Funktionalanalysis

Stanislaus Maier-Paape

6. Februar 2018

Vorwort

Das vorliegende Skript entstand begleitend zu meiner Vorlesung

„Funktionalanalysis“

vom WS 2017/2018. Während Definitionen und Sätze überwiegend vollständig vorhanden sind, sind die dazugehörigen Beweise oft nur als Beweisidee, bzw. gar nicht, vorhanden. Auch Beispiele sind nur unvollständig wiedergegeben. Das Skript ist daher nur als roter Faden zu verstehen.

Zum genaueren Erlernen der Theorie bedarf es unbedingt des Besuchs der Vorlesungen und Übungen, sowie der gewissenhaften Nachbearbeitung der präsentierten Lerninhalte.

Es sei an dieser Stelle aber auch darauf hingewiesen, dass zum Verständnis der Inhalte der Vorlesung eine regelmäßige selbstständige Bearbeitung der Übungsaufgaben unerlässlich ist.

Als weiterführende Literatur empfehle ich primär das Buch von Alt [Alt92].

Die Druckvorlage hat Frau H. Boujé geschrieben, der ich herzlich für ihre Mitarbeit danke.

Aachen, Oktober 2017
Stanislaus Maier-Paape

Prof. S. Maier-Paape
Institut für Mathematik
RWTH Aachen
Templergraben 55
52062 Aachen

Einleitung

Zur Motivation wollen wir einige Beispiele beschreiben, welche mit funktionalanalytischen Methoden behandelbar sind, nicht aber mit Methoden der klassischen Analysis, welche nur Funktionen

$$f\colon\; G \subset \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m \qquad (\mathbb{K} = \mathbb{R} \quad \text{oder} \quad \mathbb{C})$$

studiert.

Problem (i) Variationsrechnung

$$f(u) = \int_0^\pi [u'(x)]^2\,dx \overset{!}{=} \min \quad \text{mit} \quad u(0) = u(\pi) = 0\,, \; \int_0^\pi \big[u(x)\big]^2\,dx = 1$$

Minimierungsproblem unter Nebenbedingungen.

Problem (ii) Fourier–Analysis
Entwicklung einer 2π–periodischen Funktion u bezüglich des Orthogonalsystems

$$\{1, \cos t, \sin t, \cos 2t, \sin 2t, \ldots\} = \{\phi_i(t)\colon\; t \in (0, 2\pi)\,,\; i \in \mathbb{N}\}$$

mit $\langle \phi_i\,, \phi_j \rangle_{L_2(0,2\pi)} = 0$ für $i \neq j$, in eine Fourier–Reihe $u(t) = \sum\limits_{i \in \mathbb{N}} \alpha_i\, \phi_i(t)$.

Problem (iii) Das Biegemoment eines Trägers kann man durch die „Randwertaufgabe“ (gesucht: $u\colon\; [0,1] \to \mathbb{R}$)

$$u''(t) + p(t)\,u(t) = r(t)\,,\; u(0) = u(1) = 0$$

beschreiben, welche man in eine „Integralgleichung“

$$(Tu)(t) := \int_0^1 G(t,s)\, \Big[r(s) - p(s)\,u(s)\Big]\, ds = u(t)$$

umschreiben kann.

Diese Probleme lassen sich mit der klassischen Analysis nicht mehr behandeln. Deshalb nötig:

Funktionalanalysis = Analysis in unendlich–dimensionalen Räumen

Anstelle des $\mathbb{K}^n$ werden wir also allgemeinere Räume betrachten, die aber immer noch folgende Charakteristika aufweisen:

1. Die lineare Struktur

2. Die topologische Struktur (insbesondere mit Konvergenzbegriff)

In folgenden Bereichen der Anwendungen ist die Funktionalanalysis quasi als „Sprache“ unentbehrlich.

1. Anfangs–, Randwertaufgaben und Eigenwertaufgaben bei gewöhnlichen und partiellen Differentialgleichungen.

2. Quantenmechanik (angewandte Hilbertraum–Theorie)

3. Numerik

4. Steuerungsprobleme und Variationsaufgaben

5. Optimierungstheorie (Konvexität, Dualität)

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Lineare Strukturen

1.1 Der lineare Raum

Sei entweder $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Definition 1.1.1 *Eine Menge $X \neq \emptyset$ mit zwei Abbildungen*

$$„+“: \; X \times X \to X\,, \quad (x,y) \longmapsto x+y \qquad \textbf{\textit{(Addition)}}$$
$$„\cdot“: \; \mathbb{K} \times X \to X\,, \quad (\alpha,x) \mapsto \alpha \cdot x = \alpha x \quad \textbf{\textit{(Skalare Multiplikation)}}$$

heißt **linearer Raum** *oder* **Vektorraum** *über $\mathbb{K}$, falls gilt:*

(V1) *X ist bezüglich „+“ abelsche Gruppe*

(V2) *Für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ und $x, y \in X$ gilt:*

$$(\alpha+\beta)\,x \;=\; \alpha x \,+\, \beta x\,, \quad \alpha(x+y) \;=\; \alpha x \,+\, \alpha y\,,$$
$$\alpha(\beta x) \;=\; (\alpha\beta)\,x\,, \qquad\qquad 1 \cdot x \;=\; x\,.$$

Bemerkungen:

(a) Eine Teilmenge $Y \subset X$ ist bereits dann linearer Raum, falls aus $\alpha, \beta \in \mathbb{K}\,,\; x, y \in Y$, stets $\alpha x + \beta y \in Y$ folgt. Y heißt **linearer Teilraum** (oder **linearer Unterraum**).

(b) Zu jeder Teilmenge $M \subset X$ bildet die Menge aller Linearkombinationen von je E N D L I C H vielen Elementen einen linearen Teilraum von X, die **lineare Hülle** oder der **Aufspann** von M (Schreibweise: $span(M)$).

(c) $M := \{x_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} \subset X$ heißt **Hamel–Basis von $\boldsymbol{X}$**, falls $\{x_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ linear unabhängig sind und $span(M) = X$.

(d) Besitzt X eine Basis von $n < \infty$ Elementen, so heißt n die **Dimension von $\boldsymbol{X}$** ($\dim X = n$); andernfalls heißt X **unendlich–dimensional** ($\dim X = \infty$).

(e) Summe zweier linearer Teilräume $X_1, X_2 \subset X$:

$$X_1 + X_2 := \left\{ \alpha x_1 + \beta x_2 \;\middle|\; \alpha, \beta \in \mathbb{K},\; x_1 \in X_1,\; x_2 \in X_2 \right\} \tag{1.1.1}$$

Falls zusätzlich $X_1 \cap X_2 = \{0\}$ gilt, schreiben wir statt für $X_1 + X_2$ auch $X_1 \oplus X_2$.

(f) Quotientenraum X/Y mit einem linearen Teilraum Y von X:

$$X/Y := X/_{\sim} \quad \text{bezüglich der Äquivalenzrelation} \quad x_1 \sim x_2 \iff x_1 - x_2 \in Y$$

Satz 1.1.2 (Existenz einer Hamel–Basis) *Jeder lineare Raum besitzt eine (Hamel)–Basis.*

Satz 1.1.3 (Basisergänzungssatz) *Sei $M \subset X$ linear unabhängige Menge. Dann besitzt X eine Basis B mit $M \subset B$.*

1.2 Beispiele

1. $\mathbb{R}^n$ linearer Raum über $\mathbb{R}$
$\mathbb{C}^n$ linearer Raum über $\mathbb{C}$

2. Sei $[a,b] \subset \mathbb{R}$.
$C[a,b] := \Big\{x\colon [a,b] \to \mathbb{K},\ x \text{ ist stetig auf } [a,b]\Big\}$
$\dim C[a,b] = \infty$

3. (Folgenräume)
$\ell^p = \Big\{x = (\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}\ ,\ \xi_n \in \mathbb{K},\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} |\xi_n|^p < \infty\Big\}$ für $0 < p < \infty$ ist linearer Raum.

$$M = \{e_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subset \ell^p \text{ mit } e_i = (0,0,\ldots,0,\underset{\substack{\uparrow \\ i\text{–te Stelle}}}{1},0,\ldots)$$

sind linear unabhängig, aber das ist keine Basis!

Ebenso: $\ell^\infty = \Big\{x = (\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}\ ,\ \xi_n \in \mathbb{K},\ \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} |\xi_n| < \infty\Big\}$ ist linearer Raum.

Unterräume von ℓ^∞:

$$c = \Big\{x = (\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}\ ,\ \lim_{n\to\infty} \xi_n \text{ existiert}\Big\}$$

$$c_0 = \Big\{x = (\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}\ ,\ \lim_{n\to\infty} \xi_n = 0\Big\}$$

4. (Lebesgue–integrierbare Funktionen)
$(a,b) \subset \mathbb{R}$, wobei $-\infty \le a < b \le \infty,\ 0 < p < \infty$

$$\mathcal{L}^p(a,b) = \left\{x\colon (a,b) \to \mathbb{R},\ x \text{ ist meßbar},\ \int\limits_a^b |x(t)|^p\, dt < \infty\right\}$$

ist linearer Raum mit $\dim \mathcal{L}^p(a,b) = \infty$. Ebenso $L^p(a,b) := \mathcal{L}^p(a,b)/\mathcal{N}$, wobei

$$\mathcal{N} := \Big\{f\colon (a,b) \to \mathbb{R}\ ,\ f = 0 \quad \text{fast überall}\Big\}\,. \tag{1.2.1}$$

1.3 Lineare Abbildungen

Definition 1.3.1 *Seien X, Y lineare Räume über $\mathbb{K}$.*

$A\colon X \to Y$ heißt **linear**, *falls $A(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha Ax_1 + \beta Ax_2$ für alle $x_1, x_2 \in X$ für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$.*

$A\colon X \to \mathbb{K}$ linear heißt **lineares Funktional**. *Für A linear heißt*

$$R(A) = im(A) := A(X) \subset Y, \qquad \text{der } \textbf{\textit{Bildraum/Range von}}\ A$$

und

$$N(A) = ker(A) := A^{-1}(0) \subset X \qquad \text{der } \textbf{\textit{Kern/Nucleus von}}\ A\,.$$

Bemerkungen:

1. $M \subset X$ linearer Unterraum $\Rightarrow$ $A(M) \subset Y$ ist wieder ein linearer Unterraum mit $\dim A(M) \leq \dim M$.

2. A injektiv $\Longleftrightarrow$ $N(A) = \{0\}$.

3. Falls $\dim X = \dim Y = n < \infty \Longrightarrow$ (A injektiv $\Longleftrightarrow$ A surjektiv)

Für $A\colon X \to Y$ gilt

4. A ist linear und bijektiv $\Longleftrightarrow$ es existiert eine lineare Umkehrabbildung $A^{-1}\colon Y \to X$.

5. **a)** Falls so ein $A\colon X \to Y$ linear und bijektiv existiert, sind X und Y (nach Definition) **linear isomorph**.

   b) Nur falls $\dim X = \dim Y < \infty$ sind X und Y auch **topologisch isomorph** (später !).

Beispiele:

1. $X = \{x\colon [a,b] \to \mathbb{R},\ x, \dot{x}, \ddot{x} \text{ stetig auf } [a,b],\ x(a) = \dot{x}(a) = 0\},\ a < b$ ist linearer Raum.

   $Y = C[a,b]$

   $A\colon X \to Y,\ a_0, a_1 \in C[a,b]$

   $(Ax)(t) := \ddot{x}(t) + a_1(t)\,\dot{x}(t) + a_0(t)\,x(t)$

   ist linear und bijektiv.

2. (linearer Integraloperator) $X = Y = C[a,b]$

$$(Ax)(t) = \int_a^b k(t,s) \cdot x(s)\, ds\ ,$$

wobei $k\colon [a,b] \times [a,b] \to \mathbb{R}$ eine vorgegebene stetige Funktion ist oder

$$(A_\lambda x)(t) = \lambda x(t) - (Ax)(t)\ ,$$

wobei $\lambda \in \mathbb{R}$ ein Parameter ist, sind lineare Abbildungen von X nach Y.

$$Ax = y \qquad (\text{gegeben } y \in Y\ , \text{ gesucht } x \in X)$$

oder

$$A_\lambda x = 0 \qquad (\text{gesucht: } \lambda \in \mathbb{R} \text{ und nichttriviale Lösungen } x \neq 0)$$

heißen **Integralgleichungen 1. und 2. Art**.

3. (Shift–Operator) $X = \ell^2\,,\ A\colon X \to X\,,\ x = (\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

$$Ax = (0\,, \xi_1\,, \xi_2\,, \xi_3\,, \ldots) \in \ell^2$$

ist auch linear. A ist injektiv, aber nicht surjektiv.

1.4 Duale Räume

$A\colon X \to \mathbb{K}$ sei lineares Funktional, X linearer Raum. Wir verwenden ein neues Symbol:
$x'\colon X \to \mathbb{K}$.

Schreibweise: $x'(x) \;=: < x, x' > \in \mathbb{K}$

Wir setzen $X^f := \left\{ x' \,\middle|\, x' : X \to \mathbb{K} \text{ ist lineares Funktional} \right\}$. X^f ist selber ein linearer Raum.
Man erhält

$$< \cdot\,, \cdot >\colon\; X \;\times\; X^f \;\longrightarrow\; \mathbb{K} \quad \text{ist bilinear} .$$

Definition 1.4.1 *X^f heißt der* **algebraisch duale** *Raum zu X*

$$X^{ff} \;:=\; (X^f)^f \quad \textit{heißt der } \textbf{biduale Raum} .$$

Beispiele für Elemente in X^{ff} liefert die **„kanonische“ Abbildung**

$$\begin{aligned} \mathcal{J}\colon\; X &\;\to\; X^{ff} \\ x &\;\mapsto\; x'' \end{aligned}$$

definiert durch $< x' \,,\, x'' > := < x \,,\, x' >$ für alle $x' \in X^f$.

Definition 1.4.2 *Der lineare Raum X heißt* **algebraisch reflexiv***, falls $\mathcal{J}$ bijektiv ist (und damit X linear isomorph zu X^{ff} ist).*

Bemerkung 1.4.3 *X ist algebraisch reflexiv $\Longleftrightarrow$ $\dim X \;<\; \infty$.*

Im Falle $\dim X \;=\; n < \infty$ lässt sich leicht eine **duale Basis** angeben:
Sei $\{x_1, \ldots, x_n\}$ Basis in X. Dann wird durch

$$< x_i \,,\, x'_k > :=\; \delta_{ik}$$

und lineare Fortsetzung auf ganz X die Menge $\{x'_1, \ldots, x'_n\} \;\subset\; X^f$ erklärt. Es gilt

Satz 1.4.4 *Falls $\dim X \;=\; n \;<\; \infty$, bilden $\{x'_1, \ldots, x'_n\}$ eine Basis in X^f, die sogenannte duale Basis zu $\{x_1, \ldots, x_n\} \;\subset\; X$.*

Im Falle $\dim X \;=\; \infty$ ist X^f „wesentlich größer“. Man wählt deshalb als (neue Definition) des **Dualraums**

$$X \text{ linearer Raum}\,,\;\; X' \;:=\; \{x'\colon\, X \to \mathbb{K}\,,\; x' \text{ linear und } \textbf{stetig}\} \;\subset\; X^f\,.$$

Um von Stetigkeit reden zu können, müssen wir aber zuerst Topologien einführen.

Kapitel 2

Topologische Strukturen

2.1 Topologische Räume

Definition 2.1.1 *Sei X eine Menge und $\tau \subset 2^X$ eine Menge von Teilmengen von X.*
τ heißt ***Topologie auf X****, falls gilt:*

(T1) $\emptyset \in \tau\,,\ X \in \tau$

(T2) $\left(\bigcup\limits_{O \in \tau'} O\right) \in \tau$ *für alle* $\tau' \subset \tau$ ***(beliebige Vereinigungen)***

(T3) $O_1 \cap O_2 \in \tau$ *für alle* $O_1, O_2 \in \tau$ ***(endliche Schritte)***

(X, τ) heißt dann ***topologischer Raum****. Die Elemente von τ heißen* ***offene*** *Mengen.*

Triviale Beispiele:

1. $\tau = 2^X$: „diskrete Topologie“
2. $\tau = \{\emptyset, X\}$: „indiskrete Topologie“

Definition 2.1.2 **(a)** *Sei $M \subset X$ und (X, τ) topologischer Raum. M heißt* ***abgeschlossen*** $:\Longleftrightarrow X \setminus M \in \tau$.

(b) *$U \subset X$ heißt* ***Umgebung von x_0****, falls $x_0 \in U$ und $U \in \tau$.*

(c) *x_0 heißt* ***innerer Punkt von M****, falls $x_0 \in V \subset M$ für ein $V \in \tau$.*

(d) *$x_0 \in X$ heißt* ***Häufungspunkt von M****, falls jede Umgebung von x_0 ein $y \in M \setminus \{x_0\}$ enthält.*

(e) *Das **Innere von M** ist definiert als* $\operatorname{int}(M) = \overset{\circ}{M} := \bigcup_{\substack{O \text{ offen} \\ O \subset M}} O.$

(f) *Der **Abschluß von M** ist definiert als* $\overline{M} := \bigcap_{\substack{C \text{ abgeschlossen} \\ M \subset C \subset X}} C.$

(g) *M heißt **kompakt**, falls jede offene Überdeckung von M eine endliche Teilüberdeckung besitzt.*

(h) *M heißt **dicht in X**, falls $X = \overline{M}$.*

(i) *M heißt **nirgends dicht in X**, falls $\operatorname{int}\big(\overline{M}\big) = \emptyset$.*

Bemerkungen 2.1.3 *Es gilt:*

1. $\overset{\circ}{M} =$ *Menge der inneren Punkte von M*

2. $\overline{M} = M \cup$ *Menge der Häufungspunkte von M*

3. *M ist abgeschlossen* $\iff M = \overline{M}$

Definition 2.1.4 ***(Hausdorffraum)***
Gilt im topologischen Raum (X, τ) zusätzlich das

Trennungsaxiom: *Je zwei verschiedene Punkte von X besitzen disjunkte Umgebungen ,*

*so heißt (X, τ) **Hausdorffraum**.*

Beispiel: (Topologie der beschränkten Komplemente)

Sei $X = \mathbb{R}^n$, $\tau = \{M \mid X \setminus M \text{ ist eine endliche Menge}\} \cup \{\emptyset\}$. (X, τ) erfüllt das Trennungsaxiom nicht. $M = \mathbb{Z}^n$ hat jeden Punkt in X als Häufungspunkt, damit ist M dicht in (X, τ). Jede endliche Menge hat gar keinen Häufungspunkt und ist nirgends dicht in (X, τ).

Konvergenz und Stetigkeit

Definition 2.1.5 *Eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ heißt **konvergent gegen $x_0 \in X$** $\Big($Schreibweise: $x_n \to x_0$ $(n \to \infty)$ oder $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0\Big)$, falls zu jeder Umgebung U von x_0 ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert mit $x_n \in U$ für alle $n \geq n_0$.*

Ist (X, τ) ein Hausdorffraum, dann ist der Grenzwert einer konvergenten Folge eindeutig.

Definition 2.1.6 *$x_0 \in X$ heißt* ***Häufungspunkt der Folge*** *$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, falls jede Umgebung von x_0 unendlich viele Folgenglieder enthält.*

Definition 2.1.7 *Seien (X, τ_X), (Y, τ_Y) topologische Räume.*

(a) *Eine Abbildung $f : X \to Y$ heißt* ***stetig in $x_0 \in X$****, falls es zu jeder Umgebung V von $f(x_0)$ eine Umgebung U von x_0 gibt mit $f(U) \subset V$.*

(b) *$f : X \to Y$ heißt* ***stetig (auf X)****, falls das Urbild jeder in Y offenen Menge in X offen ist, d.h.*

$$O \in \tau_Y \implies f^{-1}(O) \in \tau_X\,.$$

Definition 2.1.8 *Ist $f : X \to Y$ bijektiv und stetig und $f^{-1} : Y \to X$ auch stetig, so heißt f* ***Homöomorphisms****, X und Y heißen* ***homöomorph****, falls ein Homöomorphisms existiert.*

Definition 2.1.9 **(a)** *Eine Familie $\tau' \subset \tau$ heißt* ***Basis der Topologie*** *in (X, τ), falls jedes Element von τ eine Vereinigung von Elementen von τ' ist.*

(b) *Eine Familie γ_x von Umgebungen eines Punktes $x \in X$ heißt* ***Umgebungsbasis am Punkt x****, falls jede Umgebung von x ein Element von γ_x enthält.*

Definition 2.1.10 ***(Relativtopologie oder Spurtopologie)***
Jede Teilmenge M eines topologischen Raumes (X, τ) lässt sich in natürlicher Weise zu einem topologischen Raum machen: Mit

$$\tau' := \{M \cap V\,,\ V \in \tau\}$$

wird (M, τ') zum topologischen Raum.

Definition 2.1.11 *Seien zwei Topologien τ_1 und τ_2 auf X gegeben. Wir sagen* ***τ_1 ist feiner als τ_2 (τ_2 ist gröber als τ_1)****, falls $\tau_1 \supset \tau_2$. Ist $\tau_1 = \tau_2$, so heißen die Topologien* ***gleich****.*

Es gilt:

$\tau_1 \subset \tau_2 \iff$ für alle $x \in X$ gilt:
Jede τ_1–Umgebung von x enthält eine τ_2 –Umgebung von x

$\iff$ für alle $x \in X$ gilt:
Jedes Element einer τ_1–Umgebungsbasis von x enthält ein Element einer τ_2–Umgebungsbasis von x .

Definition 2.1.12 ***(Produkttopologie)***
Seien (X, τ_X) und (Y, τ_Y) topologische Räume. Dann ist die Familie von Mengen

$$\left\{O_x \times O_y \,\middle|\, O_x \in \tau_X\,,\ O_y \in \tau_Y\right\} \subset 2^{X\times Y}$$

eine Basis einer Topologie $\tau_{X\times Y}$ im kartesischen Produkt $X \times Y$.

2.2 Metrische Räume

Definition 2.2.1 *Sei $X \neq \emptyset$ eine Menge. Eine Abbildung $d\colon X \times X \to \mathbb{R}_0^+$ heißt* ***Abstand*** *oder* ***Metrik****, falls für alle $x, y, z \in X$ gilt:*

(M1) $d(x,y) = 0 \iff x = y$ ***(Definitheit)***

(M2) $d(x,y) = d(y,x)$ ***(Symmetrie)***

(M3) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ ***(Dreiecksungleichung)***

(X,d) heißt ***metrischer Raum****.*

Definition 2.2.2 **(a)** *Die Menge $B_r(x) = \{y \in X \mid d(x,y) < r\}$ heißt* ***offene Kugel*** *mit Mittelpunkt $x \in X$ und Radius $r > 0$.*

(b) $\overline{B_r}(x) := \left\{ y \in X \,\middle|\, d(x,y) \leq r \right\}$ *heißt* ***abgeschlossene Kugel****.*

(c) *$M \subset X$ heißt* ***offene Menge****, falls zu jedem $x_0 \in M$ eine Kugel $B_\varepsilon(x_0) \subset M$ mit $\varepsilon > 0$ existiert. Ferner seien $\emptyset$ und X offen.*

Satz 2.2.3 *Sei (X,d) ein metrischer Raum. Dann ist durch das System der offenen Mengen gemäß obiger Definition eine Topologie τ_d auf X erzeugt. Diese sogenannte* ***von der Metrik induzierte Topologie*** *τ_d erfüllt das Trennungsaxiom, d.h. (X, τ_d) ist ein Hausdorffraum.*

Vorsicht: Im Allgemeinen sind $\overline{B_r}(x)$ und $\overline{B_r(x)}$ nicht gleich, es gilt aber immer
$\overline{B_r(x)} \subset \overline{B_r}(x)$.

Eigenschaften metrischer Räume:

1. Jeder Punkt $x \in X$ besitzt eine abzählbare Umgebungsbasis $\left\{ B_{\frac{1}{n}}(x)\,,\; n \in \mathbb{N} \right\}$
2. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x \iff \lim\limits_{n\to\infty} d(x, x_n) = 0$ in $\mathbb{R}$
3. Zu jedem Häufungspunkt $x^* \in X$ einer Menge $M \subset X$ existiert eine Folge $(x_n)_{n \in N} \subset M$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x^*$.
4. $A \subset X$ ist abgeschlossen $\iff$ $\left[\begin{array}{l} A \subset X \text{ ist } \textbf{folgenabgeschlossen}\text{, d.h.} \\ \text{für alle Folgen } (x_k)_{k \in N} \subset A \text{ gilt :} \\ \quad \lim\limits_{k\to\infty} x_k = x^* \in X \implies x^* \in A \end{array}\right]$
5. x_0 ist innerer Punkt von $M \subset X$ genau dann, wenn ein $\varepsilon > 0$ existiert mit $B_\varepsilon(x_0) \subset M$

6. M ist nirgends dicht in $X\Big(\text{int}\,(\overline{M}) = \emptyset\Big) \iff$ Zu jeder Kugel $B_\varepsilon(x_0)$, $x_0 \in X$, $\varepsilon > 0$ existiert eine Kugel $B_\delta(x_1) \subset B_\varepsilon(x_0)$ mit $\delta > 0$ und $B_\delta(x_1) \cap M = \emptyset$

7. Seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume, $f\colon X \to Y$. Dann gilt:

(a) **($\varepsilon-\delta$-Kriterium)**
f ist stetig in $x_0 \iff$ für alle $\varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0$ so dass für alle $x \in X$ gilt:

$$\Big[d_X(x, x_0) < \delta \implies d_Y\left(f(x)\,,\, f(x_0)\right) < \varepsilon\Big].$$

(b) **(Folgenstetigkeit von f)**
f ist stetig in $x_0 \iff$ für alle Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ mit

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \text{ gilt } \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0).$$

8. Metrik im Produktraum. Seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume. Dann ist auch $(X \times Y\,,\, d_{X\times Y})$ ein metrischer Raum, vermöge

$$d_{X\times Y}\Big((x_1, y_1)\,,\, (x_2, y_2)\Big) = \sqrt{d_X^2(x_1, x_2) + d_Y^2(y_1, y_2)} \quad \textbf{(euklidische Metrik)}.$$

9. Homöomorphismen $f\colon X \to Y$ (X, Y metrische Räume), welche die Metrik respektieren, (d.h. $d_X(x_1, x_2) = d_Y(f(x_1)\,,\, f(x_2))$ für alle $x_1\,,\, x_2 \in X$) heißen **Isometrien**.

Satz 2.2.4 *Im metrischen Raum (X, d) sind äquivalent:*

(a) *$K \subset X$ ist kompakt (**überdeckungskompakt**)*

(b) *Jede Folge in K besitzt mindestens einen Häufungspunkt **in K** (**abzählbar kompakt**)*

(c) *Jede Folge in K besitzt eine konvergente Teilfolge mit Grenzwert **in K** (**folgenkompakt**)*

Bemerkung 2.2.5 *Der Satz gilt so im allgemeinen Hausdorffraum nicht. Für (b) $\implies$ (a) benötigt man zusätzlich das **2. Abzählbarkeitsaxiom** (Existenz einer abzählbaren Basis der Topologie) und für (b) $\implies$ (c) das **1. Abzählbarkeitsaxiom** (Existenz von abzählbaren Umgebungsbasen) (vgl. Schubert [Sch75] I. §7.4 Satz 3 und 1).*

2.3 Vollständigkeit im metrischen Raum. Der Satz von Baire.

Definition 2.3.1 *Eine Folge* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ *in* (X,d) *heißt* ***Cauchy–Folge****, falls zu jedem* $\varepsilon > 0$ *ein* $N = N(\varepsilon)$ *existiert mit* $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ *für alle* $n, m \geq N$.

Lemma 2.3.2 *Jede konvergente Folge* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ *ist auch Cauchy–Folge.*

Definition 2.3.3 *Der metrische Raum* (X,d) *heißt* ***vollständig****, falls jede Cauchy–Folge einen Grenzwert* $x_0 \in X$ *hat.*

Nicht jeder metrische Raum ist vollständig, er hat aber stets eine vollständige Erweiterung.

