.1) $z' = F(z)$, $z \in \mathbb{R}^2$ und positive Halborbits $\gamma^+(z_0) \subset K$ für $z_0 \in \mathbb{R}^2$ fest.

Annahme 4.2.6 In Situation (S_{z_0}) sei K **kompakt** und enthält nur **endlich** viele Gleichgewichte von (2.1).

Satz 4.2.7 (Poincaré–Bendixson)

Unter der Annahme 4.2.6 gilt genau eine der folgenden Aussagen:

- (a) $\omega(z_0)$ besteht aus (genau) einem Gleichgewicht.
- (b) $\omega(z_0)$ besteht aus (genau) einem periodischen Orbit.
- (c) $\omega(z_0)$ besteht aus Gleichgewichten und nichtperiodischen Orbits, deren α - und ω -Limesmengen diese Gleichgewichte sind.

Eine analoge Aussage gilt für $\alpha(z_0)$.

Korollar 4.2.8 Ist $\omega(z_0) \neq \emptyset$ kompakt und **ohne** Gleichgewichte, dann muss $\omega(z_0)$ ein periodischer Orbit sein.

Zum Beweis von Satz 4.2.7 brauchen wir folgendes Lemma:

Lemma 4.2.9 Unter der Annahme 4.2.6 gilt:

Falls $\Gamma \subset \omega(z_0)$ für einen periodischen Orbit Γ , dann gilt $\Gamma = \omega(z_0)$ („has one, is one“).

Beweis von Satz 4.2.7: Wir unterscheiden **3** Fälle:

Fall (I): $\omega(z_0)$ enthält **nur Gleichgewichte**.

Fall (II): $\omega(z_0)$ enthält **kein Gleichgewicht**.

Fall (III): $\omega(z_0)$ enthält **sowohl Gleichgewichte**, als auch **reguläre Punkte** (d.h. $z \in \omega(z_0)$ mit $F(z) \neq 0$).

Bemerkung 4.2.10 Die Annahme, dass K nur **endlich** viele Gleichgewichte enthält, ist wesentlich: betrachte dazu für $0 < r_0 < 1$ fest

$$\boxed{\begin{aligned} r' &= (1-r)^3 & (r > r_0) \\ \varphi' &= (1-r)^2 \end{aligned}} \quad (2.3)$$

Notation: Periodische Orbits Γ , welche als Grenzmengen auftreten, d.h. $\exists z_0 \in \mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$ mit $\Gamma = \alpha(z_0)$ oder $\Gamma = \omega(z_0)$ nennen wir **Grenzyklen** (limit cycles).

Anwendung von Poincaré–Bendixson: Existenz von periodischen Orbits

Beispiel 4.2.11 *Betrachte*

$$\begin{aligned}y' &= y(x^2 + y^2 - 2x - 3) + x \\x' &= x(x^2 + y^2 - 2x - 3) - y\end{aligned}\tag{2.4}$$

Beispiel 4.2.12 (van der Pol Oszillator)

Betrachte

$$x'' + \varepsilon x'(x^2 - 1) + x = 0, \quad \varepsilon > 0 \text{ beliebig.}\tag{2.5}$$

Dies ist (nach Transformation) äquivalent zu

$$\begin{pmatrix} x' \\ u' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u - \varepsilon \left(\frac{x^3}{3} - x \right) \\ -x \end{pmatrix} =: H(x, u).\tag{2.6}$$

Folgerungen aus Poincaré–Bendixson

Satz 4.2.13 (Grenzyklen haben eine offene „Attraktionsmenge“)

*Sei Γ periodischer Orbit von $z' = F(z)$ in (2.1) und $\Gamma = \omega(z_0)$ für ein $z_0 \in \mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$. (d.h. Γ ist **Grenzyklus**). Dann existiert eine Umgebung $V \subset \mathbb{R}^2$ von z_0 , so dass*

$$\boxed{\omega(z) = \Gamma \text{ für alle } z \in V} \quad \text{gilt.}$$

Insbesondere ist $\{z \in \mathbb{R}^2 \setminus \Gamma : \omega(z) = \Gamma\}$ offen.

Bemerkung 4.2.14 (Spiral–Eigenschaft von Grenzyklus Γ)

Damit wurde gezeigt (vgl. Abbildung 4.1): Seien $I_i \subset \mathbb{R}^2$, $i \in \mathbb{N}$ die offenen Intervalle in Σ (transversaler Schnitt durch Γ) zwischen dem Orbit zu z_0 . Dann gilt:

(i) *Der Fluss bildet $I_1 \subset \Sigma$ bijektiv und monoton nach $I_2 \subset \Sigma$ ab, I_2 bijektiv und monoton nach I_3 , usw.*

(ii) *Zu $z \in I_1$ gilt: Jeder Halborbit $\gamma^+(z)$ schneidet Σ in jedem I_i genau einmal in Punkten*

$$z_i = \varphi(t_i, z) \in I_i \quad \text{mit} \quad 0 < t_i < t_{i+1} \quad \text{und} \quad z_i \longrightarrow z^* \quad (i \rightarrow \infty) \quad \text{mit} \quad z^* \in \Gamma \cap \Sigma.$$

Satz 4.2.15 *Sei $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ geschlossener (periodischer) Orbit von $z' = F(z)$, $z \in U \subset \mathbb{R}^2$ in (2.1) und $G_i \subset U$ das Innengebiet von Γ . Dann gilt: G_i enthält wenigstens ein Gleichgewicht von (2.1).*

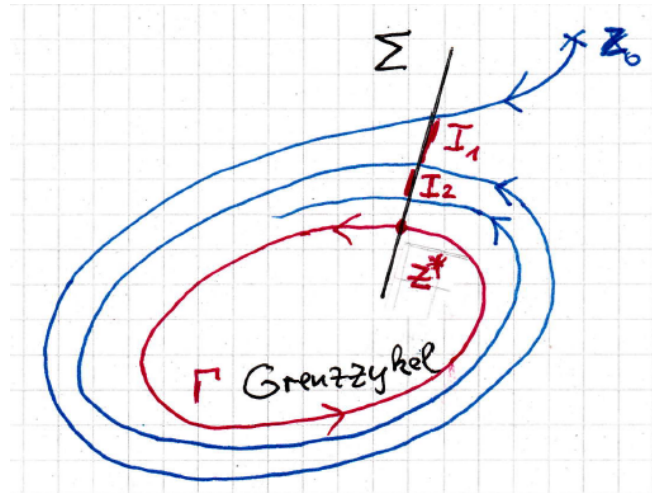


Abbildung 4.1: Spiral-Eigenschaft von Grenzzyklus

Mit Poincaré-Bendixson lassen sich periodische Orbits nachweisen. Mit dem folgenden Bendixson-Kriterium lassen sich periodische Orbits ausschließen. Wir betrachten Lösungen von (2.1)

$$\begin{aligned}x' &= f(x, y), & (x, y) &\in D \subset \mathbb{R}^2 \\y' &= g(x, y), & F = (f, g): D &\longrightarrow \mathbb{R}^2\end{aligned}$$

Satz 4.2.16 (Bendixson-Kriterium)

Sei $D \subset \mathbb{R}^2$ einfach zusammenhängendes Gebiet und $F: D \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine C^1 -Funktion mit

- (i) $\operatorname{div}(F) = \partial_x f + \partial_y g \geq 0$ in D
- (ii) $\operatorname{div}(F)(x_0, y_0) > 0$ für wenigstens ein $(x_0, y_0) \in D$

Dann hat (2.1) keinen periodischen Orbit $\Gamma \subset D$ mit $(x_0, y_0) \in G_i(\Gamma)$.

Beispiel 4.2.17 (gedämpfter Oszillator)

$$x'' + p(x)x' + q(x) = 0 \quad \text{mit } p \text{ und } q \text{ jeweils } C^1 \text{ und } p(x) > 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad (2.7)$$

Vorgriff auf höherdimensionale Dynamik, Kapitel 5 (Chaos): Poincaré-Bendixson ist **falsch** im \mathbb{R}^n für $n \geq 3$!

Beispiel 4.2.18 (dichter Orbit auf Torus)

mit $\omega(x_0, y_0) = \text{Torus}$

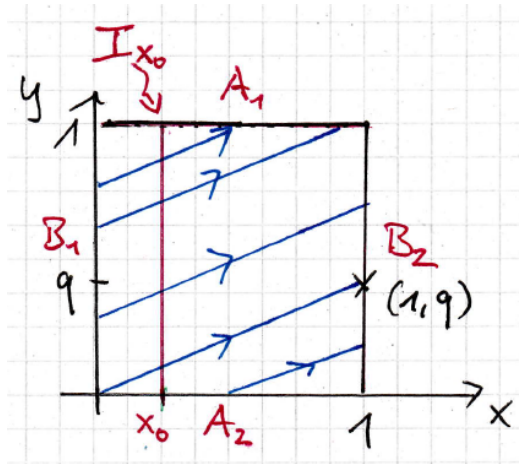


Abbildung 4.2: „Fluss“ auf dem Einheitsquadrat

Betrachte folgenden „Fluss“ auf dem Einheitsquadrat:

$$z' = F(z) \equiv \text{const} = \begin{pmatrix} 1 \\ q \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \quad \forall z \in [0, 1]^2, \quad (2.8)$$

welcher durch Identifikation der Seite B_1 und B_2 bzw. A_1 und A_2 zu einem Fluss auf dem Torus wird.

- (i) Fall $q = \frac{k}{m} \in \mathbb{Q} \implies$ alle Orbits sind periodisch.
- (ii) Fall $q \notin \mathbb{Q}$ irrational \implies es gibt einen auf dem Torus dichten Orbit.

4.3 Globale invariante Mannigfaltigkeiten

Wir betrachten wieder autonome Differentialgleichungen ($G \subset \mathbb{R}^n$ Gebiet)

$$x' = f(x), \quad x \in G, \quad f \in \mathcal{C}^1(G) \quad (3.1)$$

mit Fluss $\varphi = \varphi_t(x)$, $x \in G$, $t \in \mathbb{R}$,

$$\varphi: \mathbb{R} \times G \longrightarrow G$$

insbesondere ist mit $D = D_x$ die Matrix $D\varphi_t(x) \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

Sei im Folgenden $x_0 \in G$ **Ruhelage** von (3.1). Dann gilt:

$$D\varphi_{t+s}(x_0) = D(\varphi_t \circ \varphi_s)(x_0) = D\varphi_t(\underbrace{\varphi_s(x_0)}_{=x_0}) \cdot D\varphi_s(x_0) \quad \forall t, s \in \mathbb{R} \quad (3.2)$$

und da $\varphi_t(x)$ stetig differenzierbar in beiden Variablen ist, gilt

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} [D\varphi_t(x_0)] &= D \frac{d}{dt} [\varphi_t(x_0)] = D(f(\varphi_t(x_0))) \\ &= Df(\underbrace{\varphi_t(x_0)}_{=x_0}) \cdot D\varphi_t(x_0). \end{aligned} \quad (3.3)$$

Damit gezeigt:

Lemma 4.3.1 *Ist $x_0 \in G$ Ruhelage von (3.1), dann löst $X(t) := D\varphi_t(x_0) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ das lineare Matrixanfangswertproblem*

$$\begin{cases} X' = Df(x_0) \cdot X \\ X(0) = Id \end{cases} \quad (3.4)$$

und hat deshalb die Darstellung $D\varphi_t(x_0) = \exp(Df(x_0) \cdot t)$.

Definition 4.3.2 (reguläre und hyperbolische Ruhelagen)

Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet und $f: G \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein C^1 -Vektorfeld mit Fluss $\varphi = \varphi_t(x)$ und Ruhelage $x_0 \in G$.