Satz 2.3.4 *Jeder metrische Raum* (X,d) *lässt sich in einen bis auf Isometrie eindeutig bestimmten, kleinsten vollständigen metrischen Raum* $\left(\tilde{X}, \tilde{d}\right)$ *(die sogenannte* **vollständige Hülle** *von* X*) einbetten.*

Beweisidee: Zwei Cauchyfolgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ seien äquivalent $:\Longleftrightarrow d(x_n\,,\,y_n) \to 0\,,\ n \to \infty$. Diese Äquivalenzrelation führt auf Klassen $[(x_n)_{n\in\mathbb{N}}]$, für welche $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein Representant ist. Setzt man

$$\tilde{X} := \left\{ \left[(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \right] \,\middle|\, (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \quad \text{ist Cauchy–Folge in } (X,d) \right\}$$

und

$$\tilde{d}\left(\left[(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \right], \left[(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \right] \right) := \lim_{n\to\infty} d\,(x_n\,,\,y_n)$$

ist $\left(\tilde{X}, \tilde{d}\right)$ vollständiger metrischer Raum, welcher die Elemente $x \in X$ vermöge $x \longmapsto \left[(x_n = x)_{n\in\mathbb{N}} \right]$ als konstante Folgen enthält.

□

Satz 2.3.5 (Schachtelsatz)
Sei (X,d) ***vollständiger*** *metrischer Raum, und seien* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ *und* $(r_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset (0,\infty)$ *Folgen mit*

$$\overline{B_{r_{n+1}}}\,(x_{n+1}) \subset \overline{B_{r_n}}\,(x_n) \quad \textit{und} \quad \lim_{n\to\infty} r_n = 0\,.$$

Dann gibt es genau ein $x_0 \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \overline{B_{r_n}}\,(x_n)$.

Definition 2.3.6 *Eine Teilmenge M eines metrischen Raumes (X, d) heißt von* **1. Kategorie** *(oder **mager**), falls sie Vereinigung abzählbar vieler in X nirgends dichter Mengen ist. Andernfalls heißt M von **2. Kategorie**.*

Der folgende Satz wird beim Beweis fundamentaler Sätze benötigt (z.B. Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit oder Open Mapping Theorem).

Satz 2.3.7 (Satz von Baire)

Jede nichtleere offene Menge eines vollständigen metrischen Raumes (X, d) ist von 2. Kategorie. Insbesondere ist X selbst von 2. Kategorie.

Kapitel 3

Topologische lineare Räume

Erklärtes Ziel wird es sein, die beiden Strukturen „Topologie“ und „linearer Raum“ zusammenzuführen.

Definition 3.0.1 *Ein linearer Raum X über dem Körper $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ mit Topologie τ heißt* ***topologischer linearer Raum****, falls die Vektorraum–Operationen*

$$(\text{„}+\text{“}: X \times X \to X \quad \textit{und} \quad \text{„}\cdot\text{“}: \mathbb{K} \times X \to X)$$

stetig sind.

3.1 Normierte Räume

Definition 3.1.1 *Sei X ein linearer Raum über $\mathbb{K}$. Die Abbildung $\|\cdot\| : X \to [0,\infty)$ heißt* ***Norm auf X****, falls für alle $x, y \in X$, $\alpha \in \mathbb{K}$ gilt:*

- ***(N1)*** $\|x\| = 0 \iff x = 0$ ***(Definitheit)***
- ***(N2)*** $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$ ***(Homogenität)***
- ***(N3)*** $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ ***(Dreiecksungleichung)***

$(X, \|\cdot\|)$ *heißt* ***normierter Raum****.*

Bemerkung 3.1.2

(a) *Durch $d(x,y) := \|x - y\|$ wird X zum metrischen und somit zum topologischen Raum. Die so induzierte (natürliche) Topologie auf $(X, \|\cdot\|)$ wollen wir* ***Normtopologie*** *nennen.*

(b) *Im normierten Raum $(X, \|\cdot\|)$ gilt die* ***untere Dreiecksungleichung***

$$\Big| \|x\| - \|y\| \Big| \leq \|x + y\| \quad \textit{für alle } x, y \in X\,. \tag{3.1.1}$$

(c) $\Big($Konvergenz in $\big(X, \|\cdot\|\big)\Big)$
Für $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ *gilt:*

$$x_n \longrightarrow x^* \quad (n \to \infty)\ (\textit{in } X) \iff \|x_n - x^*\| \longrightarrow (n \to \infty)\ (\textit{in } \mathbb{R})$$

Beispiele 3.1.3

1. $\mathbb{R}^n$ *und* $\mathbb{C}^n$ *sind mit* $\|x\|_p = \left(\sum\limits_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p}$, $1 \le p < \infty$, *normierte Räume. D.h.* $\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n$ *tragen überzählbar viele Normen.*

2. $C[a,b]$ *mit* $\|x\|_\infty := \max\limits_{t\in[a,b]} |x(t)|$ *ist normierter Raum.*

3. $C(\overline{\Omega})$ *mit* $\|x\|_\infty := \max\limits_{t\in\overline{\Omega}} |x(t)|$ *ist normierter Raum (für* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *beschränkt).*

4. $L^p(\Omega) = \mathcal{L}^p(\Omega)/\mathcal{N}$ *(*Ω *offen,* $\mathcal{N}$ *von (1.2.1)) ist mit* $\|x\|_p := \left(\int\limits_\Omega |x(t)|^p\, dt\right)^{1/p}$ *normierter Raum,* $1 \le p < \infty$ *(vgl. Section 1.2).*

5. ℓ^p *mit* $\|x\|_p := \left(\sum\limits_{i=1}^{\infty} |x_i|^p\right)^{1/p}$ *ist normierter Raum,* $1 \le p < \infty$.

Lemma 3.1.4 *Sei* $(X, \|\cdot\|)$ *normierter Raum. Dann sind die Abbildungen*

$$(x,y) \longmapsto x + y\,,\ (\alpha, x) \longmapsto \alpha x \quad \textit{und} \quad x \longmapsto \|x\| \quad \textit{stetig}\,.$$

Korollar 3.1.5 *Jeder normierte Raum versehen mit der Normtopologie ist ein topologischer linearer Raum.*

3.2 Topologische lineare Räume

Nach *Definition 3.0.1* müssen in topologischen linearen Räumen die Vektorraum–Operationen

$$s\colon X \times X \to X\,,\ (x,y) \mapsto x+y \qquad \text{und}$$
$$m\colon \mathbb{K} \times X \to X\,,\ (\alpha,x) \mapsto \alpha \cdot x$$

stetig sein. Für Mengen $M, M_1, M_2 \subset X$ und $A \subset \mathbb{K}$ setzen wir

$$M_1 + M_2 := s(M_1,M_2) = \{z = x+y \,|\, x \in M_1,\ y \in M_2\}$$
$$A \cdot M := m(A,M) = \{z = \alpha \cdot x \,|\, \alpha \in A\,,\ x \in M\}\ .$$

Lemma 3.2.1 *Hat der topologische Raum (X,τ) auch eine lineare Struktur, so gilt:*

*Die **Addition** s ist stetig* $\Longleftrightarrow$ *Für beliebiges $x,y \in X$ gilt: Zu jeder Umgebung $O_{x+y} \in \tau$ von $x+y$ existieren Umgebungen $O_x \in \tau$ von x und $O_y \in \tau$ von y mit $O_x + O_y \subset O_{x+y}$.*

Lemma 3.2.2 *Für (X,τ) mit linearer Struktur gilt:*
*Die **skalare Multiplikation** m ist stetig*

$\Longleftrightarrow$ *Für beliebiges $\alpha \in \mathbb{K}$ und $x \in X$ gilt:*
Zu jeder Umgebung $O_{\alpha x} \in \tau$ von αx existiert eine Umgebung $O_x \in \tau$ von x und es existiert ein $r > 0$, so dass

$$\beta \cdot O_x \subset O_{\alpha x} \quad \textit{für alle } \beta \quad \textit{mit } |\beta - \alpha| < r\,.$$

Korollar 3.2.3 *Im topologischen linearen Raum (X,τ) gilt für $x \in X$ beliebig:*

$$\beta_n \to 0 \textit{ in } \mathbb{K} \quad (n \to \infty) \quad \Longrightarrow \quad \beta_n x \to 0 \textit{ in } X \quad (n \to \infty)$$

Zu $x_0 \in X$ fest definieren wir den **Translationsoperator**

$$T_{x_0}: \begin{array}{rcl} X & \longrightarrow & X \\ x & \longmapsto & x + x_0 \end{array}$$

und zu $\alpha_0 \in \mathbb{K}^* := \mathbb{K} \setminus \{0\}$ den **Multiplikationsoperator**

$$M_{\alpha_0}: \begin{array}{rcl} X & \longrightarrow & X \\ x & \longmapsto & \alpha_0 \cdot x \end{array}$$

Lemma 3.2.4 *Ist X topologischer linearer Raum, dann sind sowohl die Translationsoperatoren, als auch die Multiplikationsoperatoren Homöomorphismen auf X.*

Insbesondere gilt:

$$O \in \tau \text{ ist Umgebung von } x_0 \iff -x_0 + O \in \tau \text{ ist Umgebung von Null}$$

Korollar 3.2.5 ***(Invarianzprinzip)***
Im topologischen linearen Raum (X, τ) ist die Topologie bereits durch die (offenen) Umgebungen von $0 \in X$ bestimmt. Alle anderen offenen Mengen entstehen durch Translation (O ist offen $\iff$ $x_0 + O$ ist offen)

Im Folgenden wollen wir metrische Räume mit linearer Struktur betrachten.

3.3 Metrische lineare Räume und quasi–normierte Räume

Definition 3.3.1 *Eine Metrik $d\colon X \times X \to \mathbb{R}$ auf dem linearen Raum X heißt* ***translationsinvariant****, falls gilt:*

$$d(x,y) \,=\, d(x+z\,,\; y+z) \quad \textit{für alle} \quad x,y,z \in X$$

(äquivalent: $d(x,y) \,=\, d(x-y,0)$ für alle $x,y \in X$)

Definition 3.3.2 *Ein metrischer Raum (X,d) mit linearer Struktur und translationsinvarianter Metrik d heißt* ***metrischer linearer Raum****, falls die Vektorraum–Operationen stetig sind.*

Lemma 3.3.3 *Im metrischen Raum (X,d) mit linearer Struktur und translationsinvarianter Metrik d ist die Addition immer stetig.*

Beispiel: $X \,=\, C(a,b)$ mit $d(x,y) \,=\, \min\left\{1\,,\, \sup\limits_{t\in(a,b)} |x(t)-y(t)|\right\}$ ist translationsinvariante Metrik, aber die skalare Multiplikation ist nicht stetig.

Lemma 3.3.4 *Sei (X,d) metrischer Raum mit linearer Struktur und mit einer translationsinvarianten Metrik. Dann ist X mit der von d erzeugten Topologie ein* ***metrischer linearer Raum*** *genau dann, wenn für alle $\alpha \in \mathbb{K}$, $x \in X$ und beliebige Nullfolgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$, $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{K}$ gilt:*

$$\left.\begin{array}{ll} \textbf{\textit{(a)}} & \alpha x_n \longrightarrow 0 \\ \textbf{\textit{(b)}} & \alpha_n x \longrightarrow 0 \\ \textbf{\textit{(c)}} & \alpha_n x_n \longrightarrow 0 \end{array}\right\} \quad \big(n \to \infty\big)$$

Definition 3.3.5 *Eine Abbildung $|\cdot| : X \to [0,\infty)$ heißt* ***Quasi–Norm*** *auf dem linearen Raum X, falls gilt:*

- ***(Q1)*** $|x| \geq 0$ *für alle* $x \in X$, $\Big(|x| \,=\, 0 \iff x \,=\, 0\Big)$ ***(positiv definit)***
- ***(Q2)*** $|-x| \,=\, |x|$ *für alle* $x \in X$
- ***(Q3)*** $|x+y| \,\leq\, |x| \,+\, |y|$ *für alle* $x,y \in X$ ***(Dreiecksungleichung)***
- ***(Q4)*** $|\alpha\, x_n| \to 0$ *für* $n \to \infty$ *und* $\alpha \in \mathbb{K}$, *falls* $|x_n| \to 0$ *für* $n \to \infty$
- ***(Q5)*** $|\alpha_n\, x| \to 0$ *für* $n \to \infty$ *und* $x \in X$, *falls* $|\alpha_n|_{\mathbb{K}} \to 0$ *für* $n \to \infty$
- ***(Q6)*** $|\alpha_n\, x_n| \to 0$ *für* $n \to \infty$, *falls* $|\alpha_n|_{\mathbb{K}} \to 0$ *und* $|x_n| \to 0$ *für* $n \to \infty$

$\big(X,\, |\cdot|\big)$ *heißt* ***quasi–normierter Raum****.*

Bemerkung 3.3.6 *Jeder normierte Raum ist auch ein quasi–normierter Raum* $(\,|\cdot| := \|\cdot\|\,)$.

Satz 3.3.7 **(a)** *Ist* $|\cdot|$ *eine Quasi–Norm auf* X, *so wird durch* $d(x,y) := |x-y|$ *eine translationsinvariante Metrik definiert, welche* X *zum metrischen linearen Raum macht.*

(b) *Ist* (X,d) *ein metrischer linearer Raum mit translationsinvarianter Metrik* d, *so ist* $\big(X,\,|\cdot|\big)$ *mit* $|x| := d(x,0)$ *ein quasi–normierter Raum.*

Fazit: Metrischer linearer Raum $\widehat{=}$ Quasi–normierter Raum.

Zusammenfassung: topologische lineare Räume

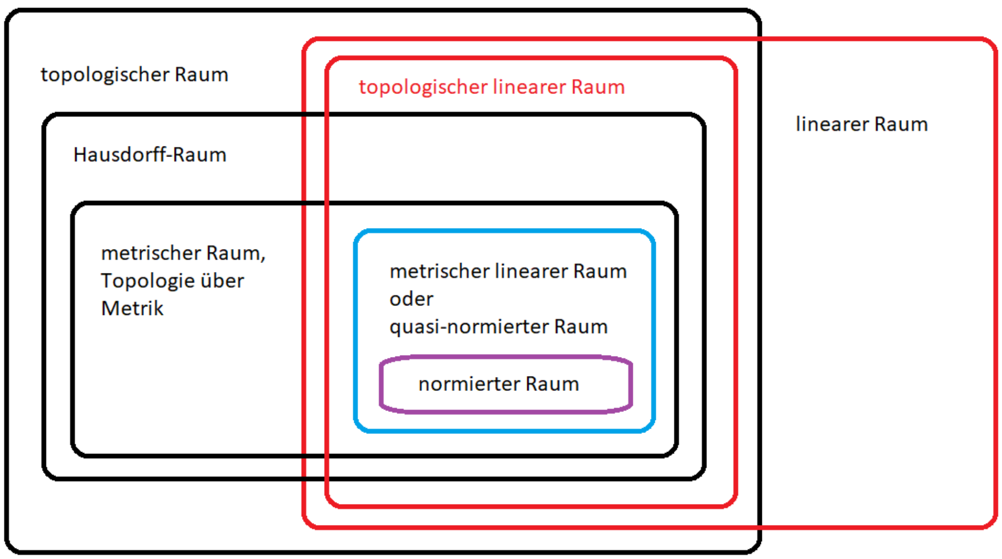

Abbildung 3.1: topologische und lineare Strukturen

Spezielle, für die Anwendung sehr wichtige, metrische lineare Räume werden von Semi–Normen erzeugt.

Definition 3.3.8 *Eine Abbildung* $p\colon X \to \mathbb{R}$ *heißt* ***Semi–Norm*** *oder* ***Halb–Norm***, *falls gilt:*

(S1) $p(x) \geq 0$ *(**ohne** Definitheit, nur **positiv**)*

(S2) $p(\alpha x) = |\alpha| \cdot p(x)$ *(**Homogenität**)*

(S3) $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$ *(**Dreiecksungleichung**)*

(X,p) *heißt* ***semi–normierter*** *Raum.*

Beispiel: $\mathcal{L}^p(\Omega)$ *mit* $p \geq 1$.

Bemerkung 3.3.9 *Jeder semi–normierte Raum* (X, p) *erzeugt einen normierten Raum* $(X/N, p)$, *wobei* $N = \{x \in X \mid p(x) = 0\}$ *Unterraum von* X *ist.*

Satz 3.3.10 *Es seien* $p_n : X \to \mathbb{R}\,,\ n \in \mathbb{N}$, ***abzählbar viele Semi–Normen*** *auf einem linearen Raum* X *mit der Eigenschaft*

$$p_n(x) \,=\, 0 \quad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{N} \implies x \,=\, 0\,. \tag{3.3.1}$$

Dann ist

$$d(x, y) \,=\, \sum_{n \in \mathbb{N}} 2^{-n} \, \frac{p_n(x - y)}{1 \,+\, p_n(x - y)} \tag{3.3.2}$$

eine translationsinvariante Metrik auf X, *welche* X *zum* ***metrischen linearen Raum*** *macht.*

Bemerkung 3.3.11 $p_n \colon X \to \mathbb{R}$ *sind auf dem oben definierten Raum* (X, d) *stetig.*

Satz 3.3.12 *Sei* (X, d) *der im Satz 3.3.10 gegebene metrische lineare Raum. Dann bilden die Mengen*

$$U\,(p_n, \varepsilon_n) \,=\, \Big\{x \in X \;\Big|\; p_n(x) < \varepsilon_n\Big\}\,,\ \varepsilon_n > 0\,, \tag{3.3.3}$$

und deren endliche Durchschnitte einer Umgebungsbasis von $0 \in X$ *der von* d *erzeugten Topologie* τ_d.

Bemerkung: Nach dem Invarianzprinzip ist damit von den $U\,(p_n, \varepsilon_n)$ bereits die ganze Topologie τ_d bestimmt.

Bemerkung 3.3.13 *Die Mengen* $U\,(p_n, \varepsilon_n)$ *(und deren endliche Schnitte) sind* ***konvex***, *d.h.* $x, y \in U\,(p_n, \varepsilon_n)\ ,\ \alpha \in (0, 1) \implies \alpha x + (1 - \alpha)\, y \in U\,(p_n, \varepsilon_n)$. *Damit hat der im Satz 3.3.10 gewonnene metrische lineare Raum* (X, d) *die Eigenschaft*

$$0 \in X \ \text{besitzt eine Umgebungsbasis, deren Elemente alle konvex sind} \tag{3.3.4}$$

Definition 3.3.14 *Ein topologischer linearer Raum* (X, τ) *mit der Eigenschaft (3.3.4) heißt* ***lokal–konvex***.

Es gilt:

Satz 3.3.15 *Sei* X *ein linearer Raum mit Semi–Normen* $p_i\,,\ i \in I$ *(= beliebige Indexmenge) und der Eigenschaft*

$$p_i(x) \,=\, 0 \quad \text{für alle} \quad i \in I \implies x \,=\, 0\,. \tag{3.3.5}$$

Dann sind die Mengen

$$U\,(p_i, \varepsilon_i) \,=\, \Big\{x \in X \;\Big|\; p_i(x) < \varepsilon_i\Big\}\,,\ \varepsilon_i > 0\,,\ i \in I$$

und deren endliche Schnitte eine konvexe Umgebungsbasis von $0 \in X$. *Die dadurch gewonnene Topologie* τ *macht* (X, τ) *zum* ***lokal–konvexen Hausdorffraum***.

3.4 Beispiele

Definition 3.4.1 **(a)** *Ein metrischer linearer Raum (X, d), der vollständig ist, heißt* ***Fréchetraum****.*

(b) *Ein normierter Raum $(X, \|\cdot\|)$, der vollständig ist, heißt* ***Banachraum****.*

1. Die Folgen–Räume ℓ^p

$\ell^p\,,\ 1 \le p < \infty\,,$ sind normierte Räume mit $\|x\|_p = \left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\right)^{1/p}$

ℓ^∞ ist normierter Raum mit $\|x\|_\infty = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} |x_n|$

$\ell^p\,,\ 0 < p < 1\,,$ sind quasi–normierte Räume mit $|x|_p := \sum\limits_{n=1}^{\infty} |x_n|^p$

Bemerkung 3.4.2 *Für $0 < p < q \le +\infty$ gilt $\ell^p \subset \ell^q \subset \ell^\infty$.*

Satz 3.4.3 *Für*

$1 \le p \le \infty$ *sind* $(\ell^p, \|\cdot\|_p)$ ***Banachräume***

und für

$0 < p < 1$ *sind* $(\ell^p, |\cdot|_p)$ ***Frécheträume****.*

2. Der Folgen–Raum $\mathbb{K}^\infty = \mathcal{S} = \left\{x = (\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}\,,\ \xi_n \in \mathbb{K}\right\}$

- $p_n(x) = |\xi_n|\,,\ p_n\colon \mathcal{S} \to \mathbb{R}$ ist eine abzählbare Familie von Semi–Normen auf $\mathcal{S}$ mit der Eigenschaft (3.3.1).
- $(\mathcal{S}, d)$ ist mit

$$d(x,y) = d_{\mathcal{S}}(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}\,\frac{p_n(x-y)}{1 + p_n(x-y)}$$

ein metrischer linearer Raum. Der Konvergenzbegriff entspricht der „komponentenweisen Konvergenz“, d.h. für $x_k = \left(\xi_n^k\right)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{S}$ gilt:

$$\begin{aligned} x_k \longrightarrow 0 \quad (k\to\infty) \text{ in } \mathcal{S} &\iff d(x_k\,,0) \longrightarrow 0 \quad (k\to\infty) \\ &\iff \left|\xi_n^k\right| \longrightarrow 0 \quad (k\to\infty) \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}\,. \end{aligned}$$

Übung: $\mathcal{S}$ ist vollständig, also ist $(\mathcal{S}, d_{\mathcal{S}})$ ein Fréchetraum.

Lemma 3.4.4 *In $(\mathcal{S}, d_{\mathcal{S}})$ gilt:*

(a) $B_1(0) = \mathcal{S}$.

(b) *Betrachte den linearen Unterraum* $M_{n_0} = \left\{ x = (\xi_n)_{n \in \mathbb{N}} \;\middle|\; \xi_i = 0\,,\, i = 1, \ldots, n_0 \right\}$.
Dann gilt: Für alle $r > 0 \quad \exists\, n_0 = n_0(r) \in \mathbb{N}$ *mit* $M_{n_0} \subset B_r(0)$.

Damit sieht man leicht, dass die Topologie in $(\mathcal{S}, d_{\mathcal{S}})$ nicht von einer Norm $\|\cdot\|$ erzeugt sein kann.

3. Räume beschränkter Funktionen

Sei S eine beliebige Menge und $B(S) := \{f : S \to \mathbb{K},\ f(S) \text{ ist beschränkt}\}$. Dann wird $B(S)$ mit

$$\big\|f\big\|_{B(S)} := \sup_{t \in S} \big|f(t)\big|$$

ein Banachraum.

4. Räume stetiger Funktionen

(A) Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt. Dann ist

$$C(K) = C^0(K) := \Big\{ f \colon K \to \mathbb{K},\ f \text{ ist stetig auf } K \Big\}$$

ein normierter Raum mit $\big\|f\big\|_{C(K)} = \big\|f\big\|_\infty := \max\limits_{t \in K} \big|f(t)\big| < \infty$.

Eigenschaften: $C(K) \subset B(K)$ und $f \in C(K)$ ist gleichmäßig stetig

Lemma 3.4.5 $C(K)$ *ist abgeschlossener Unterraum von* $\big(B(K),\ \|\cdot\|_{B(K)}\big)$ *und somit ein Banachraum.*

Das heißt, die Stetigkeit der Folgenglieder einer Folge $(f_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset C(K)$ vererbt sich bei Konvergenz auf die Grenzfunktion. Konvergenz in $(C(K)\,,\ \|\cdot\|_\infty)$ ist „gleichmäßig auf K“. Wegen dieser Eigenschaft ist die **Maximum–Norm** $\|\cdot\|_\infty$ die natürliche Norm auf $C(K)$.

(B) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen (auch unbeschränkt) und

$$C(\Omega) := \Big\{ f \colon \Omega \to \mathbb{K},\ f \text{ ist stetig auf } \Omega \Big\}.$$

Konstruktion einer Topologie über Semi–Normen:

Definition 3.4.6 *Es sei* $(K_m)_{m\in\mathbb{N}}$ *eine* ***Ausschöpfung*** *von* Ω *mit kompakten Mengen* $K_m \subset \Omega$, *d.h. es gelte*

$$\begin{cases} \Omega \;=\; \bigcup\limits_{m\in\mathbb{N}} K_m\,, \quad K_m \subset K_{m+1}\,, \\ K \subset \Omega \quad \textit{kompakt} \quad \Longrightarrow \quad K \subset K_m \quad \textit{für ein} \quad m \in \mathbb{N}\,. \end{cases} \tag{3.4.1}$$

Dann ist $C(\Omega)$ mit der Metrik

$$d(f,g) \;=\; d_{C(\Omega)}(f,g) \;:=\; \sum_{m\,\in\,\mathbb{N}} 2^{-m}\, \frac{\big\|f-g\big\|_{C(K_m)}}{1+\big\|f-g\big\|_{C(K_m)}}$$

ein Fréchetraum $\Big($wir verwenden die Semi–Normen $p_m(f) = \big\|f\big\|_{C(K_m)}\Big)$.

Konvergenz in $C(\Omega)$ entspricht der gleichmäßigen Konvergenz auf jedem Kompaktum $K \subset \Omega$

$$\begin{aligned} d(f_k,f) \to 0 \quad (k\to\infty) &\iff p_m(f_k - f) \to 0 \quad (k\to\infty) \qquad \text{für alle} \quad m \in \mathbb{N} \\ &\iff f_k \to f \quad (k\to\infty) \quad \text{in } C(K_m) \quad \text{für alle} \quad m \in \mathbb{N}\,. \end{aligned}$$

Insbesondere überträgt sich die Stetigkeit der Folgenelemente f_k einer konvergenten Folge $(f_k)_{k\,\in\,\mathbb{N}} \subset C(\Omega)$ auf die Grenzfunktion.

5. Räume differenzierbaren Funktionen

(A) Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt, $\ell \in \mathbb{N}_0$.
$C^\ell(K) \;:=\; \{f\colon K \to \mathbb{R}\,,\; D^\alpha f$ existiert und ist stetig für $|\alpha| \le \ell\}$, wobei
$\alpha \;=\; (\alpha_1,\ldots,\alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$ ein **Multi–Index** ist mit

$$|\alpha| \;=\; \sum_{i=1}^n \alpha_i\,,\;\; D^\alpha f \;=\; \frac{\partial^{|\alpha|}\, f}{\partial_{x_1}^{\alpha_1}\,\ldots\,\partial_{x_n}^{\alpha_n}} : K \to \mathbb{R}$$

$C^\ell(K)$ ist ein Banachraum mit der Norm

$$\big\|f\big\|_{C^\ell(K)} \;:=\; \max_{|\alpha|\,\le\,\ell} \left(\max_{x\in K}\, |D^\alpha f(x)|\right) \;=\; \max_{|\alpha|\,\le\,\ell}\, \big\|D^\alpha f\big\|_{C(K)}$$

Konvergenz in $C^\ell(K)$: gleichmäßige Konvergenz aller partiellen Ableitungen bis zur Ordnung ℓ auf ganz K.

(B) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $\ell \in \mathbb{N}_0$ fest.
$C^\ell(\Omega) := \Big\{ f : \Omega \to \mathbb{R}\,,\; D^\alpha f$ existiert und ist stetig für $|\alpha| \le \ell \Big\}$ ist Fréchetraum mit der Metrik

$$d(f,g) \;=\; d_{C^\ell(\Omega)}(f,g) \;:=\; \sum_{m=1}^{\infty} 2^{-m}\, \frac{p_{m,\ell}(f-g)}{1+p_{m,\ell}(f-g)}\,, \qquad \text{wobei}$$

$$p_{m,\ell}(f) \;=\; \max_{|\alpha|\le \ell} \Big\| D^\alpha f \Big\|_{C(K_m)} \qquad \Big(K_m \text{ wie in } (3.4.1)\Big)$$

eine abzählbare Familie von Semi–Normen ist mit der Eigenschaft

$$p_{m,\ell}(f) \;=\; 0 \quad \text{für alle} \quad m \in \mathbb{N} \;\Longrightarrow\; f \;=\; 0 \in C^\ell(\Omega)$$

Konvergenz in $C^\ell(\Omega)$: gleichmäßige Konvergenz aller partiellen Ableitungen bis zur Ordnung ℓ auf jedem Kompaktum $K \subset \Omega$.

(C) Unterräume von $C^\ell(\Omega)$

(C1) $C^\ell_B(\Omega) \;=\; \{ f \in C^\ell(\Omega) : D^\alpha f$ ist beschränkt auf Ω, $|\alpha| \le \ell \}$ wird zum normierten Raum mit

$$\big\|f\big\|_{C^\ell_B(\Omega)} \;:=\; \max_{|\alpha|\le\ell} \left(\sup_{x\in\Omega} \big| D^\alpha f(x) \big| \right).$$

Es gilt zwar

$$C^\ell_B(\Omega) \,\subset\, C^\ell(\Omega) \qquad \textbf{(algebraisch)}\,,$$

aber nicht **topologisch**, denn die Topologie auf $\Big(C^\ell_B(\Omega)\,,\; \|\cdot\|_{C^\ell_B(\Omega)} \Big)$ ist **nicht** die Spurtopologie von $C^\ell(\Omega)$.

(C2) $C^\ell_0(\Omega) \;:=\; \Big\{ f \in C^\ell(\Omega) \;\Big|\; \operatorname{supp}(f) \subset\subset \Omega \Big\}$.

Dabei verwenden wir:

Definition 3.4.7

(a) *Für $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : \Omega \to \mathbb{R}$ heißt*

$$supp(f) \;:=\; \overline{\{x \in \Omega\,,\; f(x) \ne 0\}}$$

der ***Träger*** *oder* ***Support*** *von f.*

(b) *$M \subset\subset \Omega \;:\Longleftrightarrow\; \overline{M}$ ist kompakt und $\overline{M} \subset \Omega$. Wir sagen M* ***liegt kompakt in Ω.***

Zwei Möglichkeiten $C_0^\ell(\Omega)$ zu topologisieren:

(a) $C_0^\ell(\Omega) \subset C^\ell(\Omega)$ mit Spurtopologie (Metrik)

(b) $C_0^\ell(\Omega) \subset C_B^\ell(\Omega)$ mit Spurtopologie (Norm)

Achtung: Diese Topologien sind **nicht** gleich.

(D) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen.

$$\begin{aligned} C^\infty(\Omega) \; &:= \; \Big\{ f : \Omega \to \mathbb{R}\,,\; D^\alpha f \text{ existiert und ist stetig für alle } \alpha \in \mathbb{N}_0^n \Big\} \\ &= \bigcap_{\ell \in \mathbb{N}} C^\ell(\Omega)\,. \end{aligned}$$

Topologie wieder über Semi–Normen:

$$p_m(f) \;=\; \max_{|\alpha| \le m} \; \big\| D^\alpha f \big\|_{C(K_m)} \;<\; \infty \qquad \Big(K_m \text{ wie in (3.4.1)} \Big)$$

$C^\infty(\Omega)$ ist Fréchetraum mit

$$d(f,g) \;=\; d_{C^\infty(\Omega)}(f,g) \;=\; \sum_{m=1}^{\infty} \; 2^{-m} \; \frac{p_m(f-g)}{1 + p_m(f-g)}\,.$$

Konvergenz in $C^\infty(\Omega)$: lokal (auf jedem Kompaktum $K \subset \Omega$) konvergieren **alle** Ableitungen gleichmäßig.

(E) Raum der Testfunktionen
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Wir setzen

$$C_0^\infty(\Omega) \;:=\; \Big\{ f \in C^\infty(\Omega) \,\Big|\, \operatorname{supp}(f) \;\subset\subset\; \Omega \Big\}\,.$$

Offensichtlich ist $C_0^\infty(\Omega) \subset C^\infty(\Omega)$ algebraisch, aber wählt man auf $C_0^\infty(\Omega)$ die Spurtopologie, bekommt man später Probleme. Wir wählen auf $C_0^\infty(\Omega)$ folgende **lokal–konvexe Topologie**. Zur Konstruktion einer Umgebungsbasis der $0 \in C_0^\infty(\Omega)$ benötigen wir

$$p(\xi) \;:=\; \sum_{k=0}^{\infty} \; 2^{-k} \; \frac{\|\xi\|_{C^k(\overline{\Omega})}}{1 + \|\xi\|_{C^k(\overline{\Omega})}} \quad \text{für} \quad \xi \in C_0^\infty(\Omega)\,.$$

Definition: Sei $M \subset X$ und X linearer Raum. Dann heißt

$$\operatorname{conv}(M) \;:=\; \left\{ x \,\middle|\, \exists\, \alpha_i > 0\,,\; x_i \in M\,,\; i \in \{1,\ldots,k\} \text{ mit } \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \;=\; 1\,,\; \sum_{i=1}^{k} \alpha_i\, x_i \;=\; x \right\} \qquad (3.4.2)$$

die **konvexe Hülle** von M.

Sei $(D_j)_{j\in\mathbb{N}}$ eine (vgl. Definition 3.4.6, insbes. $D_j \subset D_{j+1}$) von Ω mit offenen Mengen, welche kompakt in Ω liegen, d.h. $D_j \subset\subset \Omega$. Für $\varepsilon = (\varepsilon_j)_{j\in\mathbb{N}} \in \mathcal{S}$ mit $\varepsilon_j > 0$ definieren wir Umgebungen der $0 \in C_0^\infty(\Omega)$ durch

$$U_\varepsilon \,:=\, \operatorname{conv}\left(\bigcup_{j\,\in\,\mathbb{N}} \left\{\xi \in C_0^\infty(D_j) \,\middle|\, p(\xi) \,<\, \varepsilon_j\right\}\right). \tag{3.4.3}$$

Definition: Durch

$$\tau \,:=\, \text{topologisches Erzeugnis von } \left\{U_\varepsilon \colon \varepsilon \,=\, (\varepsilon_j)_{j\,\in\,\mathbb{N}} \in \mathcal{S}\,,\ \varepsilon_j > 0\right\} \subset 2^X$$

(endliche Schnitte, beliebige Vereinigungen, Translationen!) ist auf $X = C_0^\infty(\Omega)$ eine Topologie erklärt.

Schreibweise: $\big(\mathcal{D}(\Omega)\,,\,\tau_{\mathcal{D}}\big) \,:=\, \big(C_0^\infty(\Omega)\,,\,\tau\big)$

Bemerkung: Diese Topologie ist unabhängig von der Ausschöpfung $(D_j)_{j\,\in\,\mathbb{N}}$. Außerdem ist $\big(\mathcal{D}(\Omega)\,,\,\tau_{\mathcal{D}}\big)$ ein topologischer linearer Raum.

Lemma 3.4.8 $\big($***Charakterisierung von offenen Mengen in*** $\mathcal{D}(\Omega)\big)$
Es gilt:

$$O \in \tau_{\mathcal{D}} \iff \textit{für alle } \xi \in O \quad \exists\, \varepsilon = (\varepsilon_j)_{j\in\mathbb{N}} \in \mathcal{S} = \mathbb{R}^\infty\,,\ \varepsilon_j > 0\,,\ \textit{mit } \xi + U_\varepsilon \subset O\,.$$

Das heißt, die Topologie $\tau_{\mathcal{D}}$ und die Topologie

$$\tilde{\tau}_{\mathcal{D}} \,:=\, \left\{O \subset C_0^\infty(\Omega) \colon \textit{für alle } \xi \in O\; \exists\, \varepsilon = (\varepsilon_j)_{j\,\in\,\mathbb{N}} \in \mathcal{S} = \mathbb{R}^\infty\,,\ \varepsilon_j > 0\,,\ \textit{mit } \xi + U_\varepsilon \subset O\right\} \subset 2^X$$

sind gleich.

Lemma 3.4.8 zeigt insbesondere, dass die Mengen U_ε selbst bereits eine Umgebungsbasis von $0 \in C_0^\infty(\Omega)$ für $\tau_{\mathcal{D}}$ sind.

Korollar 3.4.9 *Die Mengen U_ε sind eine Umgebungsbasis von $0 \in C_0^\infty(\Omega)$ für die Topologie $\tau_{\mathcal{D}}$ und $\big(\mathcal{D}(\Omega)\,,\,\tau_{\mathcal{D}}\big)$ ist ein lokal–konvexer Hausdorffraum.*

Satz 3.4.10 $\big($***Charakterisierung von Nullfolgen in*** $(\mathcal{D}(\Omega))\big)$
$\xi_m \to 0 \quad (m \to \infty)$ *in* $\mathcal{D}(\Omega) \iff$

$$\begin{cases} \textbf{\textit{(i)}}\ \ \textit{Es existiert ein offenes } D \textit{ mit } D \subset\subset \Omega \quad \textit{und } \ \xi_m \in C_0^\infty(D) \ \ \textit{für alle } \ m \in \mathbb{N}. \\[1ex] \textbf{\textit{(ii)}}\ \ \textit{Für jedes } k \in \mathbb{N} \textit{ gilt: } \ \big\|\xi_m\big\|_{C^k(\overline{\Omega})} \longrightarrow 0 \ \ \textit{für } \ m \to \infty\,. \end{cases}$$

6. Lebesgue integrierbare Funktionen

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. In Beispiel 3.1.3 haben wir $\mathcal{L}^p(\Omega)$ und $L^p(\Omega)\,,\ 0 < p < \infty$, eingeführt.

Wir nennen eine Funktion $f\colon \Omega \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ **fast überall beschränkt**, falls ein $C \geq 0$ und eine Nullmenge M existiert, so dass $|f(t)| \leq C$ für alle $t \in \Omega \setminus M$. Für $p = \infty$ setzen wir

$$\mathcal{L}^\infty(\Omega) := \Big\{ f\colon \Omega \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}\colon\ \ f \text{ ist messbar und fast überall beschränkt} \Big\}.$$

Offenbar gilt: $C(\Omega) \cap B(\Omega) \subset \mathcal{L}^\infty(\Omega)$. Sei

$$\big\|f\big\|_{L^\infty(\Omega)} = \sup_{t\in\Omega} \text{ess}\, |f(t)| := \inf_{\substack{M\subset\Omega \\ M \text{ Nullmenge}}} \ \sup_{t\in\Omega\setminus M} |f(t)| \tag{3.4.4}$$

das **wesentliche Supremum** von $f \in \mathcal{L}^\infty(\Omega)$. Dann gilt für $f \in \mathcal{L}^\infty(\Omega)\colon \big\|f\big\|_{L^\infty(\Omega)} = 0 \iff f = 0$ fast überall in Ω.

$\Big(\mathcal{L}^\infty(\Omega),\ \|\cdot\|_{L^\infty(\Omega)}\Big)$ ist ein semi–normierter Raum und mit $\mathcal{N} := \Big\{ f \in \mathcal{L}^\infty(\Omega) \,\Big|\, \big\|f\big\|_{L^\infty(\Omega)} = 0 \Big\}$ wird $\Big(L^\infty(\Omega) := \mathcal{L}^\infty(\Omega)/\mathcal{N}\,,\ \|\cdot\|_{L^\infty(\Omega)}\Big)$ zum normierten Raum.

Bemerkungen:

1. Es gilt die **Hölder'sche Ungleichung**

$$\big\|f\cdot g\big\|_{L^1(\Omega)} \leq \big\|f\big\|_{L^p(\Omega)} \cdot \big\|g\big\|_{L^q(\Omega)} \text{ für } f \in L^p(\Omega)\,,\ g \in L^q(\Omega)\,,\ p \geq 1 \text{ und } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\,.$$

2. Für Ω messbar und beschränkt gilt

$$L^\infty(\Omega) \subset L^p(\Omega) \subset L^q(\Omega) \quad \text{für} \quad 0 < q < p \leq \infty\,.$$

3. $C_0^\infty(\Omega)$ ist nicht abgeschlossen in $(L^p(\Omega)\,,\ \|\cdot\|_p)$. Für $1 \leq p < \infty$ gilt sogar

$$cl_{\|\cdot\|_{L^p(\Omega)}}\Big(C_0^\infty(\Omega)\Big) = \overline{C_0^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_{L^p(\Omega)}} = L^p(\Omega)\,,$$

d.h. $C_0^\infty(\Omega)$ liegt dicht in $L^p(\Omega)$.

4. Satz von Riesz–Fischer (1906)
$\big(L^p(\Omega)\,,\ \|\cdot\|_{L^p(\Omega)}\big)$, $1 \leq p \leq \infty$ sind vollständig, also Banachräume.

Konvexe offene Mengen in $L^p(0,1)\,,\ 0 < p < 1$ **.**

Lemma 3.4.11 *$L^p(0,1)\,,\ 0 < p < 1$ ist **nicht** lokal–konvex. Tatsächlich gibt es in $X = L^p(0,1)$ außer $\emptyset$ und X selbst keine offenen konvexen Mengen.*

7. Sobolev–Räume $W^{k,p}(\Omega)\,,\ k \in \mathbb{N}_0\,,\ 1 \leq p < \infty$ ($\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen)

Aus Analysis bekannt: Formel der partiellen Integration. Für alle $f, h \in C^1(\overline{\Omega})$, wobei Ω beschränkt und $\partial\Omega$ hinreichend glatt, gilt:

$$\int\limits_{\Omega} f(t) \cdot \left[\frac{\partial}{\partial t_i} h(t)\right] dt = \int\limits_{\partial\Omega} f(t) \cdot h(t) \cdot \nu_i \, dS(t) - \int\limits_{\Omega} \left[\frac{\partial}{\partial t_i} f(t)\right] \cdot h(t) \, d(t) \tag{3.4.5}$$

$$\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_n)^\top \in \mathbb{R}^n \quad \text{äußere Einheitsnormale}$$

Bemerkung: Für f oder $h \in C_0^\infty(\Omega)$ fallen die Randterme weg.

Das führt auf folgende Definition:

Definition 3.4.12 *Sei $f \in L^p(\Omega)$ und $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Dann heißt $g \in L^p(\Omega)$ **verallgemeinerte Ableitung** (oder **schwache Ableitung**) von f nach t_i, für ein $i \in \{1, \ldots, n\}$, falls gilt:*

$$\int\limits_{\Omega} f(t) \, \frac{\partial \phi}{\partial t_i}(t) \, dt \; = \; - \int\limits_{\Omega} g(t) \, \phi(t) \, dt \quad \textit{für alle} \quad \phi \in C_0^\infty(\Omega) \tag{3.4.6}$$

Lemma 3.4.13 *Verallgemeinerte Ableitungen sind eindeutig bestimmt.*

Bemerkungen:

1. Schreibweise: $d_{t_i} f \; := \; g$

2. Für beschränktes Ω und $f \in C^1(\overline{\Omega})$ ist Definition 3.4.12 mit $g = D_{t_i} f = \frac{\partial f}{\partial t_i} \in C^0(\overline{\Omega}) \subset L^p(\Omega)$ erfüllt. Mithin gilt in dieser Situation

$$d_{t_i} f \; = \; D_{t_i} f \; (= \text{ klassische partielle Ableitung von } f \text{ nach } t_i).$$

Hier stimmt also die klassische und die schwache Ableitung überein.

3. Per Induktion werden höhere (schwache) Ableitungen definiert.
Ist $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$ ein **Multi-Index**, so hat man:

$$d^\alpha f \; = \; \underbrace{d_{t_1} \, \cdots \, d_{t_1}}_{\alpha_1\text{–mal}} \; \cdots \; \underbrace{d_{t_n} \, \cdots \, (d_{t_n} f)}_{\alpha_n\text{–mal}} \; \in L^p(\Omega)$$

Definition 3.4.14 *Sei $k \in \mathbb{N}_0\,,\ 1 \leq p < \infty$. Dann ist der **Sobolev–Raum** $W^{k,p}(\Omega)$ definiert durch:*

$$W^{k,p}(\Omega) \; := \; \Big\{ f \in L^p(\Omega) \; \Big| \; \begin{array}{l} f \textit{ besitzt verallgemeinerte Ableitungen } d^\alpha f \in L^p(\Omega) \\ \textit{für alle } \alpha \in \mathbb{N}_0^n \textit{ mit } 0 \, \leq \, |\alpha| \, \leq \, k \end{array} \Big\}$$

$$\Big(W^{0,p}(\Omega) \; := \; L^p(\Omega) \Big)$$

Lemma 3.4.15 ***(Leibniz'sche Regel)***
Sei $1 \leq p < \infty$ und $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Dann gilt für alle $f \in W^{k,p}(\Omega)$ und für alle $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ mit $0 \leq |\alpha| \leq k$:

$$\int_\Omega d^\alpha f(t)\ \phi(t)\,dt \;=\; (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega f(t)\,D^\alpha\phi(t)\,dt \quad \textit{für alle} \quad \phi \in C_0^\infty(\Omega) \tag{3.4.7}$$

Bemerkung: Ist umgekehrt $(f^\alpha)_{0\leq|\alpha|\leq k} \subset L^p(\Omega)$ eine Familie von Funktionen für die

$$\int_\Omega f^\alpha(t)\ \phi(t)\,dt \;=\; (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega f(t)\,D^\alpha\phi(t)\,dt \quad \text{für alle} \quad \phi \in C_0^\infty(\Omega) \tag{3.4.8}$$

gilt, so ist $f^0 \in W^{k,p}(\Omega)$ und $\partial^\alpha f^0 = f^\alpha$.

Satz 3.4.16 *$W^{k,p}(\Omega)$ ist mit der Norm*

$$\|f\|_{W^{k,p}(\Omega)} := \left(\sum_{0\leq|\alpha|\leq k} \|d^\alpha f\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{1/p}$$

ein Banachraum.

3.5 Beschränkte und kompakte Mengen im metrischen linearen Raum

Ziel: Konzept der Beschränkheit im metrischen linearen Raum.

Problem: $d(x, 0) \leq M$ für alle $x \in B$ definiert keine Beschränkheit.

Definition 3.5.1 *(X, τ) sei topologischer linearer Raum. $B \subset X$ heißt* ***beschränkt****, falls für jede (offene) Umgebung U von $0 \in X$ eine Zahl $\alpha = \alpha_U > 0$ existiert, mit*

$$B \subset \alpha U = \Big\{ \alpha x \;\big|\; x \in U \Big\} .$$

Satz 3.5.2 *Sei (X, d) metrischer linearer Raum, dessen Metrik gemäß Satz 3.3.10 von abzählbar vielen Semi–Normen p_n , $n \in \mathbb{N}$, induziert ist. Dann gilt:*

$$B \subset X \text{ ist beschränkt} \quad \Longleftrightarrow \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N} \quad \exists\, M_k > 0 \text{ mit } p_k(x) \leq M_k \text{ für alle } x \in B$$

Korollar 3.5.3 *Sei $(X\,, \|\cdot\|)$ normierter Raum. Dann gilt:*

$$B \subset X \text{ ist beschränkt} \quad \Longleftrightarrow \quad \exists\, M > 0 \text{ mit } \|x\| \leq M \text{ für alle } x \in B$$

Bemerkung 3.5.4 *Kugeln $B_r(0)$ in (X, d), wenn d mittels abzählbar vieler Semi–Normen definiert ist, sind also unbeschränkt, wenn nichttriviale Unterräume $M_{n_0} \subset B_r(0)$ existieren (wie z.B. bei $X = \mathbb{K}^\infty$, oder $C^l(\Omega)$ (vgl. Lemma 3.4.4)).*

Definition 3.5.5 *Ein topologischer linearer Raum (X, τ) heißt* ***lokal beschränkt****, falls $0 \in X$ eine beschränkte (offene) Umgebung hat.*

Bemerkung 3.5.6 *Normierte Räume sind lokal beschränkt und lokal konvex. Es gilt aber auch die „Umkehrung“.*

Satz 3.5.7 ***(Kolmogorov)***
Ein topologischer linearer Raum (X, τ) ist genau dann normierbar (d.h. die Topologie ist von einer Norm erzeugt), wenn (X, τ) lokal konvex und lokal beschränkt ist.

Beweis: *z.B. [Rud73] Theorem 1.39.*

Definition 3.5.8 *Sei (X, τ) topologischer linearer Raum. Eine Umgebung U von $0 \in X$ heißt* ***balanced*** *oder* ***kreisförmig****, falls*

$$t\,U \subset U \quad \text{für alle} \quad |t| \leq 1 .$$

Lemma 3.5.9 *Im topologischen linearen Raum (X, τ) besitzt $0 \in X$ eine Umgebungsbasis kreisförmiger Mengen.*

Lemma 3.5.10 *Sei (X, τ) topologischer linearer Raum und $V \in \tau$ eine Umgebung von $0 \in X$. Dann gilt*

$$X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} nV .$$

Satz 3.5.11 *Sei (X, τ) topologischer linearer Raum mit Trennungsaxiom und $K \subset X$ sei kompakt. Dann ist K abgeschlossen und beschränkt. Falls auch die Umkehrung in (X, τ) gilt, so sagt man, (X, τ) hat die* ***Heine–Borel–Eigenschaft****.*

Warnung: Die Umkehrung gilt im Allgemeinen nicht.

Definition 3.5.12

(a) *Im topologischen Raum (X, τ) heißt $A \subset X$* ***relativ kompakt****, falls $\overline{A}$ kompakt ist.*

(b) *Im metrischen Raum (X, d) heißt $A \subset X$* ***präkompakt****, falls für alle $\varepsilon > 0$ die Menge A eine endliche Überdeckung mit ε–Kugeln besitzt.*

Satz 3.5.13 *Sei (X, d) metrischer Raum und $\emptyset \neq A \subset X$. Dann sind äquivalent:*

(a) *A ist kompakt*

(b) *A ist folgenkompakt (jede Folge in A besitzt eine konvergente Teilfolge mit Grenzwert in A)*

(c) *(A, d) ist vollständig und A ist präkompakt*

Korollar 3.5.14 *Ist (X, d) vollstängiger metrischer Raum und $A \subset X$, dann gilt*
A ist präkompakt $\iff$ A ist relativ kompakt.

Ziel: Kompaktheitskriterien in bestimmten topologischen linearen Räumen.

Satz 3.5.15 ***(Ascoli–Arzela)***
Sei $S \subset \mathbb{R}^n$ kompakt und $C(S; \mathbb{R}^m)$ mit Norm

$$\|f\|_\infty = \|f\|_{C(S)} := \max_{x \in S} |f(x)|_{\mathbb{R}^m} .$$

Dann gilt: $A \subset C(S; \mathbb{R}^m)$ ist präkompakt

$$\iff \begin{cases} \textbf{(a) } A \text{ ist beschränkt } \left(\text{d.h. } \exists\ M > 0,\ \sup_{f \in A} \|f\|_\infty \le M \right) \\ \textbf{(b) } A \text{ ist } \textbf{gleichgradig stetig}, \text{ d.h. } \sup_{f \in A} |f(x) - f(y)|_{\mathbb{R}^m} \to 0 \text{ für } |x - y|_{\mathbb{R}^n} \to 0 \end{cases}$$

Satz 3.5.16 ***(Fréchet, Kolmogorov)***
Sei $1 \leq p < \infty$. Dann ist $A \subset L^p(\mathbb{R}^n)$ präkompakt genau dann, wenn

- ***(a)*** *A ist beschränkt*
- ***(b)*** *A ist im **Mittel gleichgradig stetig**, d.h. $\sup\limits_{f\in A} \big\| f(\cdot + h) - f \big\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \longrightarrow 0$ für $|h| \to 0$*
- ***(c)*** *$\sup\limits_{f\in A} \big\| f \big\|_{L^p(\mathbb{R}^n \setminus B_R(0))} \longrightarrow 0$ für $R \longrightarrow \infty$.*

Bemerkungen:

(1) Für $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ gibt der Satz entsprechend ($\mathbb{R}^n$ ist durch Ω zu ersetzen, $f(\cdot + h) \in L^p(\Omega)$, wenn man $f_{|\Omega^c} \equiv 0$ setzt).

(2) Ist $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt, ist **(c)** von oben überflüssig.

Hölder–Räume

Definition 3.5.17 ***(Hölder–Räume)***
Sei $S \subset \mathbb{R}^n$ kompakte Menge und $0 < \alpha \leq 1$.

$$C^{0,\alpha}(S) := \Big\{ f\colon S \to \mathbb{K}\,,\ f \text{ ist gleichmäßig } \alpha\text{–Hölder stetig auf } S \Big\}\,,$$

*wobei f **gleichmäßig** α**–Hölder stetig** auf S ist, falls*

$$f \text{ ist stetig und } \sup_{\substack{t_1 \neq t_2 \\ t_i \in S}} \frac{\big|f(t_1) - f(t_2)\big|}{\big|t_1 - t_2\big|^\alpha} < \infty\,. \tag{3.5.1}$$

Es gilt $C^1(S) \subset C^{0,\beta}(S) \subset C^{0,\alpha}(S) \subset C^0(S) = C(S)$ für $1 \geq \beta \geq \alpha > 0$. $C^{0,\alpha}(S)$ wird normierter vollständiger Raum durch

$$\big\|f\big\|_\alpha := \big\|f\big\|_{C(S)} + \sup_{\substack{t_1 \neq t_2 \\ t_i \in S}} \frac{\big|f(t_1) - f(t_2)\big|}{\big|t_1 - t_2\big|} < \infty\,.$$

Es ist nur ein **hinreichendes** Kompaktheitskriterium bekannt:

Satz 3.5.18 *$A \subset C^{0,\alpha}(S)$ ist präkompakt, falls $A \subset C^{0,\beta}(S)$ (für ein $\beta > \alpha$) und als Teilmenge von $C^{0,\beta}(S)$ beschränkt ist.*

Literatur: *[Alt92] Übung 2.7*

3.6 Stetige lineare Operatoren

Seien X, Y topologische lineare Räume, $T\colon X \to Y$ linear.

Frage: Ist dann T stetig? Im Allgemeinen gilt das so nicht.