- (i) x_0 heißt **regulär**, wenn die Matrix $Df(x_0) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ nur Eigenwerte $\neq 0$ hat ($Df(x_0): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ist bijektiv)
- (ii) x_0 heißt **hyperbolisch**, wenn $Df(x_0)$ keine rein imaginären Eigenwerte hat, d.h.

$$\operatorname{Re}(\lambda) \neq 0 \quad \forall \lambda \in \sigma(Df(x_0)). \quad (3.5)$$

klar: x_0 hyperbolisch $\implies x_0$ regulär (aber nicht umgekehrt!)

Satz 4.3.3 *Ist x_0 reguläre Ruhelage von φ , dann ist x_0 ein isolierter Punkt in der Menge aller Ruhelagen von φ .*

Für jedes feste $t_0 \in \mathbb{R}$ ist $\Phi := \varphi_{t_0}: G \rightarrow G$ (wobei $G \subset \mathbb{R}^n$) ein Diffeomorphismus ($\Phi \in C^1(G)$, $\Phi^{-1} = \varphi_{-t_0}$) mit Fixpunkt x_0 , d.h. $\Phi(x_0) = x_0$ (falls x_0 Ruhelage von φ).

Zur Erinnerung:

Definition 4.3.4 (hyperbolischer Fixpunkt)

Ein Fixpunkt $x_0 \in G$ eines Diffeomorphismus $\Phi: G \rightarrow G$ heißt **hyperbolisch**, wenn $D\Phi(x_0) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ keine Eigenwerte auf dem Einheitskreis hat, d.h.

$$|\lambda| \neq 1 \quad \text{für alle } \lambda \in \sigma(D\Phi(x_0)). \quad (3.6)$$

Satz 4.3.5 *Ist $x_0 \in G$ hyperbolische Ruhelage des Flusses $\varphi = \varphi_t(x)$ von (3.1), dann ist x_0 hyperbolischer Fixpunkt der Diffeomorphismen*

$$\Phi := \varphi_{t_0}: G \longrightarrow G \quad \text{für } t_0 \neq 0 \quad \text{beliebig aber fest.}$$

Beweisidee: Mit Spektralabbildungssatz gilt:

$$\sigma\left(\exp\left(Df(x_0) \cdot t_0\right)\right) = e^{\sigma(Df(x_0) \cdot t_0)} =: \left\{e^\mu : \mu \in \sigma\left(Df(x_0) \cdot t_0\right)\right\}. \quad (3.7)$$

□

Der obige Satz versetzt uns in die Lage, den Satz über invariante Mannigfaltigkeiten für Diffeomorphismen (bei hyperbolischen Fixpunkten) anzuwenden (vgl. *Kapitel 2, Satz 2.5.9*).

Wiederholung aus diskrete dynamische Systeme:

Satz 4.3.6 (globale stabile Mannigfaltigkeiten bei Diffeomorphismen)

Sei x_0 hyperbolischer Fixpunkt des Diffeomorphismus $\Phi: G \rightarrow G$ (mit $G \subset \mathbb{R}^n$ offen) und

$$\mathbb{R}^n = E^s \oplus E^u$$

mit

▷ $E^s = E^{s,\Phi}$: *algebraischer Eigenraum von $D\Phi(x_0) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ zu Eigenwerten λ mit Betrag $|\lambda| < 1$ ($\dim E^s = k$).*

▷ $E^u = E^{u,\Phi}$: *analog mit Eigenwerten $|\lambda| > 1$ ($\dim E^s = n - k$).*

Dann existiert eine injektive Immersion $\Psi: \mathbb{R}^k \rightarrow G$ (d.h. $\text{rang}(D\Psi(x)) = k \quad \forall x \in \mathbb{R}^k$) mit

(i) $\Psi(0) = x_0$

(ii) $\Psi(\mathbb{R}^k) = \left\{x \in G : \lim_{m \rightarrow \infty} \Phi^m(x) = x_0\right\} =: W^s(x_0) = W^{s,\Phi}(x_0),$
 („stabile Mannigfaltigkeit von x_0 “)

(iii) $T_{x_0}(\Psi(\mathbb{R}^k)) = x_0 + E^s$ („Tangentialraum bei x_0 “)

Dies lässt sich wegen *Satz 4.3.5* direkt auf Flüsse anwenden:

Satz 4.3.7 (globale stabile Mannigfaltigkeiten bei Flüssen)

Sei $f: G \rightarrow \mathbb{R}^n$ ($G \subset \mathbb{R}^n$ offen) ein C^1 -Vektorfeld, welches einen globalen Fluss $\varphi_t: G \rightarrow G$, $t \in \mathbb{R}$ erzeugt. Weiter sei $x_0 \in G$ hyperbolische Ruhelage von φ_t und

$$\mathbb{R}^n = E^s \oplus E^u$$

mit

- ▷ E^s : algebraischer Eigenraum von $Df(x_0) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ zu Eigenwerten λ mit $\operatorname{Re}(\lambda) < 0$ ($\dim E^s = k$).
- ▷ E^u : analog mit Eigenwerten $\operatorname{Re}(\lambda) > 0$ ($\dim E^u = n - k$).

Dann existiert eine injektive **Immersion** $\Psi: \mathbb{R}^k \rightarrow G$ mit

- (i) $\Psi(0) = x_0$
- (ii) $\Psi(\mathbb{R}^k) = \left\{ x \in G: \lim_{t \rightarrow \infty} \varphi_t(x) = x_0 \right\} =: W^s(x_0) = W^{s,\varphi}(x_0)$
- (iii) $T_{x_0}(\Psi(\mathbb{R}^k)) = x_0 + E^s$

Bemerkung 4.3.8 (i) Analog existiert auch die globale instabile Mannigfaltigkeit

$$W^u = W^u(x_0) := \left\{ x \in G: \lim_{t \rightarrow -\infty} \varphi_t(x) = x_0 \right\}.$$

- (ii) Ein alternativer Zugang zu Satz 4.3.7 (Existenz globaler invarianter Mannigfaltigkeiten) ist, zunächst in einer kleinen Umgebung von x_0 **lokale stabile/instabile Mannigfaltigkeiten** als Graph über E^s/E^u zu konstruieren: Sei etwa für $\varepsilon > 0$ fest

$$S = W_{loc}^s(x_0) = \left\{ x \in B_\varepsilon(x_0): \lim_{t \rightarrow \infty} \varphi_t(x) = x_0 \right\}$$

und

$$U = W_{loc}^u(x_0) = \left\{ x \in B_\varepsilon(x_0): \lim_{t \rightarrow -\infty} \varphi_t(x) = x_0 \right\}.$$

Literatur: [CL55]

Die **globale instabile** bzw. **stabile Mannigfaltigkeit** erhält man dann durch Vorwärts- bzw. Rückwärtsfluss auf U bzw. S , d.h.

$$W^s(x_0) = \bigcup_{t \leq 0} \varphi_t(S) = \left\{ y: \exists t \leq 0, \exists x \in S, \text{ so dass } \varphi_t(x) = y \right\}$$

$$W^u(x_0) = \bigcup_{t \geq 0} \varphi_t(U) = \left\{ y: \exists t \geq 0, \exists x \in U, \text{ so dass } \varphi_t(x) = y \right\}$$

Beispiel 4.3.9 (Pendel ohne Reibung)

$$x' = y$$

$$y' = -\sin x$$

hat 1.tes Integral $H(x, y) = \frac{1}{2}y^2 - \cos x$.

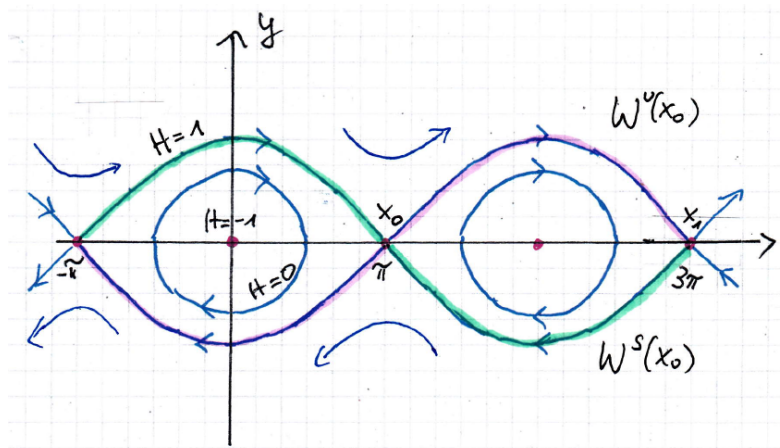


Abbildung 4.3: stabile und instabile Mannigfaltigkeit von $x_0 = (\pi, 0)$

Charakterisierung für heterokline / homokline Orbits:

- $x^* \in \mathbb{R}^n$ heißt heterokliner Punkt für $x' = f(x)$ (3.1), falls es hyperbolische Ruhelagen x_0, x_1 gibt, $x_0 \neq x_1$ mit

$$x^* \in W^u(x_0) \cap W^s(x_1) \quad (3.8)$$

- $x^* \in \mathbb{R}^n$ heißt homokliner Punkt, falls eine hyperbolische Ruhelage x_0 existiert mit

$$x^* \in W^u(x_0) \cap W^s(x_0) \quad (3.9)$$

Approximation der invarianten Mannigfaltigkeiten (bzw. Fluss darauf)

Dazu, ist es oft sinnvoll, lineare Terme und Terme höher Ordnung zu separieren:

Lemma 4.3.10 Seien $A \in \mathbb{R}^{m \times m}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und C^1 -Funktionen

$$F: \mathbb{R}^{m \times n} \rightarrow \mathbb{R}^m, \quad G: \mathbb{R}^{m \times n} \rightarrow \mathbb{R}^n.$$

Betrachte das System

$$\begin{cases} x' = Ax + F(x, y), & x \in \mathbb{R}^m \\ y' = By + G(x, y), & y \in \mathbb{R}^n \end{cases} \quad (3.10)$$

Dann ist der Graph einer C^1 -Funktion

$$h: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad M := \{(x, y) : y = h(x)\}, \quad x \in \mathbb{R}^m$$

eine invariante Mannigfaltigkeit für (3.10), genau dann, wenn

$$\frac{\partial h}{\partial x}(x) \cdot [Ax + F(x, h(x))] = Bh(x) + G(x, h(x)), \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^m. \quad (3.11)$$

Bemerkung: Ist $h: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ ($U \subset \mathbb{R}^m$) nur lokal definiert, so ist M entsprechend lokal invariant.

Bemerkung: Eine analoge Aussage gilt für

$$\widetilde{M} := \{(x, y) : x = g(y)\} \quad \text{Graph von } g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

und

$$\frac{\partial g}{\partial y}(y) \cdot [By + G(g(y), y)] = Ag(y) + F(g(y), y) \quad \text{für alle } y \in \mathbb{R}^n.$$

Korollar 4.3.11 („Versklavungsprinzip“)

In der Situation von Lemma 4.3.10 gilt:

Das m -dimensionale System

$$x' = Ax + F(x, h(x)) \quad (\text{reduziertes System}) \quad (3.12)$$

beschreibt den Fluss auf der invarianten Mannigfaltigkeit $M = \{(x, y) : y = h(x)\}$ im folgenden Sinne:

- (i) Falls $(\mu(t), \nu(t)) \in \mathbb{R}^{m+n}$ Lösung von (3.10) ist und in M liegt (d.h. $\nu = h(\mu)$), dann löst $\mu(\cdot)$ (3.12).
- (ii) Falls $\mu(\cdot)$ (3.12) löst, dann löst $(\mu(\cdot), h(\mu(\cdot)))$ auch (3.10) und liegt in M .

Beispiel 4.3.12

$$\begin{aligned} x' &= x + 2xy \\ y' &= -y + (x^2 + y^2) \end{aligned}$$

$(x, y) = 0$ ist hyperbolische Ruhelage mit $E^s = \text{span}\{e_2\}$, $E^u = \text{span}\{e_1\}$.

4.4 Zentrumsmannigfaltigkeit

Definition 4.4.1 Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Neben

$$E^u \subset \mathbb{R}^n \left(\text{Hauptraum von } A \text{ zu Eigenwerten } \lambda \text{ mit } \operatorname{Re}(\lambda) > 0 \right) \quad (\text{instabiler Unterraum})$$

und

$$E^s \subset \mathbb{R}^n \left(\text{Hauptraum von } A \text{ zu Eigenwerten } \lambda \text{ mit } \operatorname{Re}(\lambda) < 0 \right) \quad (\text{stabiler Unterraum})$$

sei jetzt auch

$$E^c \subset \mathbb{R}^n \left(\text{Hauptraum von } A \text{ zu Eigenwerten } \lambda \text{ mit } \operatorname{Re}(\lambda) = 0 \right) \quad (\text{zentraler Unterraum})$$

definiert.

Bemerkung: Alle drei Unterräume sind **invariant** für den **linearen Fluss**

$$\varphi_t(x) = e^{At} \cdot x,$$

denn nach einer geeigneten Koordinatentransformation ($y := Cx$) ist

$$x' = Ax \iff y' = \begin{pmatrix} A^s & 0 & 0 \\ 0 & A^c & 0 \\ 0 & 0 & A^u \end{pmatrix} y =: \tilde{A}y$$

und

$$\exp(\tilde{A}t) = e^{\tilde{A}t} = \begin{pmatrix} e^{A^s t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{A^c t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{A^u t} \end{pmatrix}.$$

Ziel: Abschätzungen für $\exp(A^j t)$ für $j = s, c$ und u .

Satz 4.4.2 (Wachstum von $\exp(Bt)$)

Sei $B \in \mathbb{R}^{m \times m}$ und es gebe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, so dass

$$\operatorname{Re}(\lambda_i) \in [\alpha, \beta] \quad \forall \lambda_i \text{ Eigenwerte von } B.$$

Dann gilt: Für jedes $\varepsilon > 0$ existiert ein $K = K_\varepsilon > 0$, so dass

$$(i) \quad \|\exp(Bt)\| \leq K \cdot e^{(\alpha-\varepsilon)t} \quad \forall t \leq 0$$

$$(ii) \quad \|\exp(Bt)\| \leq K \cdot e^{(\beta+\varepsilon)t} \quad \forall t \geq 0$$

Sind zusätzlich alle Eigenwerte von B mit $\operatorname{Re}(\lambda_i) = \alpha$ halb einfach, ($\operatorname{alg}(\lambda_i) = \operatorname{geo}(\lambda_i)$), so gilt (i) mit $\varepsilon = 0$. Analog für (ii).

Korollar 4.4.3 (minimales Wachstum)

Es gelte $\operatorname{Re} \lambda > \alpha$ für alle Eigenwerte λ von $B \in \mathbb{R}^{m \times m}$. Dann gibt es eine Konstante $C > 0$, so dass

$$\|\exp(Bt)\xi\| \geq C \cdot e^{\alpha t} \cdot \|\xi\| \quad \text{für alle } t \geq 0 \quad \text{und für alle } \xi \in \mathbb{R}^m$$

Korollar 4.4.4 (Dynamische Charakterisierung für E^u und E^s):

Sei $\varphi_t(x) = \exp(At)x$. Dann gilt:

$$E^s = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \exists \alpha < 0, C > 0 \text{ so dass } \|\varphi_t(x)\| \leq C \cdot e^{\alpha t} \text{ für alle } t \geq 0 \right\}$$

$$E^u = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \exists \alpha > 0, C > 0 \text{ so dass } \|\varphi_t(x)\| \leq C \cdot e^{\alpha t} \text{ für alle } t \leq 0 \right\}$$

Beispiel 4.4.5

$$\begin{aligned} x' &= -x, & E^s &= \operatorname{span}\{e_1\} \\ y' &= 0, & E^c &= \operatorname{span}\{e_2\} \\ z' &= z, & E^u &= \operatorname{span}\{e_3\} \end{aligned}$$

Definition 4.4.6 (die fünf klassischen invarianten Unterräume)

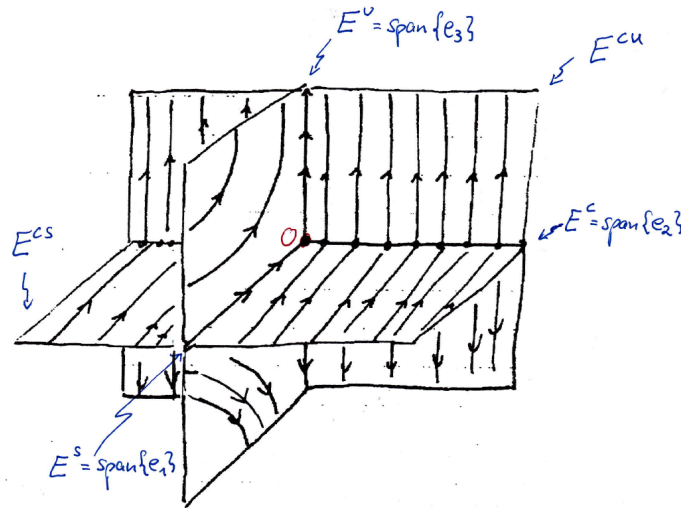
Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und E^u, E^s, E^c definiert wie oben. Setze

$$E^{cs} := E^c \oplus E^s \subset \mathbb{R}^n \quad (\text{zentral-stabiler Unterraum})$$

$$E^{cu} := E^c \oplus E^u \subset \mathbb{R}^n \quad (\text{zentral-instabiler Unterraum})$$

Alle diese Unterräume sind invariant für $\varphi_t(x) = e^{At} \cdot x$. Diese fünf Unterräume heißen die **klassischen invarianten Unterräume**.

Bemerkung: Obwohl $E^s \oplus E^u$ auch invariant ist, zählt dieser Raum **nicht** dazu.

Abbildung 4.4: einfacher linearer Fluss im \mathbb{R}^3 **Satz 4.4.7 (Die klassischen fünf invarianten Mannigfaltigkeiten)**

Sei $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine C^k -Funktion ($k \geq 1$). Angenommen $x_0 \in \mathbb{R}^n$ sei Ruhelage von

$$x' = f(x) \quad (4.1)$$

und $E^u, E^s, E^{cu}, E^{cs}, E^c$ seien die fünf klassischen invarianten Unterräume von $A := Df(x_0) \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Dann existiert eine **Umgebung** V von x_0 und fünf Mannigfaltigkeiten

$$M^u, M^s, M^{cu}, M^{cs}, M^c \subset V,$$

so dass das Folgende gilt.

- (a) x_0 liegt auf allen Mannigfaltigkeiten und diese Mannigfaltigkeiten sind bei x_0 **tangential** an den entsprechenden invarianten Unterraum von A und haben die gleiche Dimension. Alle Mannigfaltigkeiten sind C^k , außer M^c ist nur C^{k-1} .
- (b) Alle Mannigfaltigkeiten sind lokal invariant für (4.1), d.h. solange wie die Orbits V **nicht** verlassen.
- (c) $M^u \subset M^{cu}$, $M^s \subset M^{cs}$, $M^c = M^{cs} \cap M^{cu}$ (**Zentrumsmannigfaltigkeit**).
- (d) M^u und M^s haben folgende dynamische Charakterisierung:

$$M^s = \left\{ x \in V : \exists \alpha < 0, C > 0 \text{ so dass } \|\varphi_t(x) - x_0\| \leq C \cdot e^{\alpha t} \text{ für alle } t \geq 0 \right\}.$$

Insbesondere gilt: $\varphi_t(x) \rightarrow x_0$ ($t \rightarrow \infty$) für $x \in M^s$.

$$M^u = \left\{ x \in V : \exists \alpha > 0, C < 0 \text{ so dass } \|\varphi_t(x) - x_0\| \leq C \cdot e^{\alpha t} \text{ für alle } t \leq 0 \right\}.$$

Insbesondere gilt: $\varphi_t(x) \rightarrow x_0$ ($t \rightarrow -\infty$) für $x \in M^u$.

(e) Alle drei Mannigfaltigkeiten M^{cu} , M^{cs} und M^c enthalten die Menge

$$B = \{x \in V : \varphi_t(x) \in V \text{ für alle } t \in \mathbb{R}\}$$

(Orbits die für alle Zeiten in V bleiben).

Bemerkung: Gängige Notation in der Literatur: $W_{\text{loc}}^s(x_0)$ für M^s , etc.

Literatur: [Car81]

Beispiel 4.4.8

$$x' = x^2, \quad E^c = \text{span}\{e_1\}$$

$$y' = -y, \quad E^s = \text{span}\{e_2\}$$

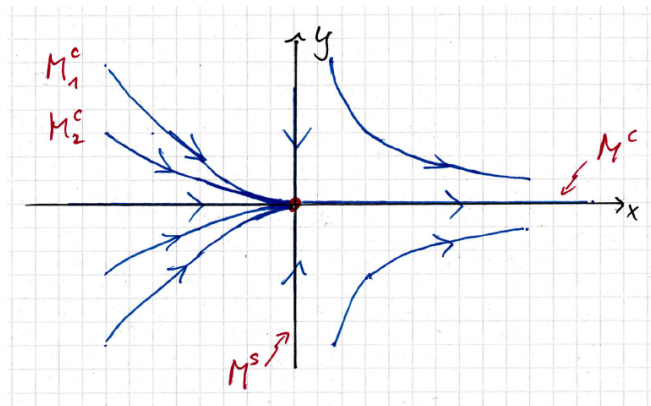


Abbildung 4.5: Zentrumsmannigfaltigkeit nicht eindeutig

hat mehrere Zentrumsmannigfaltigkeiten.

Beispiel 4.4.9 (Nichteindeutigkeit von M^c , M^{cs} und M^{cu})

Das System

$$x' = -x, \quad E^s = \text{span}\{e_1\}$$

$$y' = y^2, \quad E^c = \text{span}\{e_2\}$$

$$z' = z, \quad E^u = \text{span}\{e_3\}$$

hat unendlich viele Zentrumsmannigfaltigkeiten, sowie zentral-stabile und zentral-instabile Mannigfaltigkeiten (alle tangential an E^c , E^{cs} , E^{cu}).