Beispiel 3.6.1 ***(einer unstetigen linearen Abbildung)***
Sei $X = \mathcal{S} = \mathbb{R}^\infty$ *und*

$$e_i := (0, 0, \underset{\substack{\uparrow \\ i\text{–te Stelle}}}{1}, 0 \ldots) \in \mathcal{S}\,,\ i \in \mathbb{N}.$$

$\{e_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ *werden zu einer* ***Hamel–Basis*** $B = \{w_i\}_{i\in I}$ *von* X *ergänzt. Dann ist durch*

$$\begin{aligned} T\colon X &\longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{mit} \\ T(e_i) &:= 1 \\ T(w) &:= 0\,,\ w \in B \setminus \{e_i \mid i \in \mathbb{N}\} \end{aligned}$$

und lineare Fortsetzung $\left(T\left(\sum_{endl.} \alpha_i\, w_i\right) := \sum_{endl.} \alpha_i\, T\,(w_i)\right)$ *eine Abbildung definiert, welche linear, aber in* $0 \in X$ *nicht stetig ist.*

Satz 3.6.2 *Seien* $X, Y \neq \{0\}$ *normierte (oder metrische lineare) Räume. Dann gilt:*

$$\dim X = \infty \iff \text{es existiert eine unstetige lineare Abbildung } T\colon X \to Y$$

Stetigkeit in normierten Räumen

Definition 3.6.3 *Seien* X, Y *topologische lineare Räume. Eine Abbildung* $F\colon X \to Y$ *heißt* ***beschränkt****, falls das Bild jeder in* X *beschränkten Menge, in* Y *beschränkt ist.*

Satz 3.6.4 X, Y *seien normierte* $\mathbb{K}$*–Vektorräume,* $T\colon X \to Y$ *sei linear und* $x^* \in X$ *sei beliebig, aber fest. Dann sind äquivalent:*

(1) T *ist stetig*

(2) T *ist stetig in* x^*

(3) T *ist beschränkt*

(4) $\sup\limits_{\|x\|_X \le 1} \big\|T(x)\big\|_Y =: M < \infty$

(5) *Es gibt eine Konstante* $C \ge 0$ *mit* $\big\|T(x)\big\|_Y \le C\,\|x\|_X$ *für alle* $x \in X$

Zusatz: $M = \inf \left\{ C \geq 0 \mid \textit{die Ungleichung in (5) ist für } C \textit{ erfüllt} \right\}$

Korollar 3.6.5 *In der Situation von Satz 3.6.4: Ist T zusätzlich bijektiv, gilt:*
T ist Homöomorphisms (T stetig, T^{-1} existiert stetig)

$$\iff \exists\, m, M > 0 \text{ mit } m\,\|x\|_X \leq \|T(x)\|_Y \leq M\,\|x\|_X \text{ für alle } x \in X\,.$$

Charakterisierung von Stetigkeit im metrischen linearen Räumen

Satz 3.6.6 *Sei $T\colon X \to Y$ linear, X, Y metrische lineare Räume. Dann gilt:*

$$T \text{ ist stetig} \iff T \text{ ist beschränkt}$$

Beweis: *[Rud73] Theorem 1.32*

Sind X, Y metrische lineare Räume, deren Metrik durch abzählbar viele Semi–Normen $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X, $(q_m)_{m\in\mathbb{N}}$ in Y erzeugt werden (vgl. (3.3.2)), so gilt:

Satz 3.6.7 *In der obigen Situation mit $T\colon X \to Y$ linear gilt:*
T ist stetig

$\iff$ *für alle $m \in \mathbb{N}$ existieren $M_m > 0$, $k = k(m) \in \mathbb{N}$ und Indizes $n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}$, so dass*

$$q_m\big(T(x)\big) \leq M_m\big(p_{n_1}(x) + \ldots + p_{n_k}(x)\big) \text{ für alle } x \in X\,.$$

Räume von stetigen Operatoren

Definition 3.6.8 *Seien X, Y topologische lineare Räume. Dann bezeichnet*

$$\mathcal{L}(X,Y) := \Big\{ T\colon X \to Y \;\Big|\; T \text{ ist linear und stetig} \Big\}$$

*den Raum der **stetigen (beschränkten) Operatoren** ($\widehat{=}$ lineare stetige Abbildungen).*

*Im Spezialfall $Y = \mathbb{R}$, sei $X' := \mathcal{L}(X, \mathbb{R})$ der Raum der **stetigen Funktionale**.*
*X' heißt **Dualraum** von X.*

Falls X und Y normiert sind, so wird $\mathcal{L}(X,Y)$ ebenfalls normierter Raum mit der **Operatoren–Norm**

$$\|T\| = \|T\|_{\mathcal{L}(X,Y)} := \sup_{\|x\|_X \leq 1} \|T(x)\|_Y = \inf \Big\{ M \;\Big|\; \|T(x)\|_Y \leq M\|x\|_X \text{ für alle } x \in X \Big\} \quad (3.6.1)$$

Satz 3.6.9 *Seien X, Y normierte Räume, Y sei zusätzlich vollständig. Dann ist $\mathcal{L}(X,Y)$ Banachraum. Insbesondere ist X' immer Banachraum.*

Zusatz: *Sei Z ebenfalls normierter Raum. Ist $T \in \mathcal{L}(X,Y)$, $S \in \mathcal{L}(Y,Z)$, so ist $S \circ T \in \mathcal{L}(X,Z)$ und $\|S \circ T\|_{\mathcal{L}(X,Z)} \leq \|S\|_{\mathcal{L}(Y,Z)} \cdot \|T\|_{\mathcal{L}(X,Y)}$.*

Korollar 3.6.10 *Ist X Banachraum, dann ist $\mathcal{L}(X) := \mathcal{L}(X,X)$ eine **Banach–Algebra**, d.h. ein vollständiger normierter Raum mit der Norm $\|T\| := \|T\|_{\mathcal{L}(X)}$ und einer vernünftigen Multiplikation. Es gilt*

$$T, S \in \mathcal{L}(X) \implies T \cdot S := T \circ S \in \mathcal{L}(X) \quad \textit{und} \quad \|T \cdot S\| \leq \|T\| \cdot \|S\|\,.$$

Bemerkung 3.6.11 *Ist $T \in \mathcal{L}(X,Y)$, so ist der Kern (Nucleus)*

$$ker(T) = N(T) = \Big\{x \in X \;\Big|\; Tx = 0\Big\} = T^{-1}(\{0\})$$

stets abgeschlossen in X. Das Bild (Range) $im(T) = R(T) = \{Tx \in Y : x \in X\}$ ist im Allgemeinen jedoch nicht abgeschlossen.

Satz 3.6.12 ***(Neumann'sche Reihe)***
X sei Banachraum und $T \in \mathcal{L}(X)$ mit

$$\limsup_{m\to\infty} \|T^m\|^{1/m} < 1$$

gegeben. Dann ist $(Id - T)^{-1} \in \mathcal{L}(X)$ und es gilt

$$(Id - T)^{-1} = \lim_{m\to\infty} \sum_{n=0}^{m} T^n =: \sum_{n=0}^{\infty} T^n \in \mathcal{L}(X)$$

mit Konvergenz in $\mathcal{L}(X)$.

Korollar 3.6.13 *Seien X, Y Banachräume und*

$$\mathcal{L}_{inv}(X,Y) := \Big\{T \in \mathcal{L}(X,Y) \,\Big|\, T^{-1} \textit{ existiert und ist stetig, also } T^{-1} \in \mathcal{L}(Y,X)\Big\}\,.$$

Dann ist $\mathcal{L}_{inv}(X,Y) \subset \mathcal{L}(X,Y)$ eine offene Teilmenge von $\mathcal{L}(X,Y)$.

Anwendung 3.6.14 ***(Volterra'sche Integralgleichung)***
Sei $k\colon [a,b] \times [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, $y \in C[a,b]$ gegeben. Dann hat

$$y(t) = x(t) - \int_a^t k(s,t) \cdot x(s)\, ds$$

genau eine Lösung $x \in C[a,b]$.

3.7 Endlich dimensionale normierte Räume

Satz 3.7.1 *Sei X normierter Vektorraum über $\mathbb{K}$ ($= \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$) mit* $\dim X = n < \infty$*.*
*Dann ist X **algebraisch** und **topologisch isomorph** zum $\mathbb{K}^n$ versehen mit der Norm*

$$\|\xi\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |\xi_i| \, , \quad \xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in \mathbb{K}^n \, .$$

Korollar 3.7.2 *X, Y seien normierte Räume gleicher Dimension $n \in \mathbb{N}$.*
Dann sind X und Y algebraisch und topologisch isomorph.

Korollar 3.7.3 *X sei linearer Raum der Dimension n.*

$\| \cdot \|_a \, , \, \| \cdot \|_b$ seien zwei Normen auf X. Dann sind $\| \cdot \|_a$ und $\| \cdot \|_b$ äquivalent.

Satz 3.7.4 *X sei normierter Raum. Gilt* $\dim X < \infty$*, dann hat X die Heine–Borel–Eigenschaft, d.h. Teilmengen von X sind genau dann kompakt, wenn sie abgeschlossen und beschränkt sind.*

Korollar 3.7.5 $\big(X, \| \cdot \|\big)$ *sei normierter Raum. $M \subset X$ sei ein linearer Unterraum.*
Gilt $\dim M < \infty$*, dann ist M abgeschlossen.*

Bemerkung: Eine analoge Aussage gilt auch im topologischen linearen Raum, ist aber ungleich schwerer zu zeigen (vgl. [Rud73] Theorem 1.21).

Unendlich dimensionale lineare Unterräume von normierten Räumen können, müssen aber nicht, abgeschlossen sein.

Zur Vorbereitung der „Umkehrung“ von Satz 3.7.4 benötigen wir das Riesz’sches Lemma:

Lemma 3.7.6 ***(Riesz 1880 – 1956; Existenz eines fast „orthogonalen“ Elements im normierten Raum)*** *Sei X normierter Raum und $M \subsetneqq X$ abgeschlossener Unterraum. Dann existiert für jedes $\Theta \in (0,1)$ ein Element $x_\Theta \in X$ mit $\|x_\Theta\| = 1$ und $\|x - x_\Theta\| \geq \Theta$ für alle $x \in M$.*

Satz 3.7.7 *Es sei X ein normierter Raum.*
X hat die Heine–Borel–Eigenschaft genau dann, wenn $\dim X$ *endlich ist.*

Merkregel: $\big(X, \| \cdot \|\big)$, $\dim X = \infty \implies$ Die Einheitssphäre $S_1 = \{x \in X : \|x\| = 1\}$ ist **nicht** kompakt.

Kapitel 4

Unitäre Räume und Hilberträume

4.1 Grundbegriffe

Sei wieder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

Definition 4.1.1 *Sei X ein linearer Raum über $\mathbb{K}$. Eine Abbildung $\langle \cdot\,, \cdot \rangle \colon X \times X \to \mathbb{K}$ heißt* ***Skalarprodukt auf*** *X, falls gilt:*

(U1) $\langle x, x \rangle > 0$ *für alle $x \in X$ mit $x \neq 0$.* ***(positiv definit)***

(U2) $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$ *für alle $x, y \in X$.* ***(hermitesch)***

(U3) $\langle x, \alpha y + \beta z \rangle = \alpha \langle x, y \rangle + \beta \langle x, z \rangle$ *für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, $x, y, z \in X$.* ***(2. Komponente linear)***

$\Big(X, \langle \cdot\,, \cdot \rangle\Big)$ *heißt dann* ***Skalarproduktraum****; alternativ:* ***unitärer Raum*** *oder* ***Prä–Hilbertraum****.*

Bemerkung: Offenbar ist $\langle \cdot\,, \cdot \rangle$ in der 1. Komponente **semilinear**

(U4) $\langle \alpha x + \beta y, z \rangle = \overline{\alpha} \langle x, z \rangle + \overline{\beta} \langle y, z \rangle$ für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ und $x, y, z \in X$.

Erfüllt die Abbildung nur **(U3)** und **(U4)**, sprechen wir von einer **Sesquilinearform** ($\mathbb{K} = \mathbb{C}$) bzw. **Bilinearform** ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$).

Satz 4.1.2 *Sei $\Big(X, \langle \cdot\,, \cdot \rangle\Big)$ ein unitärer Raum. Dann gelten die folgenden Aussagen:*

(1) *Durch $\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}$ ist auf X eine* ***Norm*** *definiert. (Jeder unitäre Raum ist damit auf natürliche Weise normiert und trägt die dadurch* ***induzierte natürliche Topologie****).*

Für alle $x, y \in X$ gilt:

(2) $\big|\langle x, y\rangle\big| \le \|x\| \, \|y\|,$ ***(Cauchy–Schwarz'sche Ungleichung)*** (4.1.1)

wobei Gleichheit genau dann eintritt, wenn x und y linear abhängig sind.

(3) $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right)$ ***(Parallelogrammgleichung)*** (4.1.2)

(4) ***(Polarisation)***

$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right), \text{ falls } \mathbb{K} = \mathbb{R} \tag{4.1.3}$$

$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 - i\|x+iy\|^2 + i\|x-iy\|^2\right), \text{ falls } \mathbb{K} = \mathbb{C} \tag{4.1.4}$$

Satz 4.1.3 *Sei $\left(X, \|\cdot\|\right)$ ein normierter Raum, in dem die Parallelogrammgleichung (4.1.2) gilt. Dann definieren die in (4.1.3) (für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$) bzw. (4.1.4) (für $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) definierten Abbildungen $\langle\cdot,\cdot\rangle$ Skalarprodukte auf X.*

Bemerkungen 4.1.4

1. *Die* ***Parallelogrammgleichung*** *(4.1.2) ist also charakteristisch für unitäre Räume.*

2. $\left(C(S), \, |\cdot\|_\infty\right)$ *mit* $S \subset \mathbb{R}^n$ *kompakt erfüllt (4.1.2) nicht.*

3. *Die Abbildung $\langle\cdot,\cdot\rangle$ im unitären Raum $\left(X, \langle\cdot,\cdot\rangle\right)$ ist stetig in beiden Komponenten, d.h.*

$$\left[x_n \to x\,,\ y_n \to y \quad \text{in } X \ (n \to \infty) \implies \langle x_n\,, y_n\rangle \longrightarrow \langle x, y\rangle \quad \text{in } \mathbb{K} \ (n \to \infty)\right].$$

Definition 4.1.5 *Ein bzgl. $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$ vollständiger unitärer Raum $\Big(X\,,\, \langle\cdot\,,\,\cdot\rangle\Big)$ heißt* ***Hilbertraum****.*

Beispiele 4.1.6

1. ℓ^2 *mit* $\langle x, y\rangle = \langle x, y\rangle_{\ell^2} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \overline{x_n}\, y_n$ *ist ein Hilbertraum. Hier ist* $\|\cdot\| = \|\cdot\|_{\ell^2}$.

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen.

2. $L^2(\Omega\,;\mathbb{C})$ *mit* $\langle f, g\rangle = \langle f, g\rangle_{L^2(\Omega\,;\mathbb{C})} := \int\limits_\Omega \overline{f(x)}\, g(x)\, dx$ *ist ein Hilbertraum mit* $\|\cdot\| = \|\cdot\|_{L^2(\Omega\,;\mathbb{C})}$

3. $W^{1,2}(\Omega\,;\mathbb{C})$ *mit*

$$\langle f, g\rangle = \langle f, g\rangle_{W^{1,2}(\Omega\,;\mathbb{C})} := \int\limits_\Omega \left[\overline{f(x)} \cdot g(x) + \sum_{i=1}^{n} \overline{d_{x_i} f(x)} \cdot d_{x_i} g(x)\right] dx$$

ist ein Hilbertraum mit $\|\cdot\| = \|\cdot\|_{1,2}$.

Die entsprechenden reellen Vektorräume sind natürlich auch Hilberträume.
Mit der neuen Struktur können wir Abbildung 3.1 ergänzen:

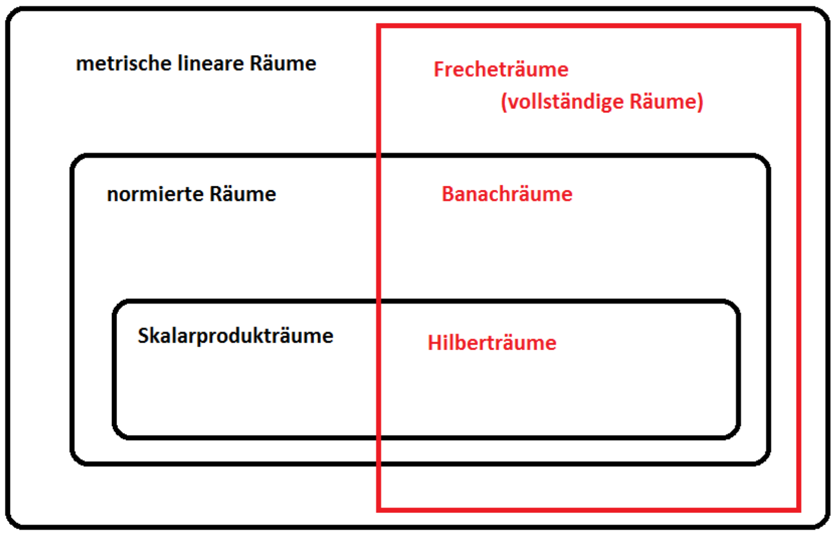

Abbildung 4.1: metrische lineare Räume und Vollständigkeit

4.2 Orthogonalität und Projektion

Definition 4.2.1 (Orthogonalität) *Es seien X ein unitärer Raum und $x, y \in X$. Dann sagen wir x ist* ***orthogonal*** *zu y (wir schreiben $x \perp y$), falls $\langle x, y\rangle = 0$. Für Teilmengen $M, N \subset X$ schreiben wir $M \perp N$, falls jedes $x \in M$ orthogonal zu jedem $y \in N$ ist. Dann ist*

$$M^\perp := \{y \in X : y \perp M\}$$

ein abgeschlossener *Unterraum, genannt das* ***orthogonale Komplement (Lotraum)*** *von M. Falls M selbst ein Unterraum ist, dann gilt $M \cap M^\perp = \{0\}$. Dann ist insbesondere $\overline{M} \subset \left(M^\perp\right)^\perp$.*

Satz 4.2.2 (Pythagoras) *Falls $x \perp y$, dann gilt*

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

Definition 4.2.3 *Eine Teilmenge $S \subset X$ heißt ein* ***Orthonormalsystem*** *(ONS), falls*

1. *$x \perp y$ für alle $x, y \in S$ mit $x \neq y$;*

2. *$\|x\| = 1$ für alle $x \in S$.*

Ein Orthonormalsystem S heißt ***vollständig*** *(VONS), falls gilt:*

$$x \perp S \quad \Longrightarrow \quad x = 0.$$

Satz 4.2.4 *Es sei $S = \{u_1, \dots, u_n\}$ ein Orthonormalsystem in einem unitärer Raum X über $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$. Dann hat das* ***Gaußsche Approximationsproblem****: für $x \in X$ finde $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ mit*

$$\left\| x - \sum_{j=1}^{n} \alpha_j u_j \right\| \longrightarrow \min \tag{4.2.1}$$

eine eindeutige Lösung mit $\alpha_j = \langle u_j, x\rangle$. Der Vektor $x - \sum_{j=1}^{n} \alpha_j u_j$ ist orthogonal zu S, und es gilt die ***Besselsche Identität***

$$0 \leq \left\| x - \sum_{j=1}^{n} \alpha_j u_j \right\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{j=1}^{n} |\alpha_j|^2, \tag{4.2.2}$$

aus der sofort die ***Besselsche Ungleichung*** *folgt:*

$$\sum_{j=1}^{n} |\langle u_j, x\rangle|^2 \leq \|x\|^2. \tag{4.2.3}$$

Bemerkung 4.2.5 *$P \colon X \to X$ definiert durch $P(x) := \sum\limits_{j=1}^{n} \langle u_j, x \rangle \cdot u_j$ ist ein linear, stetiger Projektor $\big($d.h. $P \circ P = P\big)$.*

Satz 4.2.6 (Gram–Schmidtsches Orthogonalisierungsverfahren) *Es sei $S = \{x_1, x_2, \ldots\}$ eine höchstens abzählbare Menge von linear unabhängigen Elementen in einem unitären Raum X. Dann existiert ein Orthonormalsystem $\{u_1, u_2, \ldots\}$ derart, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt*

$$\operatorname{span}\{x_1, \ldots, x_n\} = \operatorname{span}\{u_1, \ldots, u_n\}. \tag{4.2.4}$$

Für unitäre Räume lässt sich das Riesz'sche Lemma 3.7.6 wesentlich verbessern. Außerdem lassen sich Punkte mit Minimalabstand charakterisieren.

Satz 4.2.7 *Es sei Y ein vollständiger Unterraum eines unitären Raums X. Dann existiert für jedes $x \in X$ genau ein $\widehat{y} = \widehat{y}(x) \in Y$ mit*

$$\|x - \widehat{y}\| \;=\; \operatorname{dist}(x, Y) \;:=\; \inf\Big\{\, \|x - y\| :\; y \in Y \Big\}\,. \tag{4.2.5}$$

Bemerkung: $\operatorname{dist}(x, Y)$ entspricht dem Minimalabstand von x zum Unterraum Y.

Korollar 4.2.8 *$\widehat{y}$ erfüllt Gleichung* (4.2.5) *genau dann, wenn $(x - \widehat{y}) \perp Y$ gilt.*

Satz 4.2.9 (Orthogonale Zerlegung) *Es sei Y ein vollständiger Unterraum eines unitären Raums X. Dann existiert zu jedem $x \in X$ eine eindeutige Zerlegung der Form*

$$x = y + v \quad \textit{mit} \quad y \in Y \qquad \textit{und} \quad v \in Y^{\perp}, \tag{4.2.6}$$

*d.h. $X = Y \oplus Y^{\perp}$, wobei $Y^{\perp}$ das **orthogonale Komplement** von Y ist.*

Weil für jedes $x \in X$ das Element $y \in Y$ in Satz 4.2.9 eindeutig definiert ist, erhalten wir eine Abbildung $P\colon X \longrightarrow Y$ mit $P(x) := y$. Diese Abbildung ist eine **Projektion**, d.h. $P \circ P = P$. Wir schreiben deshalb $P = \operatorname{Proj}_Y : X \longrightarrow X$ mit Wertebereich $\operatorname{im}(P) = Y$.

Korollar 4.2.10 *Falls M Unterraum und X Hilbertraum, dann gilt $\overline{M} = \left(M^{\perp}\right)^{\perp}$*

Die Abbildung P ist **beschränkt**, mit **Operatornorm**

$$\|P\| \;:=\; \sup_{x \neq 0} \frac{\|P(x)\|}{\|x\|} \;\leq\; 1\,: \tag{4.2.7}$$

Des Weiteren ist P **symmetrisch**, d.h.

$$\langle P(x_1), x_2 \rangle = \langle x_1, P(x_2) \rangle \quad \text{für alle}\, x_1, x_2 \in X \tag{4.2.8}$$

Wir fassen zusammen:

Korollar 4.2.11 *Es sei $Y \neq \{0\}$ ein vollständiger Unterraum des unitären Raums X mit Projektion $P = \operatorname{Proj}_Y : X \longrightarrow Y \subset X$. Dann gilt:*

1. *$x - P(x) \perp Y$ für alle $x \in X$;*

2. *P ist symmetrisch;*

3. *P ist beschränkt mit Operatornorm $\|P\| = 1$.*

Bemerkung: Wegen 1. heißt P auch **orthogonaler Projektor** auf Y.

Definition 4.2.12 (Orthonormalbasis oder Hilbertraumbasis) *Ein Orthonormalsystem $(\widehat{e}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eines unitären Raums X heißt **Orthonormalbasis** (ONB) oder **Hilbertraumbasis**, falls **eine** der folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllt ist:*

(a) $$\lim_{n\to\infty} \left\| x - \sum_{k=1}^{n} \langle \widehat{e}_k\,, x \rangle\, \widehat{e}_k \right\| = 0 \qquad \forall\, x \in X$$ ***(Vollständigkeitsrelation)***

(b) $$\langle x\,, y\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \overline{\langle \widehat{e}_k\,, x \rangle}\, \langle \widehat{e}_k\,, y \rangle \qquad \forall\, x, y \in X$$

(c) $$\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \left| \langle \widehat{e}_k\,, x \rangle \right|^2 \qquad \forall\, x \in X$$ ***(Parseval–Gleichung)***

Bemerkung:

1. Statt **(a)** kann man auch

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \langle \widehat{e}_k, x \rangle \cdot \widehat{e}_k \qquad \text{(Konvergenz in } X) \tag{4.2.9}$$

schreiben (**Fourier–Reihe** von x); $(\langle \widehat{e}_k, x \rangle)_{k\in\mathbb{N}}$ heißen die **Fourier-Koeffizienten** von x.

2. Ist X sogar Hilbertraum, dann gilt

$$\textbf{(a)} \quad \Longleftrightarrow \quad \overline{\operatorname{span}(S)} = X\,, \tag{4.2.10}$$

wobei $S := \{\widehat{e}_k,\ k \in \mathbb{N}\}$.

Satz 4.2.13 **1.** *Für X unitärer Raum: Jede Hilbertraumbasis (ONB) mit den Eigenschaften **(a)** bis **(c)** aus Definition 4.2.12 ist ein vollständiges ONS (VONS im Sinne von Definition 4.2.3)*

2. *Ist zusätzlich X ein Hilbertraum und $(\widehat{e}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ein vollständiges Orthonormalsystem, dann ist $(\widehat{e}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ auch eine Hilbertraumbasis (ONB).*

Frage: Hat jeder Hilbertraum H (mit $\dim H = \infty$) ein abzählbares vollständiges ONS (und damit eine ONB)?

Antwort: Nein, aber falls H zusätzlich separabel (vgl. Definition 4.3.1) ist, ist die Antwort ja. (vgl. [Wer00], Kor V.4.10)

Dagegen ist die Existenz eines vollständigen ONS (ev. überabzählbar, und dann keine ONB!)

kein Problem:

Satz 4.2.14 *In jedem Hilbertraum $X \neq \{0\}$ gibt es ein VONS.*
Mehr noch: Zu jedem ONS S_0 gibt es ein VONS $\widetilde{S}_0$ mit $S_0 \subset \widetilde{S}_0$

Beispiele 4.2.15 **(1)** *Sei $X = L^2(0, 2\pi)$. Dann ist ein VONS in X gegeben durch*

$$S = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right\} \cup \left\{ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(n\cdot) : n \in \mathbb{N} \right\} \cup \left\{ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(n\cdot) : n \in \mathbb{N} \right\}.$$

In der klassischen Fourier–Analysis werden Entwicklungen nach dem VONS S untersucht. Man zeigt dort, dass $\operatorname{span}(S)$ bezüglich $\|\cdot\|_\infty$ dicht liegt in

$$C_{per}\Big([0, 2\pi]\Big) := \Big\{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,\Big|\, f \text{ ist stetig und } 2\pi \text{ periodisch} \Big\}.$$

Die Aussage in Satz 4.2.13, 2. und (4.2.10) liefert für dieses Beispiel nur die Dichtheit von $\operatorname{span}(S)$ bezüglich $\|\cdot\|_{L^2(0,2\pi)}$!

(2) *Durch $(f, g)_\mu := \int_a^b \mu(t)\, f(t)\, g(t)\, dt$, wobei $\mu > 0$ und stetig auf (a, b), ist auf $L^2(a, b)$ ein reelles Skalarprodukt definiert. Für verschiedene **Gewichtsfunktionen** μ und verschiedene Wahlen von (a, b) erhält man μ–**orthogonale Polynomsysteme**, indem man die Monome $\{t^i : i \in \mathbb{N}_0\}$ mit dem Schmidt'schen Verfahren orthonormiert.*

(a) $a = -1,\ b = 1,\ \mu(t) = 1$

*liefert die **Legendre–Polynome:***
$$p_n(t) := \frac{\sqrt{(n+1)/2}}{2^n \cdot n!} \frac{d^n}{dt^n} \left(t^2 - 1\right)^n$$

(b) $a = -1,\ b = 1,\ \mu(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$ *liefert die **Tschebyscheff–Polynome***

(c) $a = 0,\ b = \infty,\ \mu(t) = e^{-t}$ *liefert die **Laguerre–Polynome***

(d) $a = -\infty,\ b = \infty,\ \mu(t) = e^{-t^2}$ *liefert die **Hermite–Polynome***

Verallgemeinerte Fourier–Reihen

Gegeben sei ein unitärer Raum $\Big(X, \langle \cdot, \cdot \rangle\Big)$ mit ONB $(\widehat{e}_k)_{k \in \mathbb{N}}$.

$$H := \left\{ \sum_{k \in \mathbb{N}} c_k \widehat{e}_k : \ (c_k)_{k \in \mathbb{N}} \in \ell^2(\mathbb{N}) \right\}$$

ist ein Hilbertraum (die Vervollständigung von X) mit Skalarprodukt

$$\langle x, y \rangle := \sum_{k \in \mathbb{N}} \overline{c_k}\, d_k \quad \text{wobei} \quad x = \sum_{k \in \mathbb{N}} c_k \widehat{e}_k \quad \text{und} \quad y = \sum_{k \in \mathbb{N}} d_k \widehat{e}_k .$$

H kann mit dem Koordinatenraum $\ell^2(\mathbb{N})$ identifiziert werden.

Standardbeispiel:
Aus dem unitären Raum der 2π–periodischen stetigen Funktionen mit Skalarprodukt $\langle f, g \rangle = \int\limits_0^{2\pi} \overline{f(x)} g(x)\, dx$ erhalten wir so

$$L^2\Big((0, 2\pi); \mathbb{C}\Big) = \left\{ f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k \widehat{e}_k \colon \sum_{k \in \mathbb{Z}} \big| c_k \big|^2 < \infty \right\} \cong \ell^2(\mathbb{Z}),$$

wobei $(\widehat{e}_k)_{k \in \mathbb{R}}$ mit $\widehat{e}_k(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{ikx}$ ein VONS für $L^2\big((0, 2, \pi); \mathbb{C}\big)$ ist.