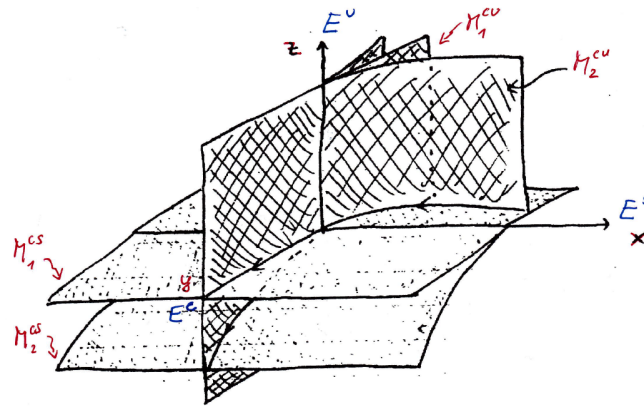


Abbildung 4.6: zentral-stabile und zentral-instabile Mannigfaltigkeiten (nicht eindeutig)

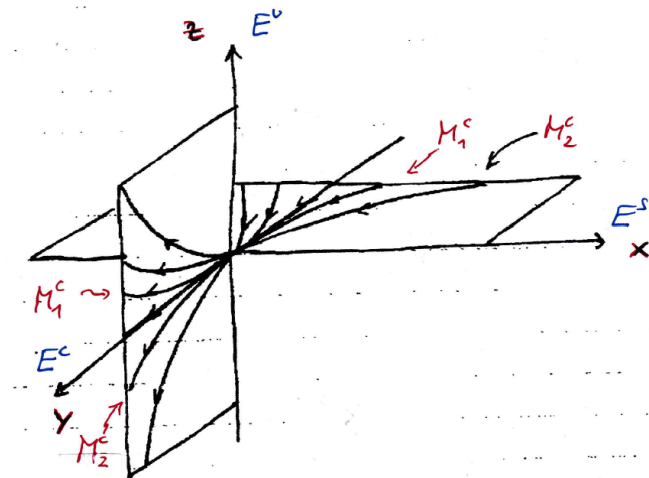


Abbildung 4.7: Zentrumsmanigfaltigkeiten (nicht eindeutig)

Beispiel 4.4.10 $E^u \oplus E^s$ muss nichtlinear nicht überleben (als invariante Mannigfaltigkeit).
Betrachte

$$\begin{aligned}
 x' &= -x, & E^s &= \text{span}\{e_1\} \\
 y' &= x \cdot z, & E^c &= \text{span}\{e_2\} \\
 z' &= z, & E^u &= \text{span}\{e_3\}
 \end{aligned} \tag{4.2}$$

Wichtige Anwendung der Zentrumsmanigfaltigkeit: **Stabilitätsanalyse**

Situation: $w' = f(w)$ mit Ruhelage w_0 und alle Eigenwerte λ von $Df(w_0)$ erfüllen $\operatorname{Re}(\lambda) \leq 0$, es gibt aber auch welche mit $\operatorname{Re}(\lambda) = 0$.
(das Prinzip der linearen Stabilität ist **nicht** anwendbar!)

Ausweg: Bestimme M^c und Fluss darauf

Beispiel 4.4.11 mit Konstanten $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ sei

$$\begin{aligned}x' &= xy + ax^3 + bx^2y \\y' &= -y + cx^2 + dx^2y,\end{aligned}\tag{4.3}$$

womit $E^c = \operatorname{span}\{e_1\}$ und $E^s = \operatorname{span}\{e_2\}$ gilt.

(4.3) hat 1-dim stabile Mannigfaltigkeit M^s bei $(x_0, y_0) = (0, 0)$ (tangential an E^s) und 1-dim Zentrumsmannigfaltigkeit M^c bei $(0, 0)$ (tangential an E^c).

Der Parametertrick (Literatur [GJ16])

Angenommen

$$\begin{aligned}x' &= B(\mu) \cdot x + f_\mu(x, y) \\y' &= C(\mu) \cdot y + g_\mu(x, y)\end{aligned}\quad \text{für } (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m\tag{4.4}$$

hängt von einem Parameter $\mu \in \mathbb{R}^k$ ab und für $\mu = 0$ hat $B(0) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ nur Eigenwerte mit $\operatorname{Re}(\lambda) = 0$ und $C(0) \in \mathbb{R}^{m \times m}$ nur Eigenwerte mit $\operatorname{Re}(\lambda) \neq 0$.

Statt direkt die Zentrumsmannigfaltigkeit bei $\mu = 0$ anzusetzen, wird (4.4) durch

$$\mu' = 0, \quad \mu \in \mathbb{R}^k\tag{4.5}$$

ergänzt, damit man die Lösungen von (4.4) für $\mu = 0$ auch gleich mitbehandelt.

Theorie von der Zentrumsmannigfaltigkeit liefert:

Bei $(x^*, y^*, \mu^*) = (0, 0, 0)$ hat (4.4) und (4.5) eine $n + k$ -dim Zentrumsmannigfaltigkeit $W_{\text{loc}}^c(0)$, welche sich als Graph $y = h(x, \mu)$ schreiben lässt und bei $(x^*, \mu^*) = (0, 0)$ tangential an

$$E^c = \operatorname{span}\{x\text{-Raum}, \mu\text{-Raum}\} = \mathbb{R}^n \times \{0\} \times \mathbb{R}^k$$

ist.

Zusatz: $W_{\text{loc}}^c(0)$ enthält alle global beschränkten Lösungen nahe 0.

Beispiel 4.4.12 (*pitch-fork-Verzweigung; Literatur [GH83], Section 3.2*)

$$\begin{aligned}x' &= \mu x - x^3 = x(\mu - x^2) \\y' &= y + x^4 \\ \mu' &= 0\end{aligned}\tag{4.6}$$

mit Gleichgewicht $(x^*, y^*, \mu^*) = (0, 0, 0) = 0 \in \mathbb{R}^{n+k+m}$ und $E^c = \text{span} \{e_1, e_3\}$ sowie $E^u = \text{span} \{e_2\}$.

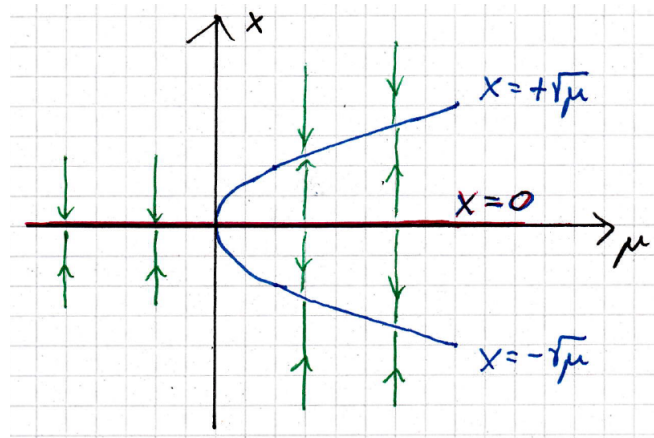


Abbildung 4.8: Fluss von $x' = \mu x - x^3$, $\mu' = 0$

Weitere Gleichgewichte (welche alle auf $W_{loc}^c(0)$ liegen) sind:

- $(0, 0, \mu_0)$, $\mu_0 \in \mathbb{R}$
- $\kappa^\pm(\mu_0) := (\pm\sqrt{\mu_0}, -\mu_0^2, \mu_0)$, $\mu_0 > 0$ (vgl. Abbildung 4.9)

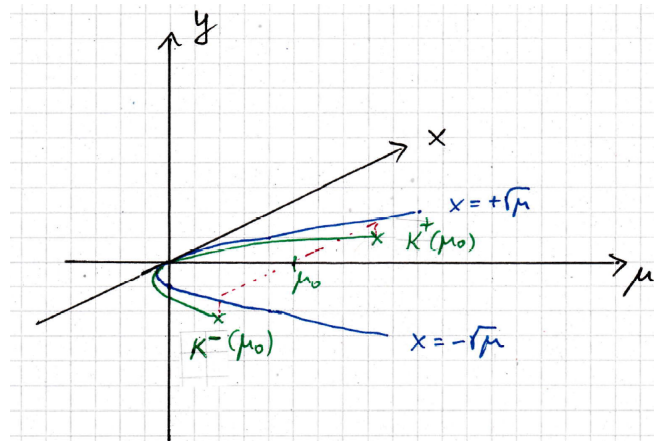


Abbildung 4.9: Gleichgewichte von (4.6)

4.5 Der Satz von Hartman–Grobman

Obwohl wir die invarianten Mannigfaltigkeiten kennen, wissen wir noch nichts über die Orbits „dazwischen“.

Frage: Kann man das gesamte Phasenportrait (lokal bei x_0) von

$$x' = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n \quad (5.1)$$

mit Ruhelage $x_0 \in \mathbb{R}^n$ auf das Phasenportrait von

$$x' = Ax, \quad (A := Df(x_0) \in \mathbb{R}^{n \times n}) \quad (5.2)$$

abbilden?

Antwort: Ist x_0 hyperbolisch, geht das immer (*Folgerung 4.5.5*), falls **nicht**, geht es nicht ganz, aber fast (*Satz 4.5.3*).

Definition 4.5.1 Zwei Diffeomorphismen $\varphi_i: M_i \rightarrow M_i$, $i = 1, 2$ heißen **konjugiert**, falls es einen **Homöomorphismus** $h: M_1 \rightarrow M_2$ gibt, so dass

$$h \circ \varphi_1 = \varphi_2 \circ h \quad \text{auf } M_1.$$

Der Satz von Hartman–Grobman am hyperbolischen Fixpunkt x_0 (*Folgerung 4.5.5*) besagt, dass

$$\begin{array}{ccc} \varphi_1 = \varphi_t^{(\text{nichtlin})} & \text{und} & \varphi_2 = \varphi_t^{(\text{lin})} \\ \uparrow & & \uparrow \\ \text{Fluss von (5.1) bei } x_0 & & \text{Fluss von (5.2) bei } 0 \end{array}$$

konjugiert sind, d.h. \exists Homöomorphismus $h: U \rightarrow V$, mit $x_0 \in U$, $0 \in V$, so dass

$$h \circ \varphi_t^{(\text{nichtlin})}(x) = \varphi_t^{(\text{lin})} \circ h(x) = e^{At} \cdot h(x) \quad \forall t \in I = \text{Intervall} \quad \forall x \in U. \quad (\text{KONJ})$$

Definition 4.5.2 Im obigen Fall heißt der Fluss von (5.1) bei x_0 zum Fluss von (5.2) bei Null *topologisch äquivalent*.

Achtung: h hängt nicht von t ab !

Einfaches Beispiel (vgl. *Abbildung 4.10*):

$$x' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} x \quad \text{ist topologisch äquivalent zu} \quad y' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} y$$

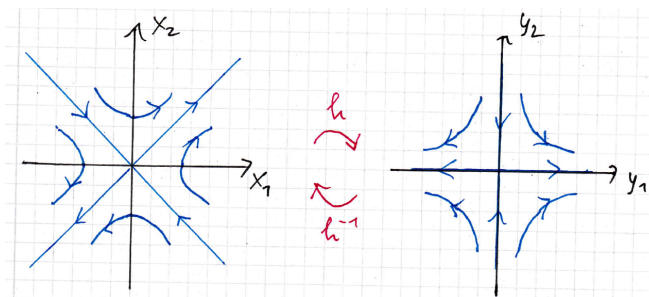


Abbildung 4.10: zwei topologisch äquivalente Flüsse

Jetzt allgemein: Betrachte (5.1) mit (o.B.d.A.).

$$Df(x_0) = \begin{bmatrix} A^- & & \\ & A^0 & \\ & & A^+ \end{bmatrix}$$

d.h. wir können o.B.d.A. annehmen, (5.1) sei in der Form

$$x' = \begin{bmatrix} A^- & & \\ & A^0 & \\ & & A^+ \end{bmatrix} x + g(x), \quad (5.3)$$

wobei $g(x)$ mit $g(0) = 0$, $Dg(0) = 0$.

Notation: $x = (u, v, w)^\top$, $g = (g^-, g^0, g^+)^\top$.

Satz 4.5.3 (verallgemeinerter Hartman–Grobman)

Betrachte das System (5.3), wobei $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine \mathcal{C}^1 -Funktion mit $g(0) = 0$ und $Dg(0) = 0$ sei. Wir nehmen an, die Eigenwerte von A^-, A^0, A^+ haben Realteile $< 0, = 0, > 0$.

Dann existiert eine Umgebung U von 0 und eine Zentrumsmannigfaltigkeit $M_{loc}^c = S_0$ für (5.3), welche Graph einer \mathcal{C}^1 -Funktion $s_0 = (s_0^-, s_0^+)$ über $E^0 = E^c$ [insbesondere $(s_0^-, s_0^+)(0) = (0, 0)$] ist, so dass das Folgende gilt:

Das System (5.3) ist topologisch äquivalent zum System

$$\begin{cases} u' = A^-u \\ v' = A^0v + g^0(s_0^-(v), v, s_0^+(v)) \\ w' = A^+w \end{cases} \quad (5.4)$$

d.h. es existiert ein Homöomorphismus $h: U \rightarrow h(U)$ mit $h(0) = 0$, so dass

- (i) Falls $\mu: I \rightarrow U$ Lösung von (5.3), dann ist $h(\mu(\cdot))$ Lösung von (5.4).
- (ii) Falls $\nu: I \rightarrow h(U)$ eine Lösung von (5.4), dann ist $h^{-1}(\nu(\cdot))$ eine Lösung von (5.3).

Mit anderen Worten: Das Phasenportrait von (5.3) nahe 0 ist das homöomorphe Bild des Phasenportraits von (5.4) nahe 0 (und umgekehrt).

Literatur: Palmer [Pal75]

Bemerkungen 4.5.4 (i) Man kann zeigen, dass h so gewählt werden kann, dass die klassischen **fünf invarianten Mannigfaltigkeiten** von (5.3) bijektiv auf die klassischen **fünf invarianten Unterräume** von $x' = Df(0)x$ abgebildet werden, welche auch für (5.4) invariant sind!

(ii) Selbst falls g eine C^∞ -Abbildung ist, ist die Abbildung h im Allgemeinen nur **stetig!**

Folgerung 4.5.5 (Hartman–Grobman)

Sei $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine C^1 -Funktion und sei x_0 ein **hyperbolisches Gleichgewicht** von

$$x' = f(x). \quad (5.5)$$

Dann existiert eine offene Umgebung U von x_0 und ein Homöomorphismus $h: U \rightarrow h(U)$ mit $h(x_0) = 0$, so dass vermöge des Homöomorphismus h (5.5) topologisch äquivalent zu

$$x' = Df(x_0) \cdot x \quad (5.6)$$

ist (vgl. Abbildung 4.11).

Literatur: Perko [Per01], Sektion 2.8

Beispiel 4.5.6 Betrachte das planare System (mit Parametern $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$)

$$\begin{cases} x' = -x + \beta y^2 + 2xy^2 \\ y' = xy + x^2y + \alpha y^3 \end{cases}. \quad (5.7)$$

Hier ist $(x^*, y^*) = (0, 0)$ Ruhelage mit $E^s = \text{span}\{e_1\}$ und $E^c = \text{span}\{e_2\}$.

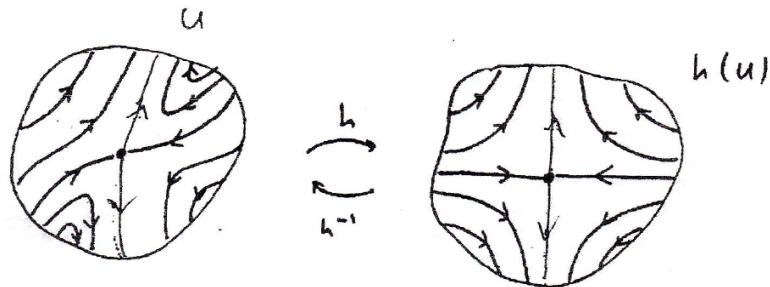


Abbildung 4.11: Hartman–Grobman am hyperbolischen Gleichgewicht

Aufgabe: Diskutiere das Phasenportrait nahe $(0, 0)$ für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ und bestimme die Stabilität von $(0, 0)$.

Lösungen in mehreren Schritten:

- Zentrumsmannigfaltigkeit und Fluss darauf
- Verallgemeinerter Hartman–Grobman

Bemerkungen 4.5.7 (zur fehlenden Differenzierbarkeit von h)

In der Situation des klassischen Hartman–Grobman Theorems am hyperbolischen Fixpunkt lässt sich zeigen, dass, falls f eine \mathcal{C}^2 -Funktion ist, so ist h immerhin \mathcal{C}^1 , falls eine der folgenden Situationen gegeben ist:

- (i) *es handelt sich um ein planares Vektorfeld*
- (ii) *sämtliche Eigenwerte haben negativen Realteil*
- (iii) *sämtliche Eigenwerte haben positiven Realteil*

(vgl. Chicone [Chi06]).

Aber selbst falls $f \in \mathcal{C}^\infty$ ist, ist im Allgemeinen h nicht mehr als \mathcal{C}^1 . (vgl. Perko [Per01], S. 127, Sektion 2.8).

Kapitel 5

Höherdimensionale Dynamik und Chaos

Chaos wird fast immer nur für diskrete Abbildungen $\Phi: X \rightarrow X$ stetig, X vollständiger metrischer Raum definiert, (vgl. diskrete dynamische Systeme, Teil I).

Die Verbindung zu Differentialgleichungen passiert z.B. durch Poincaré–Abbildungen.

5.1 Poincaré–Abbildung

Situation (S): betrachte Orbits von

$$x' = f(x), \quad x \in X \subset \mathbb{R}^n. \quad (1.1)$$

Seien a und $b \in X$ gegeben mit $\varphi_{t^*}(a) = b$ und $t^* > 0$.

- $\Sigma_a \subset \mathbb{R}^n$ sei transversaler Schnitt durch a mit Normalenvektor ν_a
(d.h. $\langle \nu_a, f(x) \rangle \neq 0$ für $x \in \Sigma_a$)
- analog: $\Sigma_b \subset \mathbb{R}^n$ sei transversaler Schnitt durch b mit Normalenvektor ν_b
(d.h. $\langle \nu_b, f(x) \rangle \neq 0$ für $x \in \Sigma_b$)

Lemma 5.1.1 Sei $f \in \mathcal{C}^k(X)$, $k \geq 1$ in Situation (S).

Dann gibt es ein $\delta > 0$ und eine Abbildung $P: \Sigma_a \cap B_\delta(a) \rightarrow \Sigma_b$, die jedem $x \in \Sigma_a \cap B_\delta(a)$ den **ersten** Schnittpunkt des Orbits $\gamma^+(x) = \{\varphi_t(x) : t \geq 0\}$ mit Σ_b zuordnet. Weiter gibt es eine Abbildung $\tau: \Sigma_a \cap B_\delta(a) \rightarrow \mathbb{R}$, welche die „Reisezeit“ angibt, die $x \in \Sigma_a \cap B_\delta(a)$ braucht, um Σ_b zu erreichen, d.h.

$$P(x) = \varphi_{\tau(x)}(x) \in \Sigma_b \quad (\text{Poincaré–Abbildung; vgl. Abbildung 5.1}). \quad (1.2)$$

Dabei sind τ und P ebenso \mathcal{C}^k .

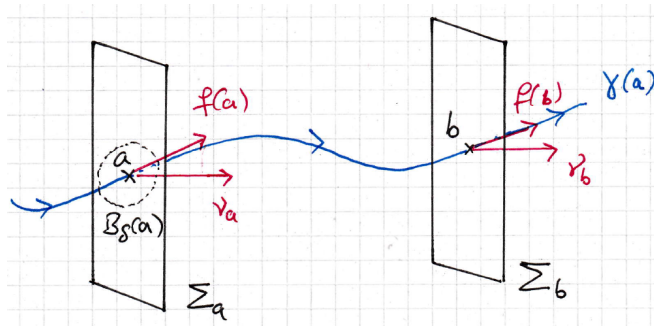


Abbildung 5.1: transversale Schnitte

Bemerkung: Die Poincaré–Abbildung wird insbesondere bei periodischen Orbits verwendet. Dort wählt man $\Sigma_a = \Sigma_b$.

5.2 Die Shift–Abbildung

Prototyp für chaotische Abbildungen nach Devaney (vgl. *Definition 1.9.3*):

- topologisch transitiv („mischend“)
- periodische Orbits dicht
- sensitive Abhängigkeit von Anfangswerten

Definition 5.2.1 Setze $\Sigma_2 := \{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$ mit Metrik

$$d(a, b) := \sum_{i \in \mathbb{Z}} \frac{1}{2^{|i|}} \cdot |a_i - b_i| \quad (2.1)$$

für $a = (a_i)_{i \in \mathbb{Z}} \in \Sigma_2$, $b = (b_i)_{i \in \mathbb{Z}} \in \Sigma_2$. Die Abbildung

$$\begin{aligned} \sigma: \Sigma_2 &\longrightarrow \Sigma_2 \\ a &\longmapsto \sigma(a) \end{aligned}$$

mit $(\sigma(a))_i = a_{i+1}$ heißt (**Links-**)Shift–Abbildung auf zwei Symbolen.

Lemma 5.2.2 (elementare Eigenschaften)

- (i) Σ_2 ist vollständig (Übung).

$$(ii) \quad d(a, b) \leq \frac{1}{2^0} + 2 \cdot \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} = 3$$

$$a_i = b_i, \quad i = -k, \dots, k \implies d(a, b) \leq 2 \cdot \sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{1}{2^i} = \frac{1}{2^{k-1}}$$

$$d(a, b) < \frac{1}{2^k} \implies a_i = b_i, \quad i = -k, \dots, k.$$

(iii) $\sigma: \Sigma_2 \rightarrow \Sigma_2$ ist bijektiv (Inverse: Rechts-Shift) und stetig:

$$d(\sigma(a), \sigma(b)) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \frac{1}{2^{|i|}} |a_{i+1} - b_{i+1}| \leq 2 \cdot d(a, b).$$

(iv) periodische Orbits von σ sind dicht in Σ_2 .

(v) Es gibt einen Punkt $\tilde{a} \in \Sigma_2$, dessen Orbit $\{\sigma^n(\tilde{a}) : n \in \mathbb{Z}\}$ dicht in Σ_2 liegt.

Korollar 5.2.3 Die Shift-Abbildung $\sigma: \Sigma_2 \rightarrow \Sigma_2$ ist chaotisch im Sinne von Devaney.

Weiteres Ziel. Nachweis von Chaos für (eine Potenz) der Poincaré-Abbildung bei einem periodischen Orbit durch $x \in X$, d.h. für $P^{n_0}: \Sigma_x \rightarrow \Sigma_x$. Dazu genügt es zu zeigen, dass

$$\left(\Sigma_2, d, \sigma\right) \quad \text{in} \quad \left(\Sigma_x, d_{\mathbb{R}^{n-1}}, P^{n_0}\right)$$

einbettbar ist (im Sinne einer Semikonjugation (vgl. Definition 1.10.1)).

5.3 Die Hufeisenabbildung und der Satz von Smale–Birkhoff

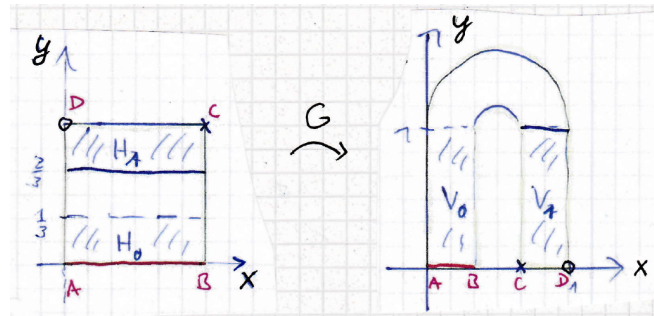
Definition 5.3.1 (Hufeisenabbildung von Stephen Smale (1963))

„Smale’s horseshoe map“

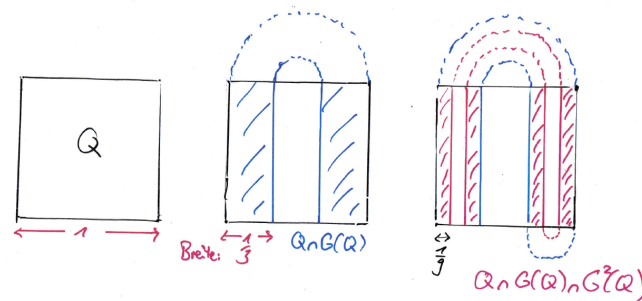
Sei $G: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ bijektiv, $G, G^{-1} \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$, welches das Einheitsquadrat $Q = [0, 1]^2$ wie in Abbildung 5.2 abbildet. Die genaue Fortsetzung nach \mathbb{R}^2 ist dabei egal.