4.3 Separable Hilberträume

Definition 4.3.1 *Ein metrischer Raum (X, d) heißt **separabel**, wenn es in X eine abzählbare dichte Teilmenge U gibt.*

Beispiel 4.3.2 $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$, ℓ^2 , $L^2(\Omega)$ *für* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *offen, sind separable Hilberträume.*

Satz 4.3.3 *In einem separablen unendlich–dimensionalen Hilbertraum $\big(X\,,\,\langle\cdot,\cdot\rangle\big)$ gilt:*

(i) *Jedes ONS in X ist höchstens abzählbar.*

(ii) *Sei $S = \{\widehat{e}_k\}_{k=1}^{\infty}$ ein VONS in X. Dann existiert zu jeder Zahlenfolge $\alpha = (\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \ell^2$ genau ein $x \in X$ mit $\langle \widehat{e}_k, x\rangle = \alpha_k\,,\ k \in \mathbb{N}$* ***(Satz von Riesz–Fischer)****.*

(iii) *X ist isometrisch isomorph zum ℓ^2. Insbesondere sind $L^2(\Omega)$ und ℓ^2 isometrisch isomorph.*

4.4 Riesz'scher Darstellungssatz und Lax–Milgram

Im topologischen linearen Raum X ist der Dualraum $X' = \{x' \colon X \to \mathbb{K}\,,\ x' \text{ ist linear und stetig}\}$ definiert. $X' = \{0\}$ ist möglich. Im Hilbertraum X aber, ist immer $X' \supsetneqq \{0\}$, denn zu $y \in X$ fest ist durch $y'[x] := \langle y, x\rangle\,,\ x \in X$ jeweils ein $y' \in X'$ erklärt. Das sind auch tatsächlich alle:

Satz 4.4.1 ***(Riesz'scher Darstellungssatz)***
Sei $\big(X\,,\,\langle\cdot,\cdot\rangle\big)$ ein (reeller oder komplexer) Hilbertraum und $y' \in X'$ gegeben. Dann existiert genau ein Element $\tilde{y} = \tilde{y}(y') \in X$, so dass

$$y'[x] \;=\; \langle \tilde{y}, x\rangle \quad \textit{für alle } \ x \in X\,. \tag{4.4.1}$$

Zusatz zu Satz 4.4.1: Ist X reeller Hilbertraum, so ist das eindeutig bestimmte Element $\tilde{y} = \tilde{y}(y') \in X$ von oben auch die eindeutig bestimmte Lösung des **Variationsproblems**

$$\begin{aligned} F(x) &\overset{!}{=} \min \text{ auf } X \\ F\colon X &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \langle x, x\rangle \,-\, 2y'[x]\,. \end{aligned}$$

Jede Minimalfolge $(x_j)_{j\in\mathbb{N}} \in X$ $\left(\text{d.h. } \lim\limits_{j\to\infty} F(x_j) = \inf\limits_{x\in X} F(x)\right)$ des Variationsproblems konvergiert gegen dieses $\tilde{y}$, d.h. $F(\tilde{y}) = \inf\limits_{x\in X} F(x)$ und $\lim\limits_{j\to\infty} \|x_j - \tilde{y}\| = 0$.

Korollar 4.4.2 *Sei $B\colon X \times X \to \mathbb{K}$ eine* ***hermitesche Sesquilinearform*** *(vgl. Definition 4.1.1), die*

1. beschränkt (stetig)
$\big($*d.h.* $\exists\, c_1 > 0\,,$ *so dass* $\big|B(x,y)\big| \le c_1\,\|x\|\cdot\|y\|$ *für alle* $x, y \in X\big)$

und

2. positiv definit *ist*
$\big($*d.h.* $\exists\, c_2 > 0\,,$ *so dass* $B(x,x) \ge c_2\,\|x\|^2$ *für alle* $x \in X\big)$.

Dann existiert zu jedem Funktional $y' \in X'$ genau ein $y \in X$ mit der Eigenschaft

$$y'[x] \;=\; B(y,x) \quad \textit{für alle } \ x \in X\,. \tag{4.4.2}$$

Bemerkung 4.4.3 ***(Lax–Milgram)***
Die Voraussetzung ***hermitesch*** *in obigem Korollar ist nicht notwendig. Ist also X Hilbertraum, $B\colon X\times X \to \mathbb{K}$ eine* ***beschränkte Sesquilinearform*** *mit*

$$\exists\, c_3 > 0\,,\ \textit{so dass}\quad Re\big(B(x,x)\big) \ge c_3\,\|x\|^2 \quad \textit{für alle } \ x \in X \qquad \textbf{\textit{(positiv definit)}}\,,$$

dann gilt Aussage (4.4.2) entsprechend.

Beweis: *[Alt92] Satz 4.7.*

□

Der Satz 4.4.1 liefert also, dass die Abbildung

$$\begin{aligned} J_X\colon\ X &\longrightarrow X' \\ y &\longmapsto y' \quad \Big(\text{definiert durch } y'\colon X \longrightarrow \mathbb{K}\,,\ x \longmapsto \langle y, x\rangle\Big)\,, \end{aligned}$$

bijektiv und sesquilinear $\Big($d.h. $J_X(\alpha y_1 + \beta y_2) = \overline{\alpha}\, J_X(y_1) + \overline{\beta}\, J_X(y_2)\Big)$ ist.

Damit sind $X \cong X'$ algebraisch isomorph. Damit gilt für $x, y \in X$:

$$\langle\langle J_X(y),\, x\rangle\rangle = \langle\langle J_X(y),\, x\rangle\rangle_{X'\times X} \;:=\; J_X(y)[x] = \langle y, x\rangle. \tag{4.4.3}$$

Die Isomorphie gilt auch topologisch:

Satz 4.4.4 *Sei X ein Hilbertraum. Dann ist auch X' ein Hilbertraum und $J_X : X \to X'$ ist ein sesquilinearer Isomorphismus, der die Norm erhält (Isometrie). Wir nennen J_X den* ***kanonischen Isomorphismus*** *zwischen X und X'. Genauer gilt:*

1. $\langle y_1' \,,\, y_2'\rangle_{X'} \;:=\; \overline{\langle y_1 \,,\, y_2\rangle_X}$ *macht X' zum Skalarproduktraum.*

2. *Die durch $\langle\cdot,\cdot\rangle_{X'}$ induzierte Norm $\big\|y'\big\|_{X',S} := \sqrt{\langle y' \,,\, y'\rangle_{X'}}$ ist gerade die von $X' = \mathcal{L}(X, \mathbb{K})$ bekannte, d.h.*

$$\big\|y'\big\|_{X',S} \;=\; \big\|y'\big\|_{X',N} \;=\; \sup_{\|x\| \le 1} \Big|y'[x]\Big|\,.$$

3. *Da $\big(X', \|\cdot\|_{X',N}\big)$ vollständig war, ist $\big(X', \langle\cdot,\cdot\rangle_{X'}\big)$ ein Hilbertraum.*

4. *$J_X\colon X \to X'$ ist Isometrie, d.h. $\big\|J_X(y)\big\|_{X'} = \|y\|_X$ für alle $y \in X$.*

Kapitel 5

Der Satz von Hahn–Banach und seine Konsequenzen

5.1 Fortsetzbarkeit linearer Funktionale

Definition 5.1.1 *Eine Abbildung $A : M \to Y$ heißt* ***Fortsetzung*** *von $A_0 : M_0 \to X$, falls $M_0 \subset M$ und $A_0 x = Ax$ für alle $x \in M_0$. Schreibweise: $A_{|M_0} = A_0$*

Satz 5.1.2 *Seien $\big(X\,,\,\|\cdot\|\big)$ und $\big(X_0\,,\,\|\cdot\|\big)$ normierte Räume, $X_0 \subset X$ sei dicht in X. Weiter sei $\big(Y\,,\,\|\cdot\|_Y\big)$ ein Banachraum, und $A_0 : X_0 \to Y$ sei stetig und linear. Dann gibt es genau eine stetige lineare Fortsetzung $A\colon X \to Y$ von A_0 auf X. Für diese gilt:*

$$\big\|A_0\big\|_{\mathcal{L}(X_0,Y)} = \big\|A\big\|_{\mathcal{L}(X,Y)}$$

Konstruktion von A: Sei $x \in X$ und $\big(x_j\big)_{j\,\in\,\mathbb{N}} \subset X_0$ mit $x_j \to x$ für $j \to \infty$.
Dann ist $\big(A_0 x_j\big)_{j\,\in\,\mathbb{N}} \subset Y$ Cauchy–Folge und somit konvergent. Wir setzen

$$Ax := \lim_{j \to \infty} A_0 x_j\,.$$

Korollar 5.1.3 *Ist $A \in \mathcal{L}(X,Y)$, X,Y normierte Räume, Y vollständig, und $M \subset X$ dicht, so gilt*

$$Ax = 0 \quad \textit{für alle } x \in M \implies A \equiv 0 \textit{ auf } X\,.$$

Ist X_0 nicht dicht in X, so wird es schwierig.

Satz 5.1.4 ***(Hahn–Banach)***
Auf dem linearen Raum X über $\mathbb{R}$ gebe es eine Abbildung $p\colon X \to \mathbb{R}$ mit:

(i) $p(\alpha x) = \alpha p(x)$, *für alle* $\alpha \geq 0\,,\ x \in X$ **(positiv homogen)**

(ii) $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$, *für alle* $x, y \in X$ **(subadditiv)**

Weiter seien X_0 ein linearer Teilraum von X und $f_0\colon X_0 \to \mathbb{R}$ eine lineare Abbildung mit:

$$f_0(x) \ \leq \ p(x) \quad \textit{für alle } \ x \in X_0\,.$$

Dann gibt es eine lineare Fortsetzung $f : X \to \mathbb{R}$ von f_0, welche die Ungleichung respektiert, d.h.

$$f_{|X_0} \ = \ f_0 \quad \textit{und} \quad f(x) \ \leq \ p(x) \quad \textit{für alle } \ x \in X\,. \tag{5.1.1}$$

Beweis in zwei Schritten:

1. Fortsetzung auf $X_1 \ := \ X_0 \oplus \operatorname{span}(x_1)$ für ein $x_1 \notin X_0$. (technisch!)

2. Finde „maximale Fortsetzung“ mit Lemma von Zorn (vgl. [Yos80] S. 102).

$\square$

Bemerkung: Ohne die Zusatzbedingung, dass die Fortsetzung durch p beschränkt bleibt, ist eine lineare Fortsetzung einfach möglich.

Korollar 5.1.5 ***(Hahn–Banach für normierte Räume)***
Sei $\big(X\,,\,\|\cdot\|\big)$ normierter Raum, X_0 ein linearer Teilraum, und $f_0 \in X_0'$ sei ein stetiges lineares Funktional auf X_0. Dann existiert eine normerhaltende Fortsetzung $f \in X'$ von f_0, d.h.

$$f_{|X_0} \ = \ f_0 \quad \textit{und} \quad \big\|f\big\|_{X'} \ = \ \big\|f_0\big\|_{X_0'} \tag{5.1.2}$$

5.2 Existenz nichttrivialer stetiger Funktionale

Korollar 5.2.1 *Zu jedem Element* $x_0 \neq 0$ *des normierten Raumes* $\big(X, \|\cdot\|\big)$ *existiert ein* $f \in X'$ *mit* $\|f\|_{X'} = 1$ *und* $f(x_0) = \|x_0\|$.

Insbesondere ist $X' \neq \{0\}$!

Korollar 5.2.2 (Normformel)
Für jedes Element x *eines normierten Raumes* $\big(X, \|\cdot\|\big)$ *gilt*

$$\|x\| \;=\; \sup_{\substack{f \in X' \\ \|f\|_{X'} = 1}} \big|f(x)\big| \, .$$

Folgerung 5.2.3 X *sei normierter Raum:*

1. $f(x) \;=\; 0$ *für alle* $f \in X' \;\Longrightarrow\; x \;=\; 0$
2. $f(x_1) \;=\; f(x_2)$ *für alle* $f \in X' \;\Longrightarrow\; x_1 \;=\; x_2$
3. $\big|f(x_0)\big| \;\leq\; C$ *für alle* $f \in X'$ *mit* $\|f\|_{X'} \;=\; 1 \;\Longrightarrow\; \|x_0\| \;\leq\; C$

Bemerkung 5.2.4 *In jedem lokal–konvexen topologischen linearen Raum* X *gibt es nichttriviale stetige lineare Funktionale, d.h.* $\{0\} \subsetneqq X'$

Satz 5.2.5 *Sei* Y *ein linearer Teilraum von* $\big(X, \|\cdot\|\big)$*, und es sei für* $x_0 \in X \setminus Y$

$$d \;=\; dist(x_0, Y) \;:=\; \inf_{y \in Y} \; \|x_0 \,-\, y\| \, .$$

(a) *Dann gilt für alle* $f \in X'$ *mit* $\|f\|_{X'} \;=\; 1$ *und* $f_{|Y} \;=\; 0$*:*

$$\Big|f(x_0)\Big| \;\leq\; dist(x_0, Y) \, . \tag{5.2.1}$$

(b) *Im Falle* $d > 0$ *gibt es ein derartiges* f *mit* $f(x_0) = dist(x_0, Y)$.

Folgerung 5.2.6 (Dichtekriterium von Banach)
Sei $M \subset X$ *und* $\big(X, \|\cdot\|\big)$ *normierter Raum. Dann sind äquivalent:*

$$cl_X\big(span\,(M)\big) \;=\; X \;\Longleftrightarrow\; \big(\text{für alle } f \in X' \text{ mit } f_{|M} \;=\; 0 \;\Longrightarrow\; f \;=\; 0\big)$$

5.3 Trennung konvexer Mengen

Satz 5.3.1 (Mazur)
Sei $\big(X, \|\cdot\|\big)$ normierter Raum über $\mathbb{R}$. $M \subset X$ sei abgeschlossen, konvex und $0 \in M$.
Dann existiert zu jedem $x_0 \notin M$ ein $f \in X'$ mit

$$f(x_0) > 1 \quad \textit{und} \quad f(x) \leq 1 \quad \textit{für alle } x \in M\,. \tag{5.3.1}$$

D.h., wählt man $\varepsilon \in (0\,,\, f(x_0) - 1)$, so trennt die „Hyperebene“ $H := \big\{x \in X : f(x) = 1 + \varepsilon\big\}$ den Punkt x_0 von M.

Zum Beweis verwenden wir das Minkowski–Funktional (siehe Übung)

$$p_N(x) := \inf\left\{\rho > 0\colon\ \frac{1}{\rho}x \in N\right\} \quad \text{für} \quad x \in X\,,$$

einer konvexen, abgeschlossenen Teilmenge $N \subset X$ mit $0 \in \mathring{N}$.
Dieses hat die Eigenschaften:

(a) $p_N(\alpha x) = \alpha \cdot p_N(x)\,,\ \alpha \geq 0\,,\ x \in X$ **(positiv homogen)**

(b) $p_N(x+y) \leq p_N(x) + p_N(y)\,,\ x, y \in X$ **(subadditiv)**

(c) $p_N(x) \leq 1 \iff x \in N$

(d) Ist zusätzlich $\overline{B_r(0)} \subset N$, so gilt $p_N(x) \leq \frac{1}{r}\,\|x\|$ für alle $x \in X$

5.4 Einbettung von X in seinen Bidualraum X''

Ist X normierter (linearer) Raum, so existiert der **Bidualraum** $X'' := (X')'$ und ist ein Banachraum.

Ziel: X lässt sich in X'' einbetten.

Definition 5.4.1 *Die* ***kanonische Abbildung*** $J_0 = J_0^X : X \to X''$ *ist definiert durch*

$$J_0(x)\,[x'] = \ll J_0(x),\, x' \gg_{X'' \times X'} := \ll x', x \gg_{X' \times X} = x'[x] \quad \textit{für alle } x' \in X' .$$

Offensichtlich ist für $x \in X$ fest $J_0(x) \colon X' \to \mathbb{K}$ linear und auch stetig:

$$\big| J_0(x)\,[x'] \big| = \big| \ll x', x \gg \big| \le \|x'\|_{X'} \cdot \|x\|_X \quad \text{für alle } x' \in X' \tag{5.4.1}$$

Also ist die Abbildung J_0 wohldefiniert und linear. Wir schreiben $J_0 x := J_0(x) \in X''$.

Satz 5.4.2 *Die kanonische Abbildung $J_0 \colon X \to X''$ ist eine normerhaltende lineare Einbettung (d.h. injektiv) von X in seinem Bidualraum X''.*

Warnung: *J_0 ist in der Regel nicht surjektiv!*

Definition 5.4.3 *Ein Banachraum X heißt* ***reflexiv*** *genau dann, wenn J_0 surjektiv ist, d.h. wenn X und X'' isometrisch isomorph vermöge J_0 sind.*

Bemerkung: Ein nicht vollständiger normierter Raum hätte offensichtlich keine Chance reflexiv zu sein.

Warnung: „vermöge J_0“ ist wesentlich, denn es gibt Beispiele mit $X \cong X''$ aber J_0 ist trotzdem nicht surjektiv (z.B. Werner, I. 4.7).

Satz 5.4.4 *Jeder Hilbertraum H ist reflexiv.*

Als Hierachie erhalten wir damit:

Hilberträume

Banachräume
- reflexiv
- nicht reflexiv

Fréchetraume
- über abzählbar viele Seminormen
- sonst (z.B. $L^p(0,1)$, $0 < p < 1$)

Definition 5.4.5 *Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in einem normierten Raum heißt* ***schwach konvergent*** *gegen $x \in X$ (in Zeichen $x_n \rightharpoonup x$ für $n \to \infty$), wenn*

$$\lim_{n\to\infty} x'[x_n] = x'[x] \text{ (in } \mathbb{K}) \quad \text{für alle } x' \in X' \quad \text{gilt .}$$

Bemerkung: Der Grenzwert, so er denn existiert, ist eindeutig.

Die schwache Konvergenz wird von der sogenannten **schwachen Topologie** auf $(X, \|\cdot\|)$ induziert, welche wir im nächsten Kapitel behandeln. Dort werden wir zeigen:

> Die Einheitskugel $\overline{B_1(0)} = \left\{x \in X \,\middle|\, \|x\| \le 1\right\}$ im reflexiven Banachraum ist schwach folgenkompakt.

Beispiel: $e_i =$ Einheitsvektoren im ℓ^2, $e_i \rightharpoonup 0$ für $i \to \infty$. Aber die Folge $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ ist nicht **stark** (bzgl. der Norm) **konvergent**.

Satz 5.4.6 *Sei M ein abgeschlossener Unterraum eines Banachraums $\big(X, \|\cdot\|\big)$.*

(a) *Ist X reflexiv, so ist auch $\big(M, \|\cdot\|\big)$ reflexiv.*

(b) *X ist reflexiv $\implies$ X' ist reflexiv.*

5.5 Darstellungssätze für einige Dualräume

(A) Dualraum des $L^p(\Omega)\,,\ 1 \le p < \infty\,,\ \Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen.

Satz 5.5.1 *Zu jedem $f \in (L^p(\Omega))'\,,\ 1 \le p < \infty$, gibt es genau ein $u \in L^q(\Omega)$, wobei $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, so dass sich f als*

$$f[x] \;=\; \int_\Omega x(t)\cdot u(t)\,dt \qquad \bigl(x \in L^p(\Omega)\bigr)\,, \tag{5.5.1}$$

darstellen lässt und es gilt

$$\|f\|_{(L^p(\Omega))'} \;=\; \|u\|_{L^q(\Omega)}\,. \tag{5.5.2}$$

Beweis: [Dob00], Satz 4.30.

Im Falle $p = 1$ ergibt sich oben $q = \infty$. Insbesondere ist $(L^1(\Omega))'$ normisomorph zu $L^\infty(\Omega)$. Es ist aber $(L^\infty(\Omega))'$ nicht normisomorph zu $L^1(\Omega)$!

(B) Dualraum des $\ell^p\,,\ 1 < p < \infty$.

Satz 5.5.2 *Sei $1 < p < \infty$. Jedes $x' \in (\ell^p)'$ kann mit Hilfe genau einer Folge $\alpha = \bigl(\alpha_i\bigr)_{i\in\mathbb{N}} \in \ell^q \Bigl($wobei $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\Bigr)$ in der Form*

$$x'[x] \;=\; \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i\,\xi_i \quad \textit{für} \quad x \;=\; (\xi_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \ell^p \qquad (\textit{Konvergenz in } \mathbb{K}) \tag{5.5.3}$$

dargestellt werden. Umgekehrt definiert jedes $\alpha \in \ell^q$ vermöge (5.5.3) genau ein $x' \in (\ell^p)'$. Die Zuordnung

$$\begin{aligned} Z\colon (\ell^p)' &\longrightarrow \ell^q \\ x' &\longmapsto \alpha \;=\; Z\,(x') \end{aligned}$$

ist ein Normisomorphisms $\bigl(\,\|x'\|_{(\ell^p)'} = \|\alpha\|_{\ell^q}\bigr)$. Also sind $(\ell^p)' \cong \ell^q$ isometrisch isomorph.

Folgerung 5.5.3 *ℓ^p und $(\ell^p)''$ sind isometrisch isomorph. Die Isometrie ist kanonisch (vermöge J_0). Damit sind ℓ^p für $1 < p < \infty$ reflexiv. Aber ℓ^1 ist nicht reflexiv und ebenso ℓ^∞ auch nicht.*

(C) Dualraum des $C[a,b]$.

Definition 5.5.4 *Eine Funktion $v\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ heißt* ***von beschränkter Variation*** *(v.b.V.), falls ein $C > 0$ existiert, so dass für alle endlichen Zerlegungen ($n \in \mathbb{N}$)*

$$Z\colon a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b \quad \text{von } [a,b]$$

gilt:

$$V_Z(v) := \sum_{j=1}^{n} \Big| v(t_j) - v(t_{j-1}) \Big| \le C < \infty \tag{5.5.4}$$

Wir nennen

$$\mathrm{Var}_{a,b}(v) := \sup_{\substack{Z \text{ endliche} \\ \text{Zerlegung}}} V_Z(v) \qquad (\le C) \tag{5.5.5}$$

die **totale Variation** von v auf $[a,b]$.

Bemerkungen:

1. Der Raum $BV[a,b] := \Big\{ v\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R},\ v \text{ ist v.b.V} \Big\}$ wird durch

   $$\|v\| := \big|v(a)\big| + \mathrm{Var}_{a,b}(v)$$

   zum Banachraum.

2. Jedes $v \in C^1[a,b]$ ist v.b.V.

3. Jedes $f \in BV[a,b]$ lässt sich schreiben als $f = h - g$, wobei h und g zwei monotone nichtfallende Funktionen sind. f besitzt also höchstens abzählbar viele Unstetigkeitsstellen!

Lemma 5.5.5 *Sei $v : [a,b] \to \mathbb{R}$ v.b.V und sei $x \in C[a,b]$. Dann existiert das* ***Riemann–Stieltjes–Integral***

$$\int_a^b x(t)\, dv(t) := \lim_{n \to \infty} \sum_{j=1}^{k_n} x\left(\tau_j^{(n)}\right) \cdot \left(v\left(t_j^{(n)}\right) - v\left(t_{j-1}^{(n)}\right) \right), \tag{5.5.6}$$

wobei $Z_n : a = t_0^{(n)} < t_1^{(n)} < \ldots < t_{k_n}^{(n)} = b$ eine beliebige Folge von Zerlegungen ist, deren Feinheit für $n \to \infty$ gegen Null geht, und

$$\tau_j^{(n)} \in \left[t_{j-1}^{(n)}\,,\, t_j^{(n)} \right]$$

beliebige Zwischenpunkte sind.

Genauer: *Für jede solche Folge von Zerlegungen und Zwischenpunkten existiert der Limes in (5.5.6) und ist gleich.*

Mit Hilfe des Riemann–Stieltjes–Integral lässt sich der Dualraum von $C[a,b]$ darstellen:

Satz 5.5.6

(a) Zu jedem $f \in \big(C[a,b]\big)'$ existiert eine Funktion v von beschränkter Variation mit

$$f[x] \;=\; \int\limits_a^b x(t)\,dv(t)\,,\;\; x \in C[a,b]\,, \tag{5.5.7}$$

wobei

$$\big\|f\big\|_{\big(C[a,b]\big)'} \;=\; \mathrm{Var}_{a,b}(v)\,. \tag{5.5.8}$$

(b) Sei NBV$[a,b]$ der Raum der Funktionen v.b.V auf $[a,b]$, für die gilt:

$$v(a) \;=\; 0\,,\; \lim_{h\to 0+} v(t\,+\,h) \;=\; v(t)\,,\;\; a \;\leq\; t \;<\; b \qquad \textbf{(rechtsseitig stetig)}$$

Führt man auf NBV$[a,b]$ eine Norm durch $\|v\| = \mathrm{Var}_{a,b}(v)$ ein, so ist $\big(C[a,b]\big)'$ vermittels (5.5.7)/(5.5.8) isometrisch isomorph zu NBV$[a,b]$, d.h. $\big(C[a,b]\big)' \cong \mathrm{NBV}[a,b]$.

Kapitel 6

Schwache Topologien

In diesem Kapitel sei X immer ein normierter (linearer) Raum und X' sein Dualraum.

Da die abgeschlossene Einheitskugel $\overline{B_1(0)} = \bigl\{x \in X \bigm| \|x\| \leq 1\bigr\}$ für unendlich dimensionales X nicht kompakt ist, suchen wir eine „Abschwächung“ der Normtopologie, so dass $\overline{B_1(0)}$ in der neuen Topologie kompakt wird.

6.1 Schwach und schwach$*$ Topologie

Zu $x' \in X'$ (= Banachraum) und $\varepsilon > 0$ gegeben, sei

$$U\,(x', \varepsilon) \,:=\, \Bigl\{x \in X\colon \bigl|\ll x', x \gg\bigr| \,<\, \varepsilon\Bigr\} \,\subset\, X\,. \tag{6.1.1}$$

Definition 6.1.1 *Eine Menge $V \subset X$ heißt* ***offen bezüglich der schwachen Topologie****, falls zu jedem $x_0 \in V$* ***endlich*** *viele $x'_1, \ldots, x'_k \in X'$ und $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k > 0$ existieren, so dass*

$$x_0 \,+\, \bigcap_{i=1}^{k} U\,(x'_i\,,\, \varepsilon_i) \,\subset\, V \qquad \textit{gilt}\,.$$

Schreibweise für schwache Topologie: $\tau_w \,=\, \tau_{w,X} \,\subset\, 2^X$ (w = weak), im Gegensatz zur starken Topologie $\tau_s \,=\, \tau_{s,X}$, welche von der Norm erzeugt wird. Damit sind auf $\bigl(X,\, \|\cdot\|\bigr)$ zwei verschiedene Topologien erklärt.

Bemerkung 6.1.2 *Die Menge aller endlichen Schnitte der $U\,(x', \varepsilon)$ aus (6.1.1) bilden eine Umgebungsbasis von $0 \in X$ für τ_w.*

Satz 6.1.3 **(a)** *(X, τ_w) ist topologischer linearer Raum, der Hausdorff'sch ist.*

(b) *Jede schwach offene Menge ist auch stark offen ($\tau_w \subset \tau_s$).*

Bemerkung 6.1.4 *Sei* $P := \left\{ p_{x'} : X \to \mathbb{R} \,\middle|\, x' \in X',\ p_{x'}(x) = \left| \ll x', x \gg \right| \right\}$.
Dann ist P eine Familie von Halb–Normen, die (3.3.4) aus Satz 3.3.15 genügt:

$$p_{x'}(x) = 0 \quad \text{für alle } x' \in X' \implies x = 0$$

*Damit folgt, dass (X, τ_w) sogar **lokal–konvexer** Hausdorffraum ist.*

Bemerkung 6.1.5 $\tau_w = \tau_s \iff \dim X < \infty$

In der Regel gibt es aber **echt weniger** schwach offene Mengen als stark offene. Deswegen gibt es auch **mehr** schwach konvergente Folgen.

Satz 6.1.6 ***(schwache Konvergenz)***
$(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ sei eine Folge: Dann gilt: $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert in (X, τ_w) gegen $x_0 \in X$

$$\iff \quad \lim_{n \to \infty} \ll x', x_n \gg = \ll x', x_0 \gg \quad \text{für alle } x' \in X'$$

Schreibweise: $x_n \rightharpoonup x_0 \quad (n \to \infty)$

τ_w ist die gröbste Topologie auf X, bezüglich derer alle $x' \in X'$ stetig sind.

Merke: Ist $\tau_2 \subset \tau_1$, also τ_1 feiner als τ_2 (z.B. $\tau_1 = \tau_s$, $\tau_2 = \tau_w$), so hat τ_1

- mehr offene Mengen,
- mehr abgeschlossene Mengen, aber
- weniger kompakte Mengen,
- mehr stetige Abbildungen nach $\mathbb{K}$ (oder in einen anderen topologischen Raum), aber
- weniger konvergente Folgen.

Schwach$*$ Topologie auf X'

Zu X' (Banachraum) existiert X'' und ist wieder ein Banachraum. Dann existiert auf X' eine schwache Topologie $(X', \tau_{w,X'})$. X' lässt sich aber auch noch anderst topologisieren:

Sei $x \in X$ und $\varepsilon > 0$ gegeben. Setze

$$U'(x, \varepsilon) := \left\{ x' \in X' : \left| \ll x', x \gg \right| < \varepsilon \right\} \subset X'.$$

Definition 6.1.7 *Eine Menge $V' \subset X'$ heißt* ***offen bezüglich der schwach∗ Topologie****, falls zu jedem $x_0' \in V'$* ***endlich*** *viele $x_1, \ldots, x_k \in X$, $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k > 0$ existieren, so dass*

$$x_0' + \bigcap_{i=1}^{k} U'(x_i, \varepsilon_i) \subset V' .$$

Bezeichnung: $(X', \tau_{w^*, X'})$

Satz 6.1.8 *X' ist bezüglich der schwach∗ Topologie ein topologischer linearer Raum, welcher Hausdorff'sch ist.*

Bemerkung 6.1.9 *Schwach∗ ist eine weitere Abschwächung der schwachen Topologie auf X'.*

Es gilt: $\tau_{w^*,\, X'} \subset \tau_{w,X'} \subset \tau_{s,X'}$. Falls X reflexiv ist, so gilt aber $\tau_{w^*, X'} = \tau_{w,X'}$.

Satz 6.1.10 ***(schwach∗ Konvergenz)***
Sei $(x_n')_{n \in \mathbb{N}} \subset X'$ eine Folge. Dann gilt:
$(x_n')_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert gegen $x_0' \in X'$ in $(X', \tau_{w^*, X'})$

$$\Longleftrightarrow \quad \lim_{n \to \infty} \ll x_n' , x \gg \, = \, \ll x_0' , x \gg \quad \text{für alle } x \in X .$$

Schreibweise: $x_n' \overset{*}{\rightharpoonup} x_0' \quad (n \to \infty)$

Bemerkung 6.1.11 **(a)** *Grenzwerte von schwach (schwach∗) konvergenten Folgen sind eindeutig bestimmt.*

(b) *Normkonvergenz impliziert schwache und ebenso schwach∗ Konvergenz.*

Satz 6.1.12 **(a)** *Aus $x_k' \overset{*}{\rightharpoonup} x'$ in X' für $k \to \infty$ folgt:*

$$\|x'\|_{X'} \leq \liminf_{k \to \infty} \|x_k'\|_{X'}$$

(b) *Aus $x_k \rightharpoonup x$ in X für $k \to \infty$ folgt:*

$$\big\|x\big\|_X \leq \liminf_{k \to \infty} \|x_k\|_X$$

6.2 Schwach und schwach$*$ kompakte Einheitskugel

Satz 6.2.1 $\big(X, \|\cdot\|\big)$ *sei separabel. Dann ist die (stark) abgeschlossene Einheitskugel* $\overline{B_1(0)} = \big\{x' \in X' \,\big|\, \|x'\| \leq 1\big\}$ *in* X' *schwach$*$ folgenkompakt.*

Beweisidee: Sei $\big\{x_n \,\big|\, n \in \mathbb{N}\big\}$ dicht in X, $(x'_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge in X' mit $\|x'_k\| \leq 1$.

Ziel: Konstruiere

$$x' \in \overline{B_1(0)} \subset X', \text{ so dass (für eine Teilfolge) } x'_k \overset{*}{\rightharpoonup} x', \; k \to \infty \text{ gilt.} \tag{6.2.1}$$

Für $n \in \mathbb{N}$ ist $(\ll x'_k, x_n \gg)_{k\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge in $\mathbb{K}$. Das **Diagonalverfahren** liefert eine Teilfolge $\big(x'_{k_m}\big)_{m\in\mathbb{N}}$, so dass

$$\text{für alle } n \in \mathbb{N} \text{ der Grenzwert } \lim_{m\to\infty} \ll x'_{k_m}, x_n \gg \text{ in } \mathbb{K} \text{ existiert}. \tag{6.2.2}$$

Auf $Y := \operatorname{span}\{x_n,\, n \in \mathbb{N}\}$ lässt sich dadurch ein lineares, stetiges $x' \colon Y \to \mathbb{K}$ durch

$$\ll x', y \gg := \lim_{m\to\infty} \ll x'_{k_m}, y \gg \quad \text{für} \quad y \in Y \qquad \text{definieren}, \tag{6.2.3}$$

welches nach Fortsetzung auf X das Gewünsche erfüllt.

□

Lemma 6.2.2 X *sei normierter Raum. Dann gilt:*

$$X' \textit{ ist separabel} \implies X \textit{ ist separabel}$$

Satz 6.2.3 $(X, \|\cdot\|)$ *sei reflexiver Banachraum. Dann ist die (stark) abgeschlossene Einheitskugel* $\overline{B_1(0)} = \big\{x \in X \,\big|\, \|x\| \leq 1\big\}$ *in* X *schwach folgenkompakt.*

Wiederholung zu den Kompaktheitsbegriffen:
$K \subset X$ ist

- kompakt (**Heine–Borel'sche** Überdeckungskompaktheit)
- abzählbar kompakt (**Bolzano–Weierstraß:** Jede Folge in K besitzt mindestens einen H.P. in K)
- folgenkompakt (Jede Folge in K besitzt eine konvergente Teilfolge mit Grenzwert in K)

Nur im metrischen Raum ist alles äquivalent.

Ist X nur **Hausdorffraum**, so gilt das folgende Diagramm (vgl. Abbildung 6.1), wobei

1. A = erstes Abzählbarkeitsaxiom (jedes Element in X hat eine abzählbare Umgebungsbasis),

2. A = zweites Abzählbarkeitsaxiom (Existenz einer abzählbaren Basis der Topologie).

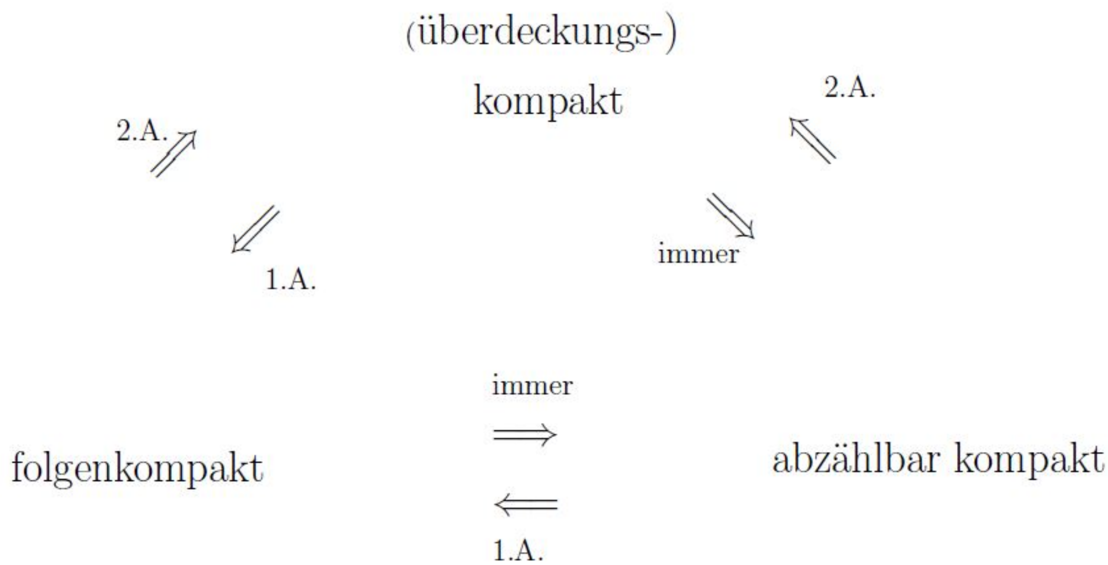

Abbildung 6.1: Zusammenhang der Kompaktheitsbegriffe

Ohne Beweis seien folgende Verallgemeinerungen zur Kompaktheit gegeben.

Satz 6.2.4 ***(Alaoglu)***
Sei $(X, \|\cdot\|)$ normierter Raum. Dann ist die (stark) abgeschlossene Einheitskugel $\overline{B_1(0)} = \{x' \in X' \mid \|x'\| \leq 1\}$ in X' schwach∗ kompakt. (z.B. [Heu86], X, Satz 69.3 oder [Dob00], S. 56)

Satz 6.2.5 *Sei $(X, \|\cdot\|)$ reflexiver Banachraum. Dann ist die abgeschlossene Einheitskugel $\overline{B_1(0)} \subset X$ schwach (überdeckungs-)kompakt.*

Dieser Satz ist aufgrund des Diagramms **nicht** äquivalent mit Satz 6.2.3.

Satz 6.2.6 ***(Eberlein–Shmulyan)***
Ein Banachraum X ist reflexiv ***genau dann****, wenn jede (stark) beschränkte Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ eine gegen ein $x_0 \in X$ schwach konvergente Teilfolge besitzt.*

Beweis: [Yos80], Seite 141.

Eine nette Anwendung ist der folgende

Satz 6.2.7 ***(Projektionssatz auf konvexe Menge)***
Es sei X reflexiv, $M \subset X$ nicht leer, konvex und abgeschlossen. Dann gibt es zu jedem $x_0 \in X \setminus M$ ein $x \in M$ mit

$$\|x_0 - x\| \;=\; dist\,(x_0, M) \;:=\; \inf_{y \in M} \|x_0 - y\| \;.$$

6.3 Direkte Methoden der Variationsrechnung

Motivation: Stetige Funktionen $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ nehmen auf **Kompakta** $M \subset \mathbb{R}^n$ Minimum und Maximum an. Wie lässt sich das für $f\colon X \to \mathbb{R}$ mit $\dim X = \infty$ verallgemeinern?

Definition 6.3.1 *X sei reeller normierter Raum, $M \subset X$ sei eine Teilmenge, $f\colon M \to \mathbb{R}$ eine Abbildung.*

(a) *f heißt **schwach folgenstetig** in $x_0 \in M$, falls $f(x_0) = \lim\limits_{k\to\infty} f(x_k)$ für alle Folgen $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset M$ mit $x_k \rightharpoonup x_0$.*

(b) *f heißt **unterhalb stetig** in $x_0 \in M$, falls $f(x_0) \le \liminf\limits_{k\to\infty} f(x_k)$ für alle Folgen $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset M$ mit $x_k \to x_0$.*

(c) *f heißt **schwach unterhalb stetig** (s.u.s) in $x_0 \in M$, falls $f(x_0) \le \liminf\limits_{k\to\infty} f(x_k)$ für alle Folgen $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset M$ mit $x_k \rightharpoonup x_0$ in X.*

(d) *f heißt **schwach unterhalb stetig in** M, falls f s.u.s für alle $x_0 \in M$ ist.*

(e) *f heißt **koerziv auf** M, falls $f(x_k) \to \infty$ für alle Folgen $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset M$ mit $\|x_k\| \to \infty$.*

Satz 6.3.2 ***(Hauptsatz der Variationsrechnung)***
*Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein reflexiver Banachraum und $M \subset X$ sei **schwach folgenabgeschlossen**, d.h.*

$$\Big[(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset M\,,\ x_n \rightharpoonup x \in X \quad \text{für} \quad n \to \infty \implies x \in M\Big]. \tag{6.3.1}$$

Ist dann $f\colon M \to \mathbb{R}$ eine auf M schwach unterhalb stetige und koerzive Abbildung, dann gilt:

1. *f ist nach unten beschränkt auf M*
2. *f nimmt das Infimum in M an*

$\Big($Existenz eines Minimierers $x_0 \in M$ mit $f(x_0) = \inf\limits_{x\in M} f(x)\Big)$.

Bemerkung: Wegen der Koezivität liegen Minimalfolgen von f in einer beschränkten Menge. Wir wissen

- beschränkte Mengen in X sind schwach kompakt.

Das ist etwas **weniger** als kompakt. Dafür fordern wir von f

- f ist schwach unterhalb stetig,

was **mehr** ist als nur unterhalb stetig.

Anwendung auf Variationsprobleme:

z.B. X = Funktionenraum über $(a,b) \subset \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f\colon X &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \int_a^b F(x,\dot{x})\,dt\,, \end{aligned}$$

gesucht: $x_0 = x_0(t)\,,\ t \in (a,b)$, mit $f(x_0) = \min\limits_{x \in M} f(x)$ und $x_0 \in M \subset X$
(M = zulässige Funktionen).

Beispiel 6.3.3

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_a^b F(x,\dot{x})\,dt \\ &= \int_a^b \left[\frac{1}{2}\big(\dot{x}(t)\big)^2 + g\big(x(t)\big)\right] dt\,, \end{aligned}$$

wobei $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine C^2–Funktion mit $g''(x) \geq \gamma > 0$ (konvex).

Dann ist $f\colon X = H^1(a,b) \to \mathbb{R}$ schwach unterhalb stetig und koerziv ($X = M$).
Satz 6.3.2 liefert die Existenz eines Minimierers $x_0 \in H^1(a,b)$ von f.
Man kann zeigen, dass x_0 sogar in $H^2(a,b)$ liegt und das folgende Randwertproblem löst

$$\text{(RWP)} \left[\begin{aligned} -\ddot{x} + g'(x) &= 0 \quad \text{in } (a,b) \\ \dot{x}(a) = \dot{x}(b) &= 0\,. \end{aligned}\right.$$

Der Beweis der schwachen unterhalb Stetigkeit lässt sich elegant mit dem folgenden Satz führen.

Satz 6.3.4 *Sei $\big(X, \|\cdot\|\big)$ normierter Raum und $f: X \to \mathbb{R}$ sei unterhalb stetig und konvex, also*

$$f\big((1-\lambda)\,u + \lambda v\big) \leq (1-\lambda)\,f(u) + \lambda f(v) \quad \text{für alle } \lambda \in (0,1) \quad \text{und für alle } u,v \in X\,.$$

Dann ist f schwach unterhalb stetig auf X.
Zum Beweis benötigen wir den folgenden Satz von Mazur

Satz 6.3.5 ***(Mazur)***
Sei $(u_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset X$, X normierter Raum und $u_k \rightharpoonup u_0$ in X für $k \to \infty$.
*Dann existiert eine Folge von **Konvexkombinationen***

$$v_k = \sum_{j=1}^{k} \alpha_{k,j}\,u_j \quad \text{mit} \quad \sum_{j=1}^{k} \alpha_{k,j} = 1 \quad \text{und} \quad \alpha_{k,j} \geq 0\,,$$

so dass $v_k \to u_0$ in X für $k \to \infty$.

Kapitel 7

Konsequenzen aus dem Satz von Baire

Zur Erinnerung (Satz 2.3.7):

Baire: Jede nichtleere offene Menge eines vollständigen metrischen Raumes (X, d) ist von zweiter Kategorie, d.h. **nicht** von erster Kategorie, bzw. mager. Komplemente von mageren Mengen sind dicht, falls (X, d) vollständig.

7.1 Satz von der gleichmäßigen Beschränktheit

Wir wollen uns in diesem Abschnitt mit der **Konvergenz** von Elementen des normierten Raumes $\Big(\mathcal{L}(X,Y)\,,\ \|\cdot\|_{\mathcal{L}(X,Y)}\Big)$ beschäftigen.

Satz 7.1.1 ***(Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit von Banach)***
Seien $(X, \|\cdot\|_X)$ ein Banachraum und $(Y, \|\cdot\|_Y)$ ein normierter Raum. Sei eine Familie von stetigen Operatoren $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda} \subset \mathcal{L}(X,Y)$ ***punktweise beschränkt****, d.h. es gelte mit Zahlen $m(x) \in \mathbb{R}$:*

$$\sup_{\lambda\in\Lambda} \big\|A_\lambda x\big\|_Y \;:=\; m(x) \;<\; \infty\,, \quad \textit{für alle } x \in X\,. \tag{7.1.1}$$

Dann ist $(A_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ ***gleichmäßig beschränkt****, d.h. $\exists\ \mu \geq 0$ mit*

$$\|A_\lambda\|_{\mathcal{L}(X,Y)} \;\leq\; \mu\,, \quad \textit{für alle } \lambda \in \Lambda\,.$$

Korollar 7.1.2 **(a)** *$M \subset X$ sei eine schwach beschränkte Teilmenge eines normierten Raumes X. Dann ist M (stark) beschränkt in X.*

(b) *Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ schwach konvergent mit $x_n \rightharpoonup \overline{x}$ in X. Dann ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ stark beschränkt, d.h. $\exists\ \mu \geq 0$ mit $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\|_X \leq \mu$.*

(c) *Sei $(x'_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X'$ schwach$*$ konvergent $x'_n \overset{*}{\rightharpoonup} \overline{x}'$ in X'. Dann ist $(x'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ stark beschränkt in X', d.h. $\exists\ \mu \geq 0$ mit $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \|x'_n\|_{X'} \leq \mu$.*

Satz 7.1.3 ***(Banach–Steinhaus)***
Seien $(X, \|\cdot\|_X)$, $(Y, \|\cdot\|_Y)$ *Banachräume und* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{L}(X,Y)$. *Dann konvergiert* $(A_n x)_{n\in\mathbb{N}}$ *in* Y ***genau dann*** *für jedes* $x \in X$, *falls die folgenden Bedingungen erfüllt sind:*

(i) $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *ist gleichmäßig beschränkt*

(ii) $(A_n x)_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergiert für jedes* x *aus einer in* X *dichten Teilmenge* D.

Zusätzlich gilt in dieser Situation:
Der durch $Ax := \lim\limits_{n\to\infty} A_n x$ *auf* X *definierte Operator* A *liegt in* $\mathcal{L}(X,Y)$ *und es gilt:*

$$\|A\| \leq \liminf_{n\to\infty} \|A_n\| . \tag{7.1.2}$$

Anwendung auf Quadraturformeln

$X = C[a,b]$, $Y = \mathbb{R}$, $f_n[x] := \sum\limits_{k=1}^{n} \beta_k^{(n)} \cdot x\left(t_k^{(n)}\right)$, wobei $a \leq t_1^{(n)} < \ldots < t_n^{(n)} \leq b$ eine Folge von Zerlegungen des Intervalls $[a,b]$ ist. Die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{L}(X,Y)$ kann als **Quadraturverfahren** zur Berechnung des Integrals

$$f[x] := \int_a^b x(t)\,dt \qquad \text{aufgefasst werden .}$$

Mit Hilfe von Banach–Steinhaus und Weierstrass erhält man:
Die Quadraturformeln $f_n[x]$ konvergieren genau dann für jedes $x \in X$ gegen $f[x]$, falls gilt:

(A) $\exists\, \mu \geq 0$ mit $\sum\limits_{k=1}^{n} \left|\beta_k^{(n)}\right| \leq \mu < \infty$ für alle $n \in \mathbb{N}$,

(B) $f_n[x]$ konvergiert für jedes Polynom x gegen $f[x]$.

Satz 7.1.4 ***(Charakterisierung von schwacher Konvergenz)***
Sei $(X, \|\cdot\|)$ *ein normierter Raum. Für* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ *gilt genau dann* $x_n \rightharpoonup x \in X$, *falls gilt:*

(i) $\exists\, \mu \geq 0$, *so dass* $\|x_n\| \leq \mu$, *für alle* $n \in \mathbb{N}$, *und*

(ii) $f[x_n] \to f[x]$ *gilt für jedes* f *aus einer in* X' *dichten Teilmenge* D'.

7.2 Satz von der offenen Abbildung

Definition 7.2.1 *Sind X und Y topologische Räume, so heißt $f\colon\ X \to Y$ offen, falls gilt*

$$U \text{ ist offen in } X \implies f(U) \text{ ist offen in } Y\,.$$

Lemma 7.2.2 **(a)** *Ist $f\colon X \to Y$ (X, Y topologische Räume) bijektiv, so gilt:*

$$f \text{ ist offen} \iff f^{-1} \text{ ist stetig}$$

(b) *Sind X, Y normierte Räume und ist $T\colon X \to Y$ linear, so gilt:*

$$T \text{ ist offen} \iff \text{Es gibt ein } \delta > 0 \text{ mit } B_\delta^Y(0) \subset T\big(B_1^X(0)\big) \subset Y\,.$$

Satz 7.2.3 ***(Satz von der offenen Abbildung)***
Seien X und Y Fréchetträume. Dann gilt für jedem Operator $T \in \mathcal{L}(X, Y)$

$$T \text{ ist surjektiv} \quad \iff \quad T \text{ offen}$$

Beweisidee (nur Hinrichtung):

Ist T surjektiv, so gilt $Y = T(X) = \bigcup\limits_{k\,\in\,\mathbb{N}} M_k$ mit $M_k := \overline{T\big(B_k(0)\big)}$.

Nach dem Baire'schen Kategoriensatz existiert ein $k_0 \in \mathbb{N}$ mit $\operatorname{int}(\overline{M_{k_0}}) \neq \emptyset$.
Wähle also $\varepsilon_0 > 0$ und $y_0 \in Y$ mit

$$B_{\varepsilon_0}(y_0) \subset \operatorname{int}\left(\overline{M_{k_0}}\right) \subset M_{k_0} = \overline{T\left(B_{k_0}(0)\right)}\,.$$

In zwei weiteren nichttrivialen Schritten wird diese Inklusion zu

$$\exists\ \delta > 0 \quad \text{so dass} \quad B_\delta(0) \subset \overline{T\left(B_1(0)\right)}$$

und schließlich

$$\exists\ \tilde{\delta} > 0 \quad \text{so dass} \quad B_{\tilde{\delta}}(0) \subset T\left(B_1(0)\right)\,,$$

was nach *Lemma 7.2.2* die Offenheit von T liefert.

$\square$

Korollar 7.2.4 ***(Satz von der inversen Abbildung)***
Seien X und Y Fréchetträume und ist $T \in \mathcal{L}(X,Y)$, so gilt:

$$T \text{ bijektiv} \quad \Longrightarrow \quad T^{-1} \in \mathcal{L}(Y,X)\,,$$

d.h. T ist topologischer linearer Isomorphisms. Sind X, Y sogar Banachräume, so existieren $m, M > 0$ mit

$$m\|x\|_X \;\leq\; \|Tx\|_Y \;\leq\; M\|x\|_X \quad \text{für alle } x \in X\,.$$

Für bijektives $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ bekommt man also die Stetigkeit der Inversen bei Vollständigkeit von X und Y sozusagen geschenkt.

Beispiel 7.2.5 *Sei* $\big(Y,\, \|\cdot\|_Y\big) := (C[a,b]\,,\; \|\cdot\|_\infty)$ *und*

$$X := \Big\{x \in C^2[a,b] \,\Big|\, x(a) \;=\; x(b) \;=\; 0\Big\}\,,$$

$$\|x\|_X := \|x\|_{C^2[a,b]}\,.$$

Dann ist $X \subset \big(C^2[a,b]\,,\; \|\cdot\|_{C^2[a,b]}\big)$ ein abgeschlossener Unterraum von $C^2[a,b]$, also selber ein Banachraum.

$A\colon X \to Y$ linear sei definiert durch

$$(Ax)(t) \;=\; a_2(t)\,\ddot{x}(t) \;+\; a_1(t)\,\dot{x}(t) \;+\; a_0(t)\,x(t) \quad \text{mit} \quad a_i \in C[a,b]\,,\; i \;=\; 0,1,2\,.$$

Dann ist A stetig und es gilt nun offenbar:

$$\left.\begin{array}{l} \text{Die Randwertaufgabe (gegeben: } y \in Y \text{, gesucht: } x \in X\text{)} \\ a_2(t)\,\ddot{x} \;+\; a_1(t)\,\dot{x} \;+\; a_0(t)\,x \;=\; y \\ \text{mit } x(a) \;=\; x(b) \;=\; 0 \\ \text{ist für alle } y \in Y \textbf{ eindeutig lösbar} \end{array}\right\} \Longleftrightarrow A \text{ ist bijektiv}$$

In diesem Fall ist wegen *Korollar 7.2.4* also $A^{-1} \in \mathcal{L}(X,Y)$.

7.3 Satz vom abgeschlossenen Graphen

Motivation: Häufige Situation $T\colon X \to Y$ linear kann nicht auf ganz X definiert werden. Trotzdem will man unter Umständen weithin die Topologie von X verwenden. Stetigkeit geht dabei aber im Allgemeinen verloren **(unbeschränkte Operatoren)**.

Definition 7.3.1 *Seien X, Y metrische lineare Räume. $M \subset X$ sei Unterraum. $T : X \to Y$ mit Definitionsmenge $D(T) = M$ sei linear. Dann heißt der Unterraum*

$$\textit{graph}(T) \;=\; G(T) \;:=\; \big\{(x, Tx) \,\big|\, x \in D(T)\big\} \;\subset\; X \,\times\, Y \quad \textit{der } \boldsymbol{Graph\ von}\ T\,.$$

Definition 7.3.2 *Der lineare Operator T heißt* **abgeschlossen**, *falls sein Graph $G(T)$ in $X \times Y$ abgeschlossen ist.*

Schreibweise: $\mathcal{C}(X, Y) := \big\{\, T\colon D(T) \subset X \to Y \;\big|\; T \textit{ ist linearer und abgeschlossener Operator} \big\}$

Die Topologie in $X \times Y$ ist dabei die (übliche) Produkttopologie.

Lemma 7.3.3 *Sei $T\colon X \to Y$ linearer Operator mit Definitionsbereich $D(T)$. Dann gilt:*

$$T \textit{ ist abgeschlossen} \iff \left\{ \begin{array}{l} \textit{Für jede Folge } \big(x_n\big)_{n \in \mathbb{N}} \subset D(T) \textit{ gilt:} \\[2ex] \left.\begin{array}{lcl} \lim\limits_{n\to\infty} \; x_n & = & x \textit{ in } X \\ \lim\limits_{n\to\infty} \; Tx_n & = & y \textit{ in } Y \end{array}\right\} \Longrightarrow \; x \in D(T) \quad \textit{und} \quad Tx = y \end{array} \right.$$

Beispiel 7.3.4

$$\begin{aligned} &T\colon\; C[a,b] \longrightarrow C[a,b]\,, \\ &Tx \;=\; \frac{d}{dt}\,x \quad \textit{mit} \quad D(T) \;=\; C^1[a,b] \quad \textit{ist abgeschlossen}\,. \end{aligned}$$

Es gilt sogar: $T \;=\; \dfrac{d^n}{dt^n} : C[a,b] \;\longrightarrow\; C[a,b]$ mit $D(T) \;=\; C^n[a,b]$ ist abgeschlossen.