Also etwa auf $H_0 := [0, 1] \times [0, \frac{1}{3}]$ und $H_1 := [0, 1] \times [\frac{2}{3}, 1]$ ist

$$G(x, y) = \begin{cases} \left(\frac{1}{3}x, 3y\right) & \text{für } y \in [0, \frac{1}{3}] \quad x \in [0, 1] \\ \left(1 - \frac{x}{3}, 3(1-y)\right) & \text{für } y \in [\frac{2}{3}, 1] \quad x \in [0, 1] \end{cases} \quad (3.1)$$

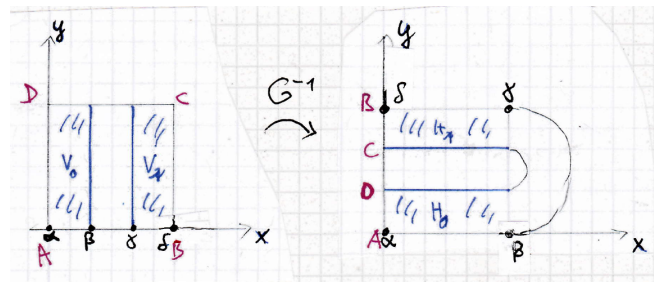
Abbildung 5.2: horseshoe map G ; $V_0 = G(H_0)$ und $V_1 = G(H_1)$

G ist affin linear auf $H_0 \cup H_1$. Dabei wird Q zuerst in x -Richtung gestaucht und in y -Richtung gestreckt, sowie anschließend auf sich gefaltet. Damit ist $G(Q) \cap Q = V_0 \cup V_1$, wobei $V_0 := [0, \frac{1}{3}] \times [0, 1]$ und $V_1 := [\frac{2}{3}, 1] \times [0, 1]$. Ebenso erhält man $G^2(Q)$ (vgl. *Abbildung 5.3*).

Abbildung 5.3: $Q \cap G(Q)$ und $Q \cap G(Q) \cap G^2(Q)$

$Q \cap G(Q) \cap \dots \cap G^k(Q)$ enthält 2^k verschiedene vertikale Streifen der Breite $\frac{1}{3^k}$, Höhe 1. (3.2)

Analog bekommt man $G^{-1}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, d.h. $G^{-1}(Q) \cap Q = H_0 \cup H_1$ (vgl. *Abbildung 5.4*).

Abbildung 5.4: Inverse von G ; $H_0 = G^{-1}(V_0)$ und $H_1 = G^{-1}(V_1)$

$G^{-2}(Q)$ wird in *Abbildung 5.5* dargestellt.

$$Q \cap G^{-1}(Q) \cap \dots \cap G^{-k}(Q) \text{ enthält } 2^k \text{ horizontale Streifen der H\u00f6he } \frac{1}{3^k}, \text{ Breite } 1. \quad (3.3)$$

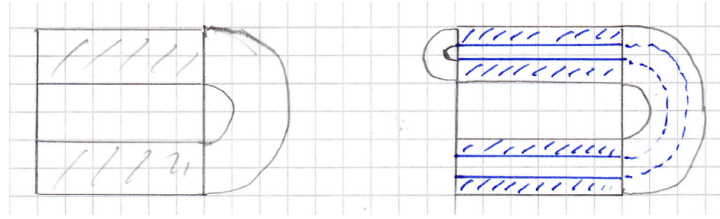


Abbildung 5.5: Inverse von G ; $H_0 = G^{-1}(V_0)$ und $H_1 = G^{-1}(V_1)$

Wir setzen

$$\Lambda_1 := G^{-1}(Q) \cap Q \cap G(Q)$$

$$\Lambda_2 := G^{-2}(Q) \cap G^{-1}(Q) \cap Q \cap G(Q) \cap G^2(Q),$$

welche in *Abbildung 5.6* dargestellt sind.

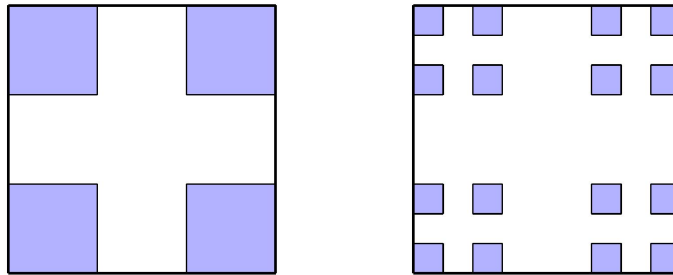


Abbildung 5.6: Λ_1 und Λ_2

Die Menge

$$\Lambda := \bigcap_{j=-\infty}^{\infty} G^j(Q) \quad (3.4)$$

ist f\u00fcr $G|_{\Lambda}$ und $G|_{\Lambda}^{-1}$ invariant und hat eine Cantor–Mengenartige Struktur. Schreiben wir

$$(x, y) \in Q \text{ 3-adisch, d.h. } x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{3^k}, y = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{y_k}{3^k} \text{ mit } x_k, y_k \in \{0, 1, 2\}. \text{ Dann gilt}$$

$$(x, y) \in \Lambda \iff x_k, y_k \in \{0, 2\} \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Außerdem gilt

$$G(x, y) = \begin{cases} \left(\frac{0}{3} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{x_{k-1}}{3^k}, \sum_{k=1}^{\infty} \frac{y_{k+1}}{3^k} \right) & \text{falls } y_1 = 0 \\ \left(\frac{2}{3} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{2 - x_{k-1}}{3^k}, \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2 - y_{k+1}}{3^k} \right) & \text{falls } y_1 = 2 \end{cases} \quad (3.5)$$

Satz 5.3.2 $G: \Lambda \rightarrow \Lambda$ ist zur (Links)-Shift-Abbildung $\sigma: \Sigma_2 \rightarrow \Sigma_2$ konjugiert vermöge der Abbildung

$$\begin{aligned} \phi: \Lambda &\longrightarrow \Sigma_2 \\ (x, y) &\longmapsto (a_i)_{i \in \mathbb{Z}} \quad \text{mit } a_i = \begin{cases} 0 & \text{falls } G^i(x, y) \in H_0 \\ 1 & \text{falls } G^i(x, y) \in H_1 \end{cases}, \quad i \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Das heißt,

$$\boxed{\phi \circ G = \sigma \circ \phi \text{ auf } \Lambda} \quad \left(\text{insbesondere ist } \phi \text{ bijektiv und stetig} \right) \quad (3.6)$$

Korollar 5.3.3 Die Hufeisenabbildung $G: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ bzw. $G|_{\Lambda}: \Lambda \rightarrow \Lambda$ ist chaotisch, also insbesondere besitzt

- $G|_{\Lambda}$ einen dichten Orbit,
- die periodischen Punkte von $G|_{\Lambda}$ liegen dicht.

Bemerkung 5.3.4 Die hier konstruierte Hufeisenabbildung ist (an den wesentlichen Stellen) affin linear. Man kann aber zeigen, dass die nachgewiesene komplizierte Dynamik auch bei kleinen nichtlinearen Störungen überlebt (vgl. [Per01], S. 412, Theorem 4).

Dies führt zum wesentlichen Satz:

Satz 5.3.5 (Smale–Birkhoff)

Sei $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ ein C^1 -Diffeomorphismus, x_0 ein hyperbolischer Fixpunkt von f . Weiter mögen sich stabile und instabile Mannigfaltigkeiten von x_0 , $W^s(x_0)$ und $W^u(x_0)$, in einem Punkt $x^* \neq x_0$ transversal schneiden, d.h. $x^* \in W^s(x_0) \cap W^u(x_0)$ und die Tangentialräume bei x^* ,

$$T_{x^*}(W^s(x_0)) \quad \text{und} \quad T_{x^*}(W^u(x_0)), \quad \text{spannen } \mathbb{R}^m \text{ auf.} \quad (3.7)$$

Dann gibt es eine Menge $\tilde{\Lambda} \subset \mathbb{R}^m$ für die gilt:

- $\tilde{\Lambda}$ hat Cantor-Mengen-Struktur.
- Es gibt ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass $\tilde{\Lambda}$ invariant unter f^{n_0} und $f|_{\tilde{\Lambda}}^{n_0}$ chaotisch ist.

Beweis: z.B. [Pal88]

Damit existieren unendlich viele transversale Punkte, welche sich bei x_0 häufen. Dies führt zu einem „homoclinic tangle“ (homoklines Durcheinander), bei welchem sich $W^s(x_0)$ und $W^u(x_0)$ bei sich selbst „anhäufen“.

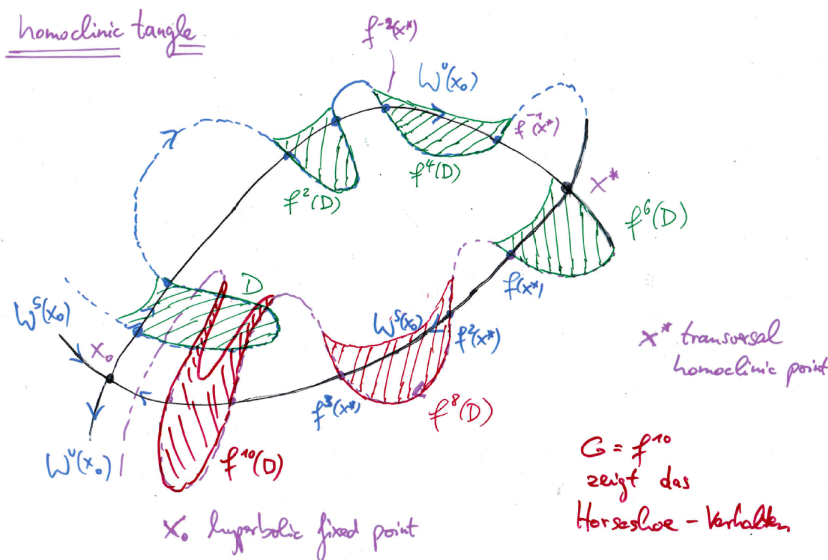


Abbildung 5.7: homoclinic tangle mit horseshoe

Eine Iterierte von f führt auf eine nichtlineare Hufeisenabbildung wie man *Abbildung 5.7* entnehmen kann.

5.4 Die Melnikov-Methode

Literatur: [Per01] §4.9 und [GH83] §4.5

Ziel: Voraussetzungen von Smale-Birkhoff (*Satz 5.3.5*) im Umfeld von ODEs nachweisen; konkret: finde transversalen Schnittpunkt zwischen stabiler und instabiler Mannigfaltigkeit eines hyperbolischen Fixpunkts einer Poincaré-Abbildung.

Voraussetzungen 5.4.1 Wir betrachten

$$x' = f_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^2 \quad (4.1)$$

mit

(i) $f_0: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, C^2 -Funktion

(ii) Hamiltonstruktur, d.h. $\exists H: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f_0(x) = \begin{pmatrix} +\partial_{x_2} H \\ -\partial_{x_1} H \end{pmatrix}$

(iii) Der durch (4.1) erzeugte Fluss sei global und besitze eine homokline hyperbolische Ruhelage x^* mit $\dim W^u(x^*) = 1 = \dim W^s(x^*)$, also insbesondere einen homoklinen Orbit.

Beispiel 5.4.2

$$\begin{aligned} x_1' &= x_2 \\ x_2' &= x_1 - x_1^3 \end{aligned} \quad (4.2)$$

hat Hamiltonfunktion $H(x_1, x_2) = \frac{1}{2}x_2^2 + \frac{1}{4}x_1^4 - \frac{1}{2}x_1^2$. Der Fluss von (4.2) bewegt sich auf Höhenlinien von H (vgl. Abbildung 5.8).