Satz 7.3.5 ***(Satz vom abgeschlossenen Graphen)***
Seien X, Y Frécheträume, $T\colon X \to Y$ linear mit Definitionsbereich $D(T) \subset X$ abgeschlossen in X. Dann gilt:

$$T \textit{ ist abgeschlossen} \quad \big(\textit{d.h. } T \in \mathcal{C}(X,Y)\big) \iff T \textit{ ist stetig} \quad \big(\textit{d.h. } T \in \mathcal{B}(X,Y)\big)\,,$$

wobei

$$\mathcal{B}(X,Y) \;:=\; \Big\{ T\colon D(T) \subset X \longrightarrow Y \,\Big|\, T \;\textit{ist linearer und stetiger (beschränkt) Operator} \Big\}$$

eine Erweiterung von $\mathcal{L}(X, Y)$ auf nicht notwendigerweise überall definierte Operatoren ist. Offenbar gilt (trivialerweise) $\mathcal{L}(X, Y) \subset \mathcal{B}(X, Y)$.

Bemerkung: Ist insbesondere also $D(T) = X$ so sind die Begriffe abgeschlossener und stetiger Operator äquivalent, sonst allerdings nicht. Insbesondere gilt $\mathcal{L}(X,Y) \subset \mathcal{C}(X,Y)$, da Operatoren in $\mathcal{L}(X,Y)$ immer auf ganz X definiert sind.

Bemerkung 7.3.6 *Für $T \in \mathcal{C}(X,Y)$ gilt immer: Der Kern $N(T) = \big\{x \in D(T) \,\big|\, Tx = 0\big\}$ ist abgeschlossen in X. Im Falle, dass codim $R(T) := \dim\big(Y/R(T)\big) < \infty$ ist auch das Bild $R(T)$ in Y abgeschlossen.*

Im allgemeinen muss $R(T)$ aber nicht abgeschlossen sein.

Versieht man $D(T)$ mit einer neuen Norm, der sogenannten **Graphennorm**, so wird ein abgeschlossener Operator sogar stetig:

Satz 7.3.7 *Seien X und Y Banachräume und $T \in \mathcal{C}(X,Y)$ mit Definitionsbereich $D(T) \subset X$. Dann gilt:*

(a) *$D(T)$, versehen mit der Norm $|||x||| := \|x\|_X + \|Tx\|_Y$ ist ein Banachraum*

(b) *$T\colon \big(D(T)\,,\, |||\cdot|||\,\big) \to Y$ ist stetig*

7.4 Abschließbare Operatoren

Oft lässt sich aus einem nicht abgeschlossenen Operator $T\colon X \to Y\,,\ D(T) \subset X$ zunächst noch eine abgeschlossene Fortsetzung konstruieren.

Definition 7.4.1 *$T\colon X \to Y$ linear, $D(T) \subset X$, heißt* ***abschließbar****, falls der Abschluß seines Graphen $\overline{G(T)}$ gleich dem Graphen $G(S)$ eines linearen Operators $S\colon X \to Y\,,\ D(S) \subset X$ ist.*

Bemerkung 7.4.2

- **Schreibweise:** $S = \overline{T} =$ ***„Abschluß von*** T***“***
- *$\overline{T}$ ist ein abgeschlossener Operator*
- *$D(T) \subset D(\overline{T})$ und $\overline{T}_{|D(T)} = T$*

Lemma 7.4.3 *Sei T wie in Definition 7.4.1. Dann gilt:*

$$T \text{ ist abschließbar} \iff \left\{\begin{array}{l} \text{Für alle Folgen } \big(x_n\big)_{n\in\mathbb{N}} \subset D(T) \text{ gilt:} \\[1em] \left.\begin{array}{l} \lim\limits_{n\to\infty}\ x_n \;=\; 0 \text{ in } X \\ \lim\limits_{n\to\infty}\ Tx_n \;=\; y \text{ in } Y \end{array}\right\} \Longrightarrow\ y \;=\; 0 \end{array}\right.$$

Beispiel 7.4.4

$$X \;=\; L^2(a,b) \qquad T \;=\; \frac{d}{dt}\colon X \longrightarrow X \qquad \textit{(klassische Ableitung)}$$

$$D(T) \;=\; \hat{C}^{1,2}(a,b) \;=\; \left\{x \in C^1(a,b)\,\middle|\, x\,,\ \frac{dx}{dt} \in L^2(a,b)\right\} \subset X$$

T ist nicht abgeschlossen, aber abschließbar.

Berechnung des Abschlusses $S = \overline{T}$ von T:

$$\left.\begin{array}{r} D(T) \ni x_n \;\longrightarrow\; x \text{ in } L^2(a,b) \\[1em] \dfrac{d}{dt}\, x_n \;\longrightarrow\; y \text{ in } L^2(a,b) \end{array}\right\} \text{dann ist } x \in D(S) \text{ und } Sx \;:=\; y\,.$$

Sei $(x,y) \in \overline{G(T)}$ wie oben gegeben. Dann gilt

$$\left\langle \frac{d}{dt}\, x_n\,,\, \varphi \right\rangle_{L^2(a,b)} \;=\; -\left\langle x_n\,,\, \frac{d}{dt}\,\varphi \right\rangle_{L^2(a,b)} \qquad \text{für alle } \varphi \in C_0^\infty(a,b)\,.$$

Also

$$\int_a^b y \cdot \varphi \, dt \;=\; - \int_a^b x \cdot \frac{d}{dt} \varphi \, dt \quad \text{für alle } \varphi \in C_0^\infty(a,b)\,,$$

d.h. nach Definition ist y die schwache Ableitung von x, bzw. $y \;=\; d_t\, x\,,\; S \;=\; \overline{T} \;=\; d_t\,.$

Insbesondere ist also $x \in W^{1,2}(a,b) \;=\; H^1(a,b)$ und damit $D(\overline{T}) \subset H^1(a,b)$.

Tatsächlich gilt sogar $D(\overline{T}) \;=\; H^1(a,b)$

Korollar 7.4.5 *$T \;=\; \frac{d}{dt}\,;\; L^2(a,b) \longrightarrow L^2(a,b)$ mit $D(T) \;=\; \hat{C}^{1,2}(a,b)$ ist abschließbar und $\overline{T} \;=\; d_t \colon L^2(a,b) \longrightarrow L^2(a,b)\,,\; D(\overline{T}) \;=\; H^1(a,b)$ ist der schwache Ableitungsoperator.*

Zum Vergleich: $T \;=\; \dfrac{d}{dt} \colon C[a,b] \longrightarrow C[a,b]\,,\; D(T) = C^1[a,b]$, war schon abgeschlossen.

Wesentlicher Vorteil der schwachen Ableitung: $L^2(a,b)$ ist ein Hilbertraum, während $C[a,b]$ noch nicht einmal reflexiv ist!

Kapitel 8

Duale und adjungierte Operatoren

Motivation: Sei $X = \mathbb{R}^n\,,\ Y = \mathbb{R}^m$ und $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ eine Matrix.
Dann gilt für $A' := A^T \in \mathbb{R}^{n\times m}$:

$$\langle\, y, Ax\,\rangle_{\mathbb{R}^m} = y^T(Ax) = (Ax)^T y = x^T A^T y = \big(A^T y\big)^T x = \langle\, A'y, x\rangle_{\mathbb{R}^n} \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^n \text{ und } y \in \mathbb{R}^m \tag{8.0.1}$$

In diesem Sinne ist A' der zu A duale Operator. Als lineare Abbildungen aufgefasst gilt daher:

$$A \in \mathcal{L}(X,Y) \quad \text{und} \quad A' \in \mathcal{L}\,(Y',X')$$

Lemma (Alternativsatz der linearen Algebra): In der obigen Situation gilt:

(a) $R(A)^\perp = N\,(A') \subset Y'$

(b) $R(A) = N\,(A')^\perp \subset Y \qquad (N = \text{kern}\,,\ R = \text{range})$

Die Frage der Lösbarkeit von $Ax = y$ (was ist $R(A)$?) wird mit Hilfe des Kerns $N(A')$ beantwortet.

Ziel ist eine Verallgemeinerung des Alternativsatzes auf unendlich dimensionale Räume.

8.1 Duale Operatoren

Zwei lineare Operatoren $T : D(T) \subset X \to Y$ und $S : D(S) \subset Y' \to X'$ heißen **zueinander dual**, falls gilt

$$\ll y', Tx \gg \, = \, \ll Sy', x \gg \quad \text{für alle } x \in D(T) \text{ und } y' \in D(S)\,.$$

Zunächst ist der zu T duale Operator damit noch nicht eindeutig bestimmt. Dies ändert sich, wenn $D(T)$ dicht in X ist:

Satz 8.1.1 *Seien X, Y normierte lineare Räume, X' und Y' dazu duale Banachräume und $T\colon X \to Y$, $D(T) \subset X$ sei linearer Operator. Dann gilt:*

$$D(T) \subset X \text{ ist dicht } \Longleftrightarrow \begin{cases} \text{Für jedes feste } y' \in Y' \text{ gilt:} \\ \text{Falls ein } x' \in X' \text{ existiert mit} \\ \\ \ll y', Tx \gg \; = \; \ll x', x \gg \quad \text{für alle } x \in D(T)\,, \\ \text{dann ist } x' \text{ durch (8.1.2) eindeutig bestimmt.} \end{cases} \tag{8.1.2}$$

Bemerkung: Bei gegebenem $y' \in Y'$ muss nicht notwendigerweise ein $x' \in X'$ existieren, so dass (8.1.2) gilt!

Definition 8.1.2 *Seien X, Y lineare normierte Räume, $T\colon X \to Y$ sei linear und dicht definiert (d.h. $\overline{D(T)} = X$). Der zu T **duale** (lineare) **Operator** $T'\colon Y' \to X'$ ist dann wie folgt definiert:*

$$y' \in D(T') \iff \begin{cases} \text{Zu } y' \in Y' \text{ existiert ein } x' \in X' \text{ mit} \\ \ll y' \,,\, Tx \gg \, = \, \ll x', x \gg \quad \text{für alle } x \in D(T) \end{cases} \tag{8.1.3}$$

In diesem Fall setzen wir $T'y' := x'$, d.h. es gilt

$$\ll y', Tx \gg \; = \; \ll T'y', x \gg \quad \forall\, x \in D(T) \quad \forall\, y' \in D\,(T')\ . \tag{8.1.4}$$

Bemerkung 8.1.3

- *Wegen Satz 8.1.1 und weil $D(T)$ dicht in X ist, ist T' wohldefiniert*
- *(8.1.3) heißt insbesondere, dass $y' \circ T$ auf $D(T)$ stetig ist*
- *In der Regel wird deshalb $D(T') \subsetneqq Y'$ sein*
- *$D(T') = \{0\}$ ist nicht ausgeschlossen*

Beispiel 8.1.4 *Sei $1 < p < \infty$ und $X = Y = \ell^p$. Betrachte den **Linksshift–Operator***

$$T\colon X \to Y$$
$$(s_1, s_2, s_3, \ldots) \longmapsto (s_2, s_3, \ldots)$$

mit $D(T) = X$. Um T' zu berechnen, identifizieren wir $X' = Y'$ mit ℓ^q, wobei $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ (vgl. Satz 5.5.2 aus Kapitel V).

Behauptung: $D(T') = Y' = \ell^q$. Sei dazu $y' = (t_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^q = (\ell^p)'$ gegeben.
Dann gilt nach obigem Satz für y' die Darstellung:

$$y'[x] = \sum_{n\in\mathbb{N}}^{\infty} t_n\, s_n \quad \text{für alle} \quad x = (s_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^p$$

Konstruktion von $x' \in X' = \ell^q$: Setze $x' := \left(\tilde{t}_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$, $\tilde{t}_1 = 0$, $\tilde{t}_n := t_{n-1}$, $n \geq 2$.
Dann gilt:

$$\ll y', Tx \gg = \sum_{n=1}^{\infty} t_n\, s_{n+1} = \sum_{n=2}^{\infty} \tilde{t}_n\, s_n = \ll x', x \gg \quad \text{für alle} \quad x = (s_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^p = D(T)\,,$$

also ist in der Tat $T'y' = x'$. Somit ist T' der **Rechtsshift–Operator**

$$T' \colon Y' \to X'$$
$$(t_1, t_2, \ldots) \longmapsto (0, t_1, t_2, \ldots)\ .$$

Satz 8.1.5 *Der duale Operator aus Definition 8.1.2 ist stets ein abgeschlossener Operator.*

Satz 8.1.6 *Sei X normierter linearer Raum und Y sei reflexiver Banachraum.*
$T\colon X \to Y$ sei linear und dicht definiert. Dann gilt:

$$T \text{ ist abschließbar} \iff D(T') \text{ ist dicht in } Y'$$

Satz 8.1.7 *Seien X und Y normierte Räume, und $T \in \mathcal{L}(X,Y)$. Dann ist auch $T' \in \mathcal{L}(Y', X')$ und $\|T\|_{\mathcal{L}(X,Y)} = \|T'\|_{\mathcal{L}(Y',X')}$. D.h. die Abbildung*

$$' \colon \mathcal{L}(X,Y) \longrightarrow \mathcal{L}(Y', X')$$
$$T \longmapsto T'$$

ist linear und eine isometrische Einbettung.

Bemerkung: Die obige Einbettung ist in der Regel nicht surjektiv.

Satz 8.1.8 *Sei X normierter Raum. $S, T\colon X \to X$ seien linear, T sei dicht definiert, $S \in \mathcal{L}(X,X)$, also insbesondere $D(S) = X$ und $S' \in \mathcal{L}(X', X')$. Dann gilt:*

(a) *$S \circ T\colon X \to X$ ist dicht definiert mit $D(S\circ T) = D(T)$*

(b) *$(S\circ T)'\colon X' \to X'$ existiert also und es gilt*

$$(S\circ T)' = T' \circ S' \quad \text{mit} \quad D\big((S\circ T)'\big) = D(T'\circ S')\,,$$

d.h., $(S\circ T)'$ ist definiert für all diejenigen $x' \in X'$ mit $S'x' \in D(T')$.

Korollar 8.1.9 *Sei X normierter Raum und seien $S, T \in \mathcal{L}(X, X)$.*
Dann ist $(S \circ T)' = T' \circ S' \in \mathcal{L}(X', X')$.

Satz 8.1.10 *Sei $T\colon X \to Y$ linear und dicht definiert. Dann gilt*

$$D(T') = Y' \iff \begin{cases} T \text{ bildet jede konvergente Folge } (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ in } D(T) \subset X \\ \text{in eine schwach konvergente Folge in } Y \text{ ab} \\ \left(x_n \xrightarrow{\|\cdot\|_X} x \in D(T)\ (n \to \infty) \implies Tx_n \rightharpoonup Tx\ (n \to \infty)\right) . \end{cases}$$

8.2 Adjungierte Operatoren

Ganz analog zur dualen Abbildung erklärt man:

Definition 8.2.1 *Seien* $\big(X, \langle\cdot,\cdot\rangle_X\big)$ *und* $\big(Y, \langle\cdot,\cdot\rangle_Y\big)$ *unitäre Räume und* $T: X \to Y$ *sei linear und dicht definiert. Der zu* T **adjungierte** *(lineare) Operator* $T^*: Y \to X$ *ist dann wie folgt definiert:*

$$y \in D(T^*) \subset Y \iff \begin{cases} \text{Zu } y \in Y \text{ existiert ein } z \in X \text{ mit} \\ \langle z, x\rangle_X = \langle y, Tx\rangle_Y \quad \text{für alle} \quad x \in D(T) \end{cases}$$

In diesem Falle setzen wir $T^*y := z$.

Bemerkung 8.2.2 *Es gilt also*

$$\langle T^*y, x\rangle_X = \langle y, Tx\rangle_Y \quad \begin{array}{l} \text{für alle } \ x \in D(T) \quad \text{und} \\ \text{für alle } \ y \in D(T^*) \end{array} \tag{8.2.1}$$

Man vergleiche auch die Ähnlichkeit mit (8.1.4)

$$\ll T'y', x \gg_{X'\times X} = \ll y', Tx \gg_{Y'\times Y} \quad \begin{array}{l} \text{für alle } \ x \in D(T) \\ \text{für alle } \ y' \in D(T') \end{array} \tag{8.2.2}$$

Sind X und Y sogar Hilberträume, lässt sich vermöge der Riesz'schen Isomorphismen ein Zusammenhang zwischen T' und T^* herstellen. Seien dazu

$$\begin{aligned} J_X : X &\longrightarrow X', \\ u &\longmapsto J_X u, \quad \text{wobei } (J_X u)[x] := \langle u, x\rangle_X, \ x \in X, \ \text{für } u \in X \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J_Y : Y &\longrightarrow Y', \\ v &\longmapsto J_Y v, \quad \text{wobei } (J_Y v)[y] := \langle v, y\rangle_Y, \ y \in Y, \quad \text{für } v \in Y \end{aligned}$$

die Riesz'schen Isomorphismen.

Lemma 8.2.3 *Seien* X, Y *Hilberträume und* $T: X \to Y$ *sei linear und dicht definiert. Dann gilt:*

$$T^* = J_X^{-1} \circ T' \circ J_Y \quad \text{und} \quad D(T^*) = J_Y^{-1}\,(D(T')) \tag{8.2.3}$$

Beispiel 8.2.4 $X = Y = L^2(a,b)$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *und* (a,b) *sei ein endliches Intervall.*

$$Tx = \frac{d}{dt}x, \ D(T) = \big\{x \in C^1[a,b], \ x(a) = x(b) = 0\big\} \quad \text{ist dicht in} \quad L^2(a,b).$$

Dann ist $T^* = -d_t$ (schwache Ableitung) mit $D(T^*) = W^{1,2}(a,b)$. Für

$$Sx = \frac{d}{dt}x \quad \text{mit} \quad D(S) = C^1[a,b]$$

ist $S^* = -d_t$ mit $D(S^*) = W_0^{1,2}(a,b) = cl_{\|\cdot\|_{1,2}}(C_0^\infty(a,b))$.

Satz 8.2.5 *X, Y seien Hilberträume und $T\colon X \to Y$ sei linear und dicht definiert. Dann gilt:*

(a) *T^* ist abgeschlossen*

(b) *T ist abschließbar $\iff$ $D(T^*)$ ist dicht in Y*

(c) *$T \in \mathcal{L}(X,Y) \implies T^* \in \mathcal{L}(Y,X)$ und $\|T\|_{\mathcal{L}(X,Y)} = \|T^*\|_{\mathcal{L}(Y,X)}$*

(d) *T ist abschließbar $\implies$ $\overline{T} = T^{**} := (T^*)^*$*

(e) *T ist abgeschlossen $\iff$ $T = T^{**}$*

(f) *T ist abschließbar $\implies$ $\left(\overline{T}\right)^* = T^*$*

Folgende Rechenregeln ergeben sich für Operatoren aus $\mathcal{L}(X,Y)$:

Satz 8.2.6 (Eigenschaften der Adjungierten) *Seien X, Y, Z Hilberträume. Dann gilt:*

(i) $(\alpha A + B)^* = \overline{\alpha}A^* + B^*$ *für* $A, B \in \mathcal{L}(X,Y)$ *und* $\alpha \in \mathbb{K}$.

(ii) $(AB)^* = B^*A^*$ *für* $A \in \mathcal{L}(X,Y)$ *und* $B \in \mathcal{L}(Y,Z)$.

(iii) $(A^{-1})^* = (A^*)^{-1}$ *für* $A \in \mathcal{L}(X,Y)$, *falls die Inverse von A existiert.*

(iv) $(A^*)^* = A$ *für* $A \in \mathcal{L}(X,Y)$.

Definition 8.2.7 *X sei Hilbertraum, $T\colon X \to X$ sei linear und dicht definiert.*

(a) *T heißt* ***symmetrisch*** $:\iff$ *T^* ist eine* ***Erweiterung*** *von T $\big($d.h. $D(T) \subset D(T^*)$ und $T^*_{|D(T)} = T\big)$. In Zeichen: „$T \subset T^*$“. Insbesondere gilt also*

$$\langle Ty, x\rangle = \langle y, Tx\rangle \quad \text{für alle} \quad x, y \in D(T). \tag{8.2.4}$$

Im Falle $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ nennt man diese Operatoren ***hermitesch****.*

(b) *T heißt* ***selbstadjungiert*** $:\iff T = T^*$ $\big($*insbesondere also* $D(T) = D(T^*)\big)$

(c) *T heißt* ***wesentlich selbstadjungiert*** $:\iff$ *$\overline{T}$ ist selbstadjungiert.*

Achtung: die Begriffe selbstadjungiert und symmetrisch, bzw. hermitesch sind nur für beschränkte (überall definierte) Operatoren aquivalent.

Bemerkung 8.2.8 **(a)** *T ist symmetrisch* $\Longleftrightarrow$ $\langle Ty, x \rangle = \langle y, Tx \rangle$ *für alle* $x, y \in D(T)$

$$\textit{In diesem Fall gilt: } \begin{cases} \bullet\ D(T^*) \ \textit{ist dicht in } X \textit{ und damit existiert } \overline{T} \\ \bullet\ D(T) \subsetneqq D(T^*) \ \textit{ist möglich} \end{cases}$$

(b) *Ist T selbstadjungiert, so ist T symmetrisch*

(c) *T ist selbstadjungiert* $\Longleftrightarrow$

$$\Big[\langle y^*, x\rangle = \langle y, Tx\rangle \quad \textit{für alle} \quad x \in D(T) \Longrightarrow y \in D(T) \quad \textit{mit} \quad Ty = y^*\Big]$$

(d) *Ist T selbstadjungiert, so ist T abgeschlossen*

(e) *Ist T symmetrisch und $D(T) = X$, so ist T selbstadjungiert und stetig*

Beispiel 8.2.9

$$T\colon L^2(a,b) \longrightarrow L^2(a,b)$$

$$Tx = \frac{d^2}{dt^2}\, x \ \textit{mit } D(T) = C^2[a,b] \cap \big\{x(a) = x(b) = x'(a) = x'(b) = 0\big\}$$

ist symmetrisch. Es gilt:

- $\overline{T}x = d_t\left(\frac{d}{dt}\, x\right)$ *mit* $D(\overline{T}) = W^{2,2}(a,b) \cap \big\{x(a) = x(b) = x'(a) = x'(b) = 0\big\}$.
  Damit ist T **nicht** *wesentlich selbstadjungiert.*

- *Wählt man für* $T = \frac{d^2}{dt^2}$ *aber* $D(T) = C^2[a,b] \cap \big\{x(a) = x(b) = 0\big\}$, *erhält man*

$$\begin{aligned} \overline{T}x = d_t\left(\frac{d}{dt}\, x\right) \ \textit{mit } D\left(\overline{T}\right) &= W^{2,2}(a,b) \cap \big\{x(a) = x(b) = 0\big\} \\ &= W^{2,2}(a,b) \cap W_0^{1,2}(a,b) \end{aligned}$$

  und $(\overline{T})^* = \overline{T}$.

Beispiel 8.2.10 *Sei $X = L^2(\Omega)$, wobei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offenes, beschränktes Gebiet mit glattem Rand $\partial\Omega$ sei. Der Laplace–Operator*

$$Tu = \Delta u \quad \textit{mit} \quad D(T) = C_0^\infty(\Omega)$$

ist symmetrisch, denn nach der Greenschen Formel gilt $\langle Tu, v\rangle_{L^2(\Omega)} = \langle u, Tv\rangle_{L^2(\Omega)}$ *für alle* $u, v \in D(T)$. *Der Abschluß von T,*

$$\overline{T}u = \sum_{i=1}^n d_{x_i}\left(d_{x_i} u\right) = \Delta u \quad \textit{(im schwachen Sinne) mit} \quad D\left(\overline{T}\right) = W^{2,2}(\Omega) \cap W_0^{1,2}(\Omega)\,,$$

ist selbstadjungiert.

Selbstadjungierte Operatoren aus $\mathcal{L}(H) := \mathcal{L}(H,H)$ erzeugten sogenannte unitäre Gruppen:

Satz 8.2.11 (Erzeugung unitärer Gruppen) *Für selbstadjungierte Operatoren $A \in \mathcal{L}(H)$, H Hilbertraum über $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, definiert*

$$U(t) \;:=\; \exp(-itA) \;:=\; \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\,(-itA)^k \in \mathcal{L}(H) \tag{8.2.5}$$

eine Familie von Isometrien $\{U(t) \mid t \in \mathbb{R}\} \subset \mathcal{L}(H)$ mit

(i) $U(0) \;=\; \mathrm{Id}\,,$

(ii) $U(s)\cdot U(t) \;=\; U(s+t) \quad$ *für alle* $\quad s,t \in \mathbb{R}\,,$

(iii) $i\,\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}U(t) \;=\; AU(t) \;=\; U(t)A \quad$ *für alle* $\quad t \in \mathbb{R}\,.$

Mit Hilfe solcher unitären Gruppen lassen sich **formale Differentialgleichungen** im Hilbertraum lösen:
gesucht $x = x(t) \in H, t \in \mathbb{R}$ mit

$$i\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x \;=\; Ax\,, \quad x(0) \;=\; x_0 \in H \tag{8.2.6}$$

hat als Lösung $x(t) \;=\; U(t)\,x_0$.

8.3 Satz vom abgeschlossenen Wertebereich

Satz 8.3.1 ***(Satz vom abgeschlossenen Wertebereich; Banach)***
Banachraumversion $\big(T\colon X \to Y\ ,\ T'\colon Y' \to X'\big)$*:*
Seien X, Y Banachräume, $T\colon X \to Y$ sei linear, dicht definiert und ***abgeschlossener*** *Operator.*
Dann sind äquivalent:

(1) *Der Wertebereich $R(T)$ ist abgeschlossen in Y*

(2) *Der Wertebereich $R(T')$ ist abgeschlossen in X'*

(3) $R(T) = N(T')^{\perp} := \big\{y \in Y\ ,\ \ll y', y \gg\, = 0 \quad \text{für alle} \quad y' \in N\,(T')\big\} \subset Y$

(4) $R\,(T') = N(T)^{\perp} := \big\{x' \in X'\ ,\ \ll x', x \gg\, = 0 \quad \text{für alle} \quad x \in N(T)\big\} \subset X'$

Hilbertraumversion $\big(T\colon X \to Y\ ,\ T^*\colon Y \to X\big)$*:*
Seien X, Y Hilberträume, $T\colon X \to Y$ sei linear, dicht definiert und ***abgeschlossener*** *Operator.*
Dann sind äquivalent:

(1) *$R(T)$ ist abgeschlossen in Y*

(2) *$R\,(T^*)$ ist abgeschlossen in X*

(3) $R(T) = N\,(T^*)^{\perp} := \big\{y \in Y\ ,\ \langle y, z\rangle_Y = 0 \quad \text{für alle} \quad z \in N\,(T^*)\big\} \subset Y$

(4) $R\,(T^*) = N(T)^{\perp} := \big\{x \in X\ ,\ \langle x, v\rangle_X = 0 \quad \text{für alle} \quad v \in N(T)\big\} \subset X$

Bemerkung: (1) ist z.B. erfüllt, falls $\dim R(T) < \infty$, oder falls $\operatorname{codim} R(T) < \infty$ (vgl. Bemerkung 7.3.6).

Korollar 8.3.2 ***(Fredholm–Alternative)***
Sei $T\colon X \to Y$ linear, dicht definiert und abgeschlossener Operator mit abgeschlossenem Bild $R(T)$. Dann gilt für $y_0 \in Y$ fest.

$$\left.\begin{array}{l}\text{Die Operatorgleichung } Tx = y_0 \\ \big(\text{gesucht: } x \in D(T)\big) \text{ ist lösbar}\end{array}\right\} \iff \Big[\text{für alle } y' \in D(T') \text{mit } T'y' = 0 \implies y'[y_0] = 0\Big]$$

Korollar 8.3.3 *Sei X Hilbertraum und $T\colon X \to X$ selbstadjungiert, also $T = T^*$.*
Dann gilt:

$$R(T) \text{ ist abgeschlossen} \iff R(T) = N(T)^{\perp} \iff X = R(T) \oplus N(T)$$

Beispiel 8.3.4

$$Tx = d_t\left(p \cdot \frac{d}{dt}\,x\right) + qx \textit{ mit vorgegebenen Funktionen } p, q \in C[a,b]\,,\ p > 0$$

$$T\colon L^2(a,b) \longrightarrow L^2(a,b) \quad \textit{mit} \quad D(T) = W_0^{1,2}(a,b) \quad \textit{ist selbstadjungiert}$$

$$x \in N(T) \iff \begin{cases} d_t\left(p\,\dfrac{d}{dt}\,x\right) + \quad qx = 0 \quad \textit{in } [a,b] \\ \qquad\qquad x(a) = x(b) = 0 \end{cases}$$

Regularitätstheorie für diese lineare Differentialgleichung 2ter Ordnung liefert, dass $N(T) \subset C^2[a,b]$. Da $N(T)$ entweder null- oder eindimensional ist, ist $R(T) = L^2(a,b)$ oder $\operatorname{codim} R(T) = 1$.