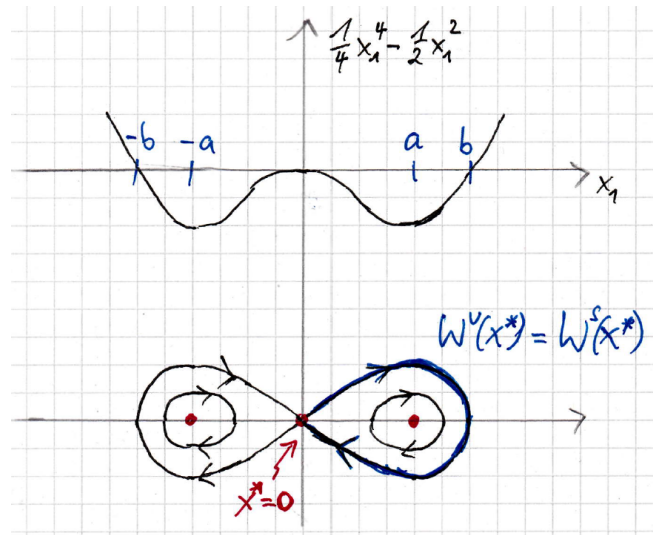


Abbildung 5.8: Höhenlinien von H

Statt (4.1) untersuchen wir das gestörte **nicht** autonome System

$$x' = f_0(x) + \varepsilon \cdot f_1(t, x), \quad x \in \mathbb{R}^2 \quad (4.3)$$

mit Parameter $\varepsilon \in (-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$ und Lösung $\varphi_\varepsilon(t; \tau, \bar{x})$ zum Anfangswert $x(\tau) = \bar{x}$.

Dabei gelte

Voraussetzungen 5.4.3 (i) $f_1: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ sei \mathcal{C}^3 -Funktion.

(ii) $f_1(\cdot, x)$ sei T -periodisch für ein $T > 0$.

(iii) Die Lösungen φ_ε von (4.3) existieren global für alle Zeiten $t \in \mathbb{R}$.

Sowohl Voraussetzung 5.4.1, als auch Voraussetzung 5.4.3 seien im Folgenden vorausgesetzt.

Die Zeit- T -Abbildung

Lemma 5.4.4 Für $\Theta \in \mathbb{R}$ und fixiertes $\varepsilon \in (-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$ ist die Zeit- T -Abbildung

$$P_{\varepsilon, \Theta}: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad P_{\varepsilon, \Theta}(x) := \varphi_\varepsilon(\Theta + T; \Theta, x)$$

ein Diffeomorphismus mit

(i) $P_{\varepsilon, \Theta+T} = P_{\varepsilon, \Theta}$ und

(ii) Für $\Theta_0, \Theta_1 \in \mathbb{R}$ beliebig sind $P_{\varepsilon, \Theta_0}$ und $P_{\varepsilon, \Theta_1}$ topologisch \mathcal{C}^1 -konjugiert, d.h. es existiert ein Diffeomorphismus $h: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit $P_{\varepsilon, \Theta_1} \circ h = h \circ P_{\varepsilon, \Theta_0}$.

Bemerkung: $h(x) = \varphi_\varepsilon(\Theta_1, \Theta_0, x)$ tut es mit $h^{-1}(x) = \varphi_\varepsilon(\Theta_0, \Theta_1, x)$.

Folgerung 5.4.5 $x^* \in \mathbb{R}^2$ ist hyperbolischer Fixpunkt der ungestörten Zeit- T -Abbildung $P_{0, \Theta}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit eindimensionaler stabiler und instabiler Mannigfaltigkeit.

Zur Vereinfachung sei $\mu := (\varepsilon, \Theta) \in (-\varepsilon_0, \varepsilon_0) \times \mathbb{R}$ ein zweidimensionaler Parameter

$$\mu^* := (0, \Theta^*) \quad (\Theta^* \text{ fest}).$$

Lemma 5.4.6 Es gibt eine offene Umgebung $V \subset \mathbb{R}^2$ von μ^* und eine glatte Abbildung $\hat{x}: V \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit $\hat{x}(\mu^*) = x^*$ und $x_\mu^* := \hat{x}(\mu)$ ist hyperbolischer Fixpunkt von P_μ für alle $\mu \in V$ mit 1-dimensionaler stabiler und instabiler Mannigfaltigkeit $W_\mu^s = W^s(x_\mu^*)$ und $W_\mu^u = W^u(x_\mu^*)$.

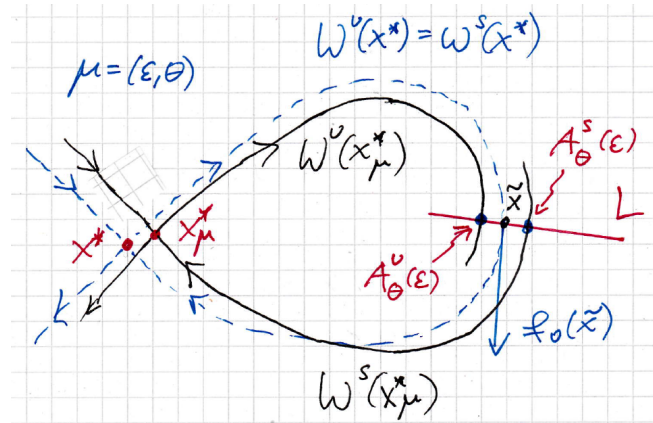
Die Distanzfunktion

Wir fixieren ein $\tilde{x} \in W^u(x^*) \cap W^s(x^*)$ mit $\tilde{x} \neq x^*$ und einen für (4.1) transversalen Schnitt L durch \tilde{x} (mit $L \subset \text{span}\{f_0(\tilde{x})^\perp\} + \tilde{x}$) wie in Abbildung 5.9.

Definition 5.4.7 Für (ε, Θ) nahe $(0, \Theta^*)$ sei

$$A_\Theta^u(\varepsilon) := \text{Schnittpunkt von } W_{\varepsilon, \Theta}^u \text{ mit } L \text{ nahe } \tilde{x}$$

$$A_\Theta^s(\varepsilon) := \text{Schnittpunkt von } W_{\varepsilon, \Theta}^s \text{ mit } L \text{ nahe } \tilde{x}$$

Abbildung 5.9: Definition von $A_\Theta^u(\epsilon)$ und $A_\Theta^s(\epsilon)$

Ziel: Eine Funktion, die den Abstand zwischen $A_\Theta^u(\epsilon)$ und $A_\Theta^s(\epsilon)$ misst.

Dazu

Definition 5.4.8 (Dachprodukt)

Zu $a, b \in \mathbb{R}^2$ heißt

$$a \wedge b := \det(a, b) = a_1 b_2 - a_2 b_1 \in \mathbb{R}$$

Dachprodukt von a und b .

Bemerkung:

$$\begin{aligned} c := \text{Proj}_{a^\perp}(b) &= \left\langle \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -a_2 \\ a_1 \end{pmatrix} \right\rangle \cdot \begin{pmatrix} -a_2 \\ a_1 \end{pmatrix} \\ &= (a \wedge b) \cdot a^\perp \end{aligned} \quad (4.4)$$

Definition 5.4.9 Distanzfunktion

$$\Delta_\epsilon(\Theta) := f_0(\tilde{x}) \wedge [A_\Theta^u(\epsilon) - A_\Theta^s(\epsilon)] \in \mathbb{R}. \quad (4.5)$$

Bemerkung: $\Delta_\epsilon(\Theta)$ ist ein Maß für $\|A_\Theta^u(\epsilon) - A_\Theta^s(\epsilon)\|_{\mathbb{R}^2}$.

Satz 5.4.10 Ist $\Theta_0 \in \mathbb{R}$ eine einfache Nullstelle von Δ_ϵ für $\epsilon \neq 0$, so schneiden sich W_{ϵ, Θ_0}^s und W_{ϵ, Θ_0}^u transversal.

Definition 5.4.11 (Melnikov-Funktion)

Sei $\gamma^*: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ der homokline Orbit von (4.1) aus Voraussetzung 5.4.1.

Die Melnikov-Funktion $M: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ zu (4.3) ist dann definiert durch

$$M(\Theta) := \int_{-\infty}^{\infty} f_0(\gamma^*(t - \Theta)) \wedge f_1(t, \gamma^*(t - \Theta)) dt. \quad (4.6)$$

Satz 5.4.12 Die Melnikov-Funktion ist wohldefiniert und es gilt

$$\Delta_\varepsilon(\Theta) = \varepsilon \cdot M(\Theta) + O(\varepsilon^2) \quad \text{für } \varepsilon \text{ nahe } 0.$$

Folgerung 5.4.13 Besitzt die Melnikov-Funktion M eine einfache Nullstelle $\Theta_0 \in \mathbb{R}$, so schneiden sich für hinreichend kleine $\varepsilon \neq 0$ die Mannigfaltigkeiten $W_{\varepsilon, \Theta}^s$ und $W_{\varepsilon, \Theta}^u$ transversal für alle $\Theta \in \mathbb{R}$.

5.5 Anwendung der Melnikov-Methode auf die Duffing-Gleichung

Nach *Folgerung 5.4.13* ist eine einfache Nullstelle der Melnikov-Funktion hinreichend, um via Smale-Birkhoff (*Satz 5.3.5*) für die Zeit- T -Abbildung von $x' = f_0(x) + \varepsilon f_1(t, x)$ (4.3) chaotisches Verhalten nachzuweisen.

Beispiel 5.5.1 (periodisch gestörte Duffing Gleichung)

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 - x_1^3 + \varepsilon \left(\mu \cos(t) - \frac{5}{2} x_2 \right) \end{pmatrix} = f_0(x) + \varepsilon f_1(t, x) \quad (5.1)$$

mit $f_0(x)$ wie in *Beispiel 5.4.2* und für einen Parameter $\mu \in \mathbb{R}$ ist

$$f_1(t, x) = \begin{pmatrix} 0 \\ \mu \cos(t) - \frac{5}{2} x_2 \end{pmatrix}$$

offenbar $T = 2\pi$ -periodisch in t . Aufgrund der Hamiltonstruktur des ungestörten Problems weiß man, dass zwei homokline Orbits von $x' = f_0(x)$ existieren. Diese sind

$$\Gamma_0^\pm: \left\{ \gamma_0^\pm(t) = \left(x_1^\pm(t), x_2^\pm(t) \right) := \pm \left(\sqrt{2} \operatorname{sech}(t), -\sqrt{2} \operatorname{sech}(t) \cdot \tanh(t) \right) \right\}^\top, \quad (5.2)$$

wobei $\operatorname{sech}(t) = 1/\cosh(t)$ der Secans hyperbolicus und $\tanh(t) = \frac{\sinh(t)}{\cosh(t)}$ der Tangens hyperbolicus ist.

Die Melnikov-Funktion (z.B. für Γ_0^+) ist dann

$$\begin{aligned} M(\Theta) &\stackrel{(4.6)}{=} \int_{-\infty}^{\infty} f_0(\gamma_0^+(t - \Theta)) \wedge f_1(t, \gamma_0^+(t - \Theta)) dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x_2^+(t) \cdot \left(\mu \cos(t + \Theta) - \frac{5}{2} x_2^+(t) \right) dt, \end{aligned}$$

welche für μ hinreichend groß einfache Nullstellen hat.

Index

- α -Limesmenge, 56
- ω -Limesmenge, 56
- Abbildung
 - affine, 23
 - eindimensional, 3
 - höher dimensional, 23
 - Iteration, 3
 - lineare
 - Normalform, 24
 - logistische, iv, 4, 8, 20, 22
 - Shift, 80
- asymptotisch periodisch, 20, 45
- attraktive Menge, 41
- Attraktor, 49
 - globaler, 41–44
- basin of attraction, 41, 57
- Bendixson–Kriterium, 61
- Bisektion, 44
- Cantor–Menge, 83, 85
- center–stable manifold, 37
- center–unstable manifold, 37
- Chaos, 79, 81, 84
 - nach Devaney, 16, 18, 80
- chaotischer Orbit, 21, 45
- Dachprodukt, 88
- Differentialgleichung
 - autonom, 50
- Distanzfunktion, 87, 88
- Duffing–Gleichung, 89
- Dynamik
 - höherdimensional, 79
- dynamisches System
 - diskretes, iii, 3, 64
 - kontinuierlich, 3, 44–46, 49, 51, 56, 57
 - planar, 57
- Eigenräume
 - verallgemeinerte, 36
- Erzeuger
 - infinitesimaler, 52
- Feigenbaum–Konstante, 9
- Fibonacci Folge, iv
- Fixpunkt, 5
 - abstoßender, 5
 - attraktiver, 5
 - hyperbolischer, 28, 32, 35, 63
 - nicht hyperbolisch, 37, 39
- Fixpunktsatz, 11
- Fluss
 - topologisch äquivalent, 75
- Fundamentalumgebung, 41, 56
- gedämpfter Oszillator, 61
- gewöhnliche Differentialgleichung
 - autonom, 51
 - Gruppeneigenschaft, 51
 - Translationsinvarianz, 50
 - Theorie, 49
- Gleichgewicht
 - hyperbolisch, 77
- globaler Attraktor, 41, 57
 - relativ zu Q , 42
- Grenzyklus, 59, 60
 - Spiral–Eigenschaft, 60
- Gruppeneigenschaft, 51
- Hadamard–Perron, 32, 36
- Halborbit
 - negativer, 56
 - positiver, 56
- Hamiltonfunktion, 86

- Hamiltonstruktur, 86, 89
- Hartman–Grobman, 28, 36, 75, 77
 - am hyperbolischen Gleichgewicht, 78
 - bei Abbildungen, 36
 - bei Flüssen, 75
 - fehlende Differenzierbarkeit, 78
 - verallgemeinerter, 38, 78
- has one, is one
 - Lemma, 59
- Hausdorff–Distanz, 43
- Henon–Abbildung, 30, 40, 44
 - Fixpunkte, 30
 - Periode–2 Punkte, 31
- heterokliner Punkt, 66
- homoclinic tangle, 36, 85
 - am Sattelfixpunkt, 36
- homokliner Orbit, 86, 89
- homokliner Punkt, 35, 66
- homoklines Gewirr, 46
- horseshoe Abbildung, 45
- horseshoe map, 81
- Hufeisenabbildung, 81, 84
 - nichtlinear, 85
- hyperbolische Ruhelage, 63, 86
- hyperbolischer Fixpunkt, 28, 35
- Immersion, 34, 64, 65
- infinitesimaler Erzeuger, 52
- instabile Mannigfaltigkeit, 32, 37
 - globale, 33, 65
 - lokale, 32
- instabile Menge, 41
- instabiler Unterraum, 68
 - dynamische Charakterisierung, 69
- invariant, 41
- invariante Mannigfaltigkeiten
 - Approximation, 66
 - globale, 34, 62
 - klassische fünf, 70, 77
 - lokale, 34, 37
- invariante Menge, 49, 52
- invariante Unterräume
 - klassische fünf, 69, 77
- Jordan Normalform, 24, 37
 - reelle, 26
- Jordanischer Kurvensatz, 58
- Konjugation, 23
 - konjugiert, 17, 75
 - topologisch, 17, 87
- Kozykel–Eigenschaft, 50
- Limesmenge, 49, 55, 59
 - zusammenhängend, 56
- limit cycles, 59
- lineare Abbildungen
 - Quelle, 27
 - Senke, 27
- lineare Stabilität, 73
- logistische Abbildung, iv, 4–8, 20, 22
 - Fixpunkte, 6
 - Periode–2 Punkte, 7, 8
- Lyapunov–Exponent, 19, 22, 45
 - Periode– k Punkt, 20
- Lyapunov–Nummer, 19
 - Periode– k Punkt, 20
- Mannigfaltigkeit
 - der Klasse C^α , 32
 - immersierte, 34
 - instabile, 32, 33, 37, 84, 87
 - invariante, 34
 - stabile, 32–34, 37, 84, 87
 - zentral–instabile, 71
 - zentral–stabile, 71
- Matrix–Exponentialfunktion, 68
 - minimales Wachstum, 69
 - Wachstum von, 68
- Melnikov–Funktion, 88, 89
- Melnikov–Methode, 85
 - Duffing–Gleichung, 89
- Menge
 - attraktiv, 41, 56
 - instabile, 41
 - invariant, 42, 52, 56
 - negativ invariant, 52
 - positiv invariant, 52
 - stabile, 41
- Monotonie–Lemma, 58

- MorseIndex, 34
- Newton Verfahren, 4
- Orbit, 51
 - asymptotisch periodisch, 20, 45
 - chaotisch, 21, 45
 - dicht, 12, 14, 15, 81, 84
 - homokliner, 86, 88, 89
 - Klassifikation, 52
 - periodisch, 16, 18, 80, 81
- Oszillator
 - gedämpfter, 61
- Parametertrick, 73
- Pendel ohne Reibung, 66
- Periode- k Orbit, 10
- Periode- k Punkt, 7, 18
 - Stabilität, 30
- Periodenverdopplung, 15
 - Kaskade, 9
- periodische Orbits, 59
 - dicht, 16, 18
- periodische Punkte, 7
 - dicht, 84
- periodische Quelle, 8
- periodische Senke, 8
- Phasenfluss, 51
- Phasenportrait, 53, 75, 77
- Phasenraum, 3, 51
- Picard-Lindelöf, 49
- pitch-fork-Verzweigung, 74
- Poincaré-Abbildung, 46, 79, 81
- Poincaré-Bendixson, 59, 60
- Prinzip
 - der linearen Stabilität, 73
- Punkt
 - homokliner, 35
 - regulärer, 59
 - transversaler, 85
- Quelle, 5, 6, 26, 27, 30, 32
 - periodische, 8, 30
- Rückwärtsorbit, 51
- reduziertes System, 67
- reguläre Ruhelage, 63
- regulärer Punkt, 59
- Reiserouten, 12, 13, 15, 45
- Ruhelage, 75
 - homokline, 86
 - hyperbolische, 63, 86
 - regulär, 63
- Sattelfixpunkt, 33, 36
- Sattelpunkt, 28
- Satz von
 - Hadamard-Perron, 32, 36
 - Hartman-Grobman, 28, 36, 38, 75, 77
 - verallgemeinert, 38, 76
 - Jordan, 58
 - Li-Yorke, 10
 - Picard-Lindelöf, 49
 - Poincaré-Bendixson, 59
 - Sharkovskii, 10, 12
 - Smale-Birkhoff, 84, 85, 89
- Schnitt
 - transversaler, 58, 79, 87
- Schnittpunkt
 - transversaler, 85
- Semikonjugation, 81
- semikonjugiert, 17
- Senke, 5, 6, 26, 27, 30, 32
 - periodische, 8, 30
- sensitive Abhängigkeit, 18
 - vom Anfangswert, 15, 16, 18
- Sharkovskii Ordnung, 12
- Shift-Abbildung, 45, 80, 81, 84
- Smale-Birkhoff, 84
- Spektralabbildungssatz, 64
- stabile Mannigfaltigkeit, 32, 37
 - globale, 33, 34
 - Diffeomorphismen, 64
 - Flüsse, 65
 - lokale, 32, 65
- stabile Menge, 41
- stabiler Unterraum, 68
 - dynamische Charakterisierung, 69
- Stabilitätsanalyse

- mit Zentrumsmannigfaltigkeit, 72
- Subdivisions-Algorithmus, 42, 43
 - GAIO, 44
- System
 - nicht autonom, 86
 - planar, 77
- Tangentialraum, 32
- tent map, 10
- topologisch äquivalent, 77
- topologisch äquivalente Flüsse, 76
- topologisch konjugiert, 17, 29
- topologisch transitiv, 16, 18
- Translationsinvarianz, 50
- transversaler Punkt, 85
- transversaler Schnitt, 58, 79, 87
- transversaler Schnittpunkt, 85
- Unterraum
 - instabiler, 27
 - stabiler, 27
 - zentraler, 27
- van der Pol Oszillator, 60
- Vektorfelder
 - Reskalierung, 53
- verallgemeinerter Hartman-Grobman, 76
- Versklavungsprinzip, 67
- Verzweigungspunkte, 9, 74
- Vorwärtsorbit, 51
- Zeit- T -Abbildung, 87, 89
- Zelt-Abbildung, 10, 13, 15, 22
 - gestaucht, 19
 - Periode- k Orbit, 10
 - Unterteilungsalgorithmus, 14
- zentral-instabiler Unterraum, 69
- zentral-stabiler Unterraum, 69
- zentraler Unterraum, 68
- Zentrumsmannigfaltigkeit, 37, 39, 70, 73, 76, 78
 - bei Abbildungen, 37
 - bei Flüssen, 70
 - Dynamik auf der, 39
 - Nichteindeutigkeit, 71

Literaturverzeichnis

- [Ama95] H. Amann. *Gewöhnliche Differentialgleichungen*. de Gruyter, Berlin, 2nd edition, 1995.
- [ASY96] K. T. Alligood, T. D. Sauer, and J. A. Yorke. *CHAOS: An Introduction to Dynamical Systems*. Springer, Berlin, 1996.
- [BBC⁺92] J. Banks, J. Brooks, G. Cairns, G. Davis, and P. Stacey. *On Devaney's definition of chaos*, *The American Mathematical Monthly*, volume 99:332-334. 1992.
- [Car81] J. Carr. *Applications of center manifold theory*, *Applied Mathematical Sciences*, volume 35. Springer Verlag, 1981.
- [Chi06] C. Chicone. *Ordinary Differential Equations with Applications*. Springer, 2006.
- [CL55] E. A. Coddington and N. Levinson. *Theory of differential equations*. Mc Graw-Hill, 1955.
- [Dev03] R. L. Devaney. *Introduction to Chaotic Dynamical Systems, 2nd edition*. Westview Press, 2003.
- [DH97] M. Dellnitz and A. Hohmann. *A subdivision algorithm for the computation of unstable manifolds and global attractors*, volume 75:293–317. Numerische Mathematik, 1997.
- [GH83] J. Guckenheimer and P. Holmes. *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*. Springer, New York, 1983.
- [GJ16] L. Grüne and O. Junge. *Gewöhnliche Differentialgleichungen, Eine Einführung aus der Perspektive der dynamischen Systeme, 2te Auflage*. Springer, 2016.
- [Har64] Ph. Hartman. *Ordinary differential equations*. Wiley, New York, 1964.
- [HS74] M. W. Hirsch and S. Smale. *Differential Equations, Dynamical Systems, and Linear Algebra*. Academic Press, New York, 1974.
- [KH95] A. Katok and B. Hasselblatt. *Introduction to the modern theory of dynamical systems*, volume 54 of *Encyclopedia of Mathematics and Applications*. Cambridge University Press, 1995.

- [LY75] T.-Y. Li and J. A. Yorke. *Period three implies chaos*, *The American Mathematical Monthly*, volume 82:985-992. 1975.
- [Pal75] K. Palmer. *Linearization near an integral*, volume 51:243-255 of *J. Math. Anal. Appl.* 1975.
- [Pal88] K. Palmer. *Exponential dichotomies, the shadowing lemma and transversal homoclinic points*. *Dynamics Reported*, volume 1:265-306. 1988.
- [PdM82] J. Jr. Palis and W. de Melo. *Geometric theory of dynamical systems*. Springer, 1982.
- [Per01] L. Perko. *Differential Equations and Dynamical Systems*. TAM 7. Springer, Berlin, 2001.
- [VB94] M. Vellekoop and R. Berglund. *In intervals, transitivity = chaos*, volume 101:353-355. *American Mathematical Monthly*, 1994.