Korollar 8.3.5 *Seien X und Y Banachräume, $T\colon X \to Y$ linearer und abgeschlossener Operator mit $\overline{D(T)} = X$. Dann gilt:*

(a) $R(T) = Y \iff T'$ *hat eine stetige Inverse* $(T')^{-1}\colon R(T') \longrightarrow D(T')$

(b) $R(T') = X' \iff T$ *hat eine stetige Inverse* $T^{-1}\colon R(T) \longrightarrow D(T)$

Korollar 8.3.6 *Sei X ein Hilbertraum über $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ und $T\colon X \to X$ linearer, dicht definierter und abgeschlossener Operator. Ist dann für ein $c > 0$*

$$Re\langle Tx, x\rangle \geq c\|x\|^2 \quad \textit{für alle} \quad x \in D(T) \qquad \big(\iff: T \textit{ ist } \boldsymbol{positiv\ definit}\big)\,,$$

so ist T^* surjektiv ($R(T^*) = X$).

Beispiel 8.3.7 ***(Fortsetzung von Beispiel 8.2.10)***
$T = -\Delta\colon L_2(\Omega) \to L_2(\Omega)$ mit $D(T) = W^{2,2}(\Omega) \cap W_0^{1,2}(\Omega)$ war selbstadjungiert.
T ist positiv definit, denn es existiert ein $c = c_\Omega > 0$ mit

$$\big\langle -\Delta u, u\big\rangle_{L^2(\Omega)} = \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega \left(d_{x_i}u(x)\right)^2\,dx \geq c \cdot \big\|u\big\|^2_{L^2(\Omega)} \quad \textit{für alle} \quad u \in W^{2,2}(\Omega) \cap W_0^{1,2}(\Omega)\,.$$

*Damit ist T surjektiv, d.h. das **Dirichletproblem***

$$\textit{gesucht ist } u \in W^{2,2}(\Omega) \quad \textit{mit} \quad \begin{cases} -\Delta u = f & \textit{in } \Omega \\ \quad\ u = 0 & \textit{auf } \partial\Omega \end{cases}$$

ist für jedes $f \in L^2(\Omega)$ im schwachen Sinne lösbar.

(näheres dazu vgl. Vorlesung partielle Differentialgleichungen)

Kapitel 9

Spektraltheorie

9.1 Kompakte Operatoren

Definition 9.1.1 (kompakter Operator) *Seien V, W normierte Räume. Ein linearer Operator $A: V \longrightarrow W$ heißt **kompakt,** wenn das Bild jeder beschränkten Menge M in V eine **relativ kompakte** Menge in W ist, das heißt, $\overline{A(M)}$ ist kompakt.*

Notation:

$$\mathcal{K}(V,W) := \left\{ A\colon V \longrightarrow W \;\middle|\; A \text{ ist kompakter Operator} \right\}. \tag{9.1.1}$$

Da kompakte Mengen immer beschränkt sind, ist jeder kompakte Operator ein beschränkter Operator, das heißt, es gilt $\mathcal{K}(V,W) \subset \mathcal{L}(V,W)$.

Bemerkung 9.1.2 *$A: V \longrightarrow W$ ist genau dann kompakter Operator, wenn für Folgen in V gilt:*

$$\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset V \text{ ist beschränkt} \implies \{Ax_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset W \text{ besitzt eine konvergente Teilfolge in } W. \tag{9.1.2}$$

Beispiele 9.1.3 **(i)** *Sei $A \in \mathcal{L}(V,W)$ mit $\dim V < \infty$ **oder** $W < \infty$.
Dann ist A kompakter Operator, also $A \in \mathcal{K}(V,W)$.*

(ii)
$$\left.\begin{array}{l} A \in \mathcal{L}(V,W)\,,\ B \in \mathcal{L}(W,Z) \\ \text{und } A \textbf{ oder } B \text{ kompakter Operator} \end{array}\right\} \implies B \circ A \in \mathcal{K}(V,Z)\,.$$

(iii) Lösungsoperatoren *von Differentialgleichungen sind oft kompakt, z.B.* $G \subset \mathbb{R}^n$ *beschränktes Gebiet und* $\Delta =$ *Laplace–Operator*

$$A = \Delta\colon V = H^2(G) \cap \underbrace{\left\{u\colon \overline{G} \to \mathbb{R} \;\middle|\; u(x) = 0 \quad \forall\, x \in \partial G\right\}}_{\textit{Nullrandbedingungen}} \longrightarrow W = L^2(G)$$

ist bijektiv und $A^{-1} \in \mathcal{L}(W,V)$ *ist als Operator* $A^{-1}\colon L^2(G) \to L^2(G)$ *kompakt.*

Literatur: *D. Werner [Wer00], FA, Satz V. 2.13*

Sätze über kompakte Operatoren

Satz 9.1.4 (Schauder) *Seien* V, W *Hilberträume und* $A \in \mathcal{L}(V,W)$. *Dann gilt:*

$$A \textit{ ist kompakter Operator} \iff A^* \in \mathcal{L}(W,V) \textit{ ist kompakter Operator}$$

Literatur: *K. Yosida [Yos80], FA, Chapter X, § 4*

Satz 9.1.5 *Seien* V, W *Banachräume. Sei* $A \in \mathcal{L}(V,W)$ *und* $\left(A_n\right)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{K}(V,W)$ *eine Folge kompakter Operatoren mit*

$$\left\|A_n - A\right\|_{\mathcal{L}(V,W)} \longrightarrow (n \to \infty)\,, \quad \textit{dann ist} \quad A \in \mathcal{K}(V,W)\,.$$

Literatur: *D. Werner [Wer00], FA, Satz II.3.2*

Satz 9.1.6 *Sei* V *ein normierter Raum und* $A\colon V \to V$ *ein kompakter Operator und* $\left(\mathrm{Id} - A\right)\colon V \to V$ *sei injektiv.* $\left(\mathrm{Id}\colon V \to V,\ x \mapsto x \quad \textit{identische Abbildung}\right)$
Dann ist

$$\left(\mathrm{Id} - A\right)^{-1}\colon\ R\left(\mathrm{Id} - A\right) \longrightarrow V$$

stetig.

9.2 Riesz-Schauder Theorie kompakter Operatoren

Literatur: F. Hirzebruch/W. Scharlau: [HS96] und T. Kato: [Kat95]

Definition 9.2.1 *Seien V ein Banachraum über $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ und $A \in \mathcal{L}(V)$.*
Dann heißt

$$\sigma(A) := \Big\{ \lambda \in \mathbb{C} \,\Big|\, \lambda\,\mathrm{Id} - A \colon V \longrightarrow V \text{ ist nicht invertierbar} \Big\} \tag{9.2.1}$$

das ***Spektrum*** *von A. Das Komplement $\rho(A) := \mathbb{C} \setminus \sigma(A)$ heißt* ***Resolventenmenge****.*
Für $\lambda \in \rho(A)$ heißen die Operatoren

$$R(\lambda; A) := (\lambda\,\mathrm{Id} - A)^{-1} \in \mathcal{L}(V) \tag{9.2.2}$$

Resolventen *von A.*

Bemerkung: Für $\lambda \in \rho(A)$ ist $(\lambda\,\mathrm{Id} - A) : V \longrightarrow V$ invertierbar, also bijektiv, das heißt, mit dem Satz von der inversen Abbildung auch stetig (Korollar 7.2.4). Damit gilt

$$\rho(A) = \big\{ \lambda \in \mathbb{C} \,\big|\, (\lambda\,\mathrm{Id} - A) \colon V \longrightarrow V \quad \text{ist bijektiv und} \quad (\lambda\,\mathrm{Id} - A)^{-1} \text{ ist stetig} \big\}\,. \tag{9.2.3}$$

Wie für $\dim(V) < \infty$ nennen wir $\lambda \in \mathbb{C}$ **Eigenwert** von A, falls

$$\underbrace{N(\lambda\,\mathrm{Id} - A)}_{=\,\textbf{Eigenraum}\text{ von }\lambda} \neq \{0\} \quad \Longleftrightarrow \quad \exists \underbrace{x}_{=\,\textbf{Eigenvektor}} \neq 0 \text{ mit } Ax = \lambda x \tag{9.2.4}$$

Offenbar ist jeder Eigenwert von A ein Element von $\sigma(A)$, also ein **Spektralwert**.

Im endlich dimensionalen Fall gilt auch die Umkehrung, denn für $\dim V < \infty$ gilt für $A \colon V \to V$ linear, dass

$$A \text{ ist injektiv} \quad \Longleftrightarrow \quad A \text{ ist surjektiv}\,. \tag{9.2.5}$$

Lemma 9.2.2 *Seien V ein Banachraum und $A \in \mathcal{L}(V)$ bijektiv. Für $T \in \mathcal{L}(V)$ gelte*

$$\|A - T\|_{\mathcal{L}(V)} < \frac{1}{\|A^{-1}\|_{\mathcal{L}(V)}}\,.$$

Dann ist auch T bijektiv.

Korollar 9.2.3 *Für $A \in \mathcal{L}(V)$ ist die Resolventenmenge $\rho(A) \subset \mathbb{C}$ offen.*

Satz 9.2.4 *Seien V ein Banachraum über $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ und $A \in \mathcal{L}(V)$. Dann ist das Spektrum $\sigma(A)$ von A nicht–leer und kompakt (abgeschlossen und beschränkt). Genauer gilt*

$$\sigma(A) \subset \left\{ \lambda \in \mathbb{C} \,\middle|\, |\lambda| \le \|A\|_{\mathcal{L}(V)} \right\}. \tag{9.2.6}$$

Definition 9.2.5 *Das Spektrum $\sigma(A)$ von $A \in \mathcal{L}(V)$ zerfällt in die drei disjunkten Anteile*

(i) *das* ***Punktspektrum***

$$\sigma_p(A) := \left\{ \lambda \in \sigma(A) \,\middle|\, N(\lambda \operatorname{Id} - A) \ne \{0\} \right\},$$

das heißt, $\lambda \operatorname{Id} - A$ ist ***nicht injektiv*** *(λ Eigenwert).*

(ii) *das* ***kontinuierliche Spektrum***

$$\sigma_c(A) := \left\{ \lambda \in \sigma(A) \,\middle|\, (\lambda \operatorname{Id} - A) \textit{ ist injektiv, nicht surjektiv und } R(\lambda \operatorname{Id} - A) \textit{ ist dicht in } V \right\}.$$

(iii) *das* ***Residualspektrum***

$$\sigma_r(A) := \left\{ \lambda \in \sigma(A) \,\middle|\, (\lambda \operatorname{Id} - A) \textit{ ist injektiv, nicht surjektiv und } R(\lambda \operatorname{Id} - A) \textit{ ist nicht dicht in } V \right\}.$$

Bemerkung: Offenbar ergibt das eine disjunkte Zerlegung des Spektrums:

$$\sigma(A) = \sigma_p(A) \,\dot\cup\, \sigma_c(A) \,\dot\cup\, \sigma_r(A) \tag{9.2.7}$$

Beispiele:

(i) Falls $\dim(V) < \infty$, dann ist $\sigma(A) = \sigma_p(A)$, vergleiche (9.2.5).

(ii) Für den Shiftoperator $A\, \ell^2 \longrightarrow \ell^2,\ x := (\xi_j)_{j \in \mathbb{N}} \longmapsto (0, \xi_1, \xi_2, \dots)$ ist $0 \in \sigma_r(A)$.

Lemma 9.2.6 *Sei $A \in \mathcal{L}(V)$ ein kompakter Operator und $\dim(V) = \infty$. Dann gilt $0 \in \sigma(A)$.*

Satz 9.2.7 (Riesz–Schauder) *Seien $A \in \mathcal{L}(V)$ kompakter Operator und V Banachraum. Dann gilt:*

(i) *Das Spektrum $\sigma(A)$ von A besteht aus höchstens abzählbar vielen Punkten in $\mathbb{C}$ mit $0 \in \sigma(A)$ (falls $\dim(V) = \infty$) als einzig möglichem Häufungspunkt.*

(ii) *$\lambda \in \sigma(A) \setminus \{0\} \implies \lambda \in \sigma_p(A)$, das heißt, bis auf $0 \in \mathbb{C}$ sind alle Spektralwerte immer Eigenwerte.*

(iii) *Jeder Eigenwert $\lambda \in \sigma_p(A) \setminus \{0\}$ hat endliche geometrische und algebraische Vielfachheit, das heißt,*

$$1 \le \operatorname{geo}(\lambda) := \dim\Big(N(\lambda \operatorname{Id} - A) \Big) \le \operatorname{alg}(\lambda) := \dim\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} N\Big[(\lambda \operatorname{Id} - A)^n \Big] \right) < \infty.$$

Beweis: [Yos80], Kapitel X, § 5, Theorem 2.

Folgerung 9.2.8 *Die Integralgleichung für $x \in C[0,1]$ (gesucht)*

$$\lambda \cdot x(t) = \int_0^1 k(t,s)\, x(s)\, \mathrm{d}s\,, \tag{9.2.8}$$

wobei $k\colon [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ stetig vorgegeben ist, hat für jedes $\lambda \neq 0$ höchstens endlich viele linear unabhängige Lösungen.

Satz 9.2.9 *Seien H ein Hilbertraum und $A \in \mathcal{L}(H)$ kompakt und zusätzlich hermitesch ($\widehat{=}$ hier selbstadjungiert). Dann gilt neben den Aussagen von Satz 9.2.7:*

(i) *Das Spektrum von A ist reell, das heißt, es gilt $\sigma(A) \subset \mathbb{R}$.*

(ii) *Falls $\lambda, \mu \in \sigma_p(A)$ mit $\lambda \neq \mu$, so stehen die Eigenräume zu λ und μ aufeinander senkrecht, d.h.*

$$N(\lambda \operatorname{Id} - A) \perp N(\mu \operatorname{Id} - A)\ .$$

(iii) *Falls $H \neq \{0\}$, so existiert ein $\lambda \in \sigma_p(A)$ mit $|\lambda| = \|A\|$.*

Satz 9.2.10 (Spektralsatz) *Ist H Hilbertraum und $A \in \mathcal{L}(H)$ kompakter Operator und zusätzlich hermitesch, dann hat A höchstens abzählbar viele von Null verschiedene Eigenwerte. Alle Eigenwerte sind reell. D.h. es gibt eine abzählbare Menge $S \subset \mathbb{N}$, so dass alle nichttrivialen Eigenwerte von A*

$$\mathbb{R} \ni \lambda_k \neq 0\,,\ k \in S \subset \mathbb{N}\,, \quad \text{mit} \quad 0 < \big|\lambda_k\big| \leq \big|\lambda_{k-1}\big| \leq \big\|A\big\|$$

entsprechend ihrer Vielfachheit angeordnet sind und ihre Eigenvektoren $\big(u_k\big)_{k \in S}$ ein ONS bilden, also $\langle u_k, u_\ell \rangle = \delta_{k\,\ell}$ für $k,\ell \in S$. Bezüglich dieser Eigenwerte und Eigenvektoren hat A dann folgende Darstellung: Für alle $x \in H$ gilt:

$$Ax = \sum_{k \in S} \lambda_k \cdot \langle u_k, x \rangle \cdot u_k \tag{9.2.9}$$

Korollar 9.2.11 *In der Situation von Satz 9.2.10 gilt*

(i) $R(A) \subset \overline{\operatorname{span}\{u_k \mid k \in S\}}\,,$

(ii) $\overline{R(A)} = \overline{\operatorname{span}\{u_k \mid k \in S\}}\,,$

(iii) $H = N(A) \oplus \overline{\operatorname{span}\{u_k \mid k \in S\}}\,.$

Bemerkung 9.2.12 *Falls H ein* ***separabler Hilbertraum*** *ist, d.h. eine abzählbare dichte Teilmenge besitzt, existiert ein abzählbares vollständiges ONS von H. Dieses erhält man z.B., indem man die Eigenvektoren $\{u_k \mid k \in S\}$ aus dem Spektralsatz durch orthogonale Vektoren aus $N(A)$ (diese entsprechen Eigenvektoren zum Eigenwert $\lambda = 0$) ergänzt. Damit erhält man im Spektralsatz 9.2.10 sogar ein VONS $\{e_k \mid k \in \mathbb{N}\}$ von H bestehend aus Eigenvektoren von A. Für alle $x \in H$ gilt dann*

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \langle e_k, x \rangle \cdot e_k \quad \textit{und} \quad Ax = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \cdot \langle e_k, x \rangle \cdot e_k \,. \tag{9.2.10}$$

9.3 Ausblick: Spektra unbeschränkter selbstadjungierter Operatoren

Literatur: G.R. Sell/Y. You [SY00], S. 66

Sei H wieder separabler Hilbertraum und

$$A\colon H \longrightarrow H \quad \text{mit dichtem Definitionsbereich} \quad \mathrm{D}(A) \subsetneqq H \tag{9.3.1}$$

ein **selbstadjungierter**, aber **unbeschränkter Operator**. Dann kann A nicht kompakt sein. Trotzdem kann man auch in diesem Fall manchmal die Riesz–Schauder–Theorie kompakter Operatoren anwenden, wenn man fordert, dass die Resolventen von A kompakte Operatoren sind.

Annahme 9.3.1 **(i)** *A sei* ***nach unten beschränkt****, das heißt, es existiert ein $a \in \mathbb{R}$, so dass*

$$a\|x\|^2 \;\leq\; \langle x, Ax\rangle \quad \text{für alle} \quad x \in \mathrm{D}(A). \tag{9.3.2}$$

(ii) *A habe* ***kompakte Resolvente****, das heißt, die Resolventen $R(\lambda; A) = (\lambda \operatorname{Id} - A)^{-1}$ sind kompakte Operatoren für alle $\lambda \in \rho(A)$, wobei die Resolventenmenge $\rho(A)$ „**analog**“ (aber nicht gleich!) zu Definition 9.2.1 erklärt wird.*

Da A ein selbstadjungierter Operator ist, ist das Spektrum wieder reell. Wegen (9.3.2) muss das Spektrum im Intervall $[a, \infty)$ liegen. Dass A kompakte Resolventen hat, impliziert, dass auch $\sigma(A)$ nur abzählbar viele Eigenwerte enthält, die sich jetzt aber höchstens bei ∞ häufen dürfen. Damit gilt $\sigma(A) = \sigma_p(A)$ und $\dim\big[N(\lambda \operatorname{Id} - A)\,\big] < \infty$ für alle $\lambda \in \sigma_p(A)$.

Das Spektrum von A hat keinen (endlichen) Häufungspunkt. Damit lassen sich die Eigenwerte λ_k von A wieder aufzählen (mit $\lim\limits_{k\to\infty} \lambda_k = \infty$, falls $\dim(H) = \infty$), das heißt,

$$a \;\leq\; \lambda_1 \;\leq\; \lambda_2 \;\leq\; \lambda_3 \;\leq\; \ldots\,, \tag{9.3.3}$$

mit Mehrfachnennung bei Vielfachheiten, und die entsprechenden Eigenvektoren $\{e_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ bilden ein VONS von H. Analog zu (9.2.10) gilt

$$Ax \;=\; \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \cdot \langle e_k, x\rangle \cdot e_k \quad \text{für alle} \quad x \in \mathrm{D}(A), \tag{9.3.4}$$

wobei aus Parseval und der Bedingung $Ax \in H$ folgt, dass

$$\mathrm{D}(A) \;=\; \left\{ x \in H \;\middle|\; \sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^2 \cdot \Big|\langle e_k, x\rangle\Big|^2 < \infty \right\}. \tag{9.3.5}$$

Satz 9.3.2 *Sei H separabler Hilbertraum mit $\dim H = \infty$ und $A\colon H \to H$, mit dichtem Definitionsbereich $\mathrm{D}(A) \subsetneqq H$ ein selbstadjungierter und unbeschränkter Operator für den Annahme 9.3.1 gilt.*

*Dann erzeugt $(-A)$ eine **„Halbgruppe“** $B(t) := \exp(-At) \in \mathcal{L}(H)$, $t \geq 0$, vermöge*

$$B(t)x := \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\lambda_k t} \cdot \langle e_k, x\rangle \cdot e_k\,, \quad x \in H\,, \tag{9.3.6}$$

wobei $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ein VONS in H aus Eigenvektoren von A zu Eigenwerten $\lambda_k \in \mathbb{R}$ (mit $\lim\limits_{k\to\infty} \lambda_k = \infty$; vgl. (9.3.3)) ist, und es gilt:

(i) $B(0) = \mathrm{Id}$,

(ii) $B(t+s) = B(t)\cdot B(s)$ *für alle* $t, s \geq 0$,

(iii) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} B(t)x = -AB(t)x$ *für alle* $t > 0$ *und alle* $x \in H$.

Zusatz: *Falls $a > 0$, so gilt $B(t)x \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$ für alle $x \in H$.*

Bemerkung 9.3.3 **(i)** *Wegen **(iii)** ist $u(t) := B(t)x$ eine Lösung des Anfangswertproblems*

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} u(t) &= -Au(t)\,, \quad t \geq 0\,,\\ u(0) &= x\,. \end{aligned} \tag{9.3.7}$$

(ii) *Satz 9.3.2 ist zum Beispiel für*

$$A = (-\Delta)\colon L^2(G) \longrightarrow L^2(G)\,,\ \mathrm{D}(A) = H^2(G) \cap \{u = 0 \ \text{auf}\ \partial G\}$$

*aus Beispiel 9.1.3 **(iii)** anwendbar. Im Spezialfall $G = (0,\pi)$ liefert (9.3.6) die Lösung der linearen Wärmeleitungsgleichung $\partial_t u = \partial_x^2 u$.*

Hier war $e_k(y) = \sin(ky)$, $y \in (0,\pi)$, und $\lambda_k = k^2 \to \infty$ $(k \to \infty)$

Als Erweiterung von Satz 8.2.11 für unbeschränkte Operatoren erhalten wir jetzt:

Satz 9.3.4 *Sei H separabler Hilbertraum mit $\dim H = \infty$ und $A\colon H \to H$, mit dichtem Definitionsbereich $\mathrm{D}(A) \subsetneqq H$ ein selbstadjungierter und unbeschränkter Operator für den Annahme 9.3.1 gilt.*

*Dann erzeugt $(-i\,A)$ eine **unitäre Gruppe** von Isometrien $U(t) := \exp(-i\,At) \in \mathcal{L}(H)$, $t \in \mathbb{R}$, vermöge*

$$U(t)\,x := \sum_{k=1}^{\infty} e^{-i\,\lambda_k\,t} \cdot \langle e_k, x\rangle \cdot e_k\,, \quad x \in H\,, \tag{9.3.8}$$

wobei $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ein VONS in H aus Eigenvektoren von A zu Eigenwerten $\lambda_k \in \mathbb{R}$ (mit $\lim\limits_{k\to\infty} \lambda_k = \infty$; vgl. (9.3.3)) ist, und es gilt:

(i) $U(0) \,=\, \mathrm{Id}\,,$

(ii) $U(s) \cdot U(t) \,=\, U(t+s)\,, \quad t, s \in \mathbb{R}\,,$

(iii) $i \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} U(t)x \,=\, AU(t)x \,=\, U(t)Ax$ *für alle* $t \in \mathbb{R}$ *und alle* $x \in \mathrm{D}(A)\,.$

Bemerkung 9.3.5 **(i)** *Satz 9.3.4 angewendet auf* $A = -\Delta$ *aus Bemerkung 9.3.3 (ii) liefert eine Lösung* $v(t) = U(t)x$, *für* $x \in \mathrm{D}(A)$, *der* ***linearen Schrödinger–Gleichung*** *(ohne Potential) für ein im Gebiet* G *beschränktes Teilchen*

$$\begin{aligned} i \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \,&=\, -\Delta v \quad \textit{in } G \\ v(0) \,&=\, x \end{aligned} \tag{9.3.9}$$

(ii) *Ist das Gebiet* G ***unbeschränkt****, also z.B.* $G = \mathbb{R}^3$, *kann man so nicht mehr vorgehen, weil dort* $A = -\Delta$ *keine kompakte Resolvente hat. Das liegt im Wesentlichen daran, dass der Satz von Rellich nur für beschränkte Gebiete gilt, also etwa:*

$$\textit{die Einbettung} \quad H^1(\mathbb{R}^n) \,\subset\, L^2(\mathbb{R}^n) \quad \textit{ist } \textbf{\textit{nicht}} \textit{ kompakt}$$

vgl. [RR04], Example 7.28

(iii) *Falls der unbeschränkte Operator nur selbstadjungiert ist (ohne kompakte Resolvente), erzeugt er immer noch eine unitäre Gruppe für die* ***(i)*** *bis* ***(iii)*** *aus Satz 9.3.4 gilt, aber die Konstruktion von* $U(t)$ *wird deutlich komplizierter (vgl. [Paz92], Theorem 10.8 (Satz von Stone) oder [GS11], Theorem 23.27.). Für Anwendungen zur Schrödinger–Gleichung siehe [Paz92], §7.5 „Schrödinger Equation“.*

(iv) *Falls man allerdings a–priori weiß, dass ein unbeschränkter selbstadjungierter Operator* $A\colon H \to H$ *mit* $\mathrm{D}(A) \subsetneqq H$ *ein VONS bestehend aus Eigenvektoren* e_k, $k \in \mathbb{N}$, *von* A *mit zugehörigen Eigenwerten* $\lambda_k \to \infty$ $(k \to \infty)$ *besitzt, dann liefert* $v(t) := U(t)x$ *aus (9.3.8) für* $x \in \mathrm{D}(A)$ *auch hier wieder eine Lösung von*

$$\begin{aligned} i \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} v(t) \,&=\, Av(t) \\ v(0) \,&=\, x\,, \end{aligned} \tag{9.3.10}$$

vgl. [FK14], §24, 3.2 Satz auf S. 686.

Index

Literaturverzeichnis

[Alt92] H.W. Alt. *Lineare Funktionalanalysis.* Springer, Berlin, 1992.

[Dob00] M. Dobrowolski. *Angewandte Funktionalanalysis.* Springer, 2000.

[FK14] H. Fischer and H. Kaul. *Mathematik für Physiker.* Band 2, 4nd ed. Springer, 2014.

[GS11] S.J. Gustafson and I.M. Sigal. *Mathematical Concepts of Quantum Mechanics.* 2nd ed. Springer, 2011.

[Heu86] H. Heuser. *Funktionalanalysis.* Teubner, 1986.

[HS96] F. Hirzebruch and W. Scharlau. *Einführung in die Funktionalanalysis.* 2nd ed. Spektrum Akademischer Verlag GmbH, 1996.

[Kat95] T. Kato. *Perturbation theory for linear operators.* 2.edition. Springer–Verlag, Berlin, 1995.

[Paz92] A. Pazy. *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations.* 2nd ed. Springer, 1992.

[RR04] M. Renardy and R. C. Rogers. *An Introduction to Partial Differential Equations.* TAM 13, 2nd ed. Springer, 2004.

[Rud73] W. Rudin. *Functional Analysis.* McGraw Hill, New York, 1973.

[Sch75] H. Schubert. *Topologie. Eine Einführung. 4. Auflage.* B.G. Teubner, Stuttgart, 1975.

[SY00] G. R. Sell and Y. You. *Dynamics of Evolutionary Equations.* Springer, Berlin, 2000.

[Wer00] D. Werner. *Funktionalanalysis.* 3nd ed. Springer, 2000.

[Yos80] K. Yosida. *Functional Analysis.* Springer, Berlin, 1980.