Konstruktive Wahl von Jordan-Basen im Hauptraum einzelner Eigenwerte

(Anlage zu §4.5 meines HM2–Skripts)

Stanislaus Maier-Paape

6. Juni 2025

Zur Konstruktion einer Jordan–Basis für eine gegebene Matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ genügt es, eine Jordan–Basis im Hauptraum Haupt$(A; \lambda_0)$ zu einem beliebigen, aber festen Eigenwert $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ zu bestimmen. Dabei werden in der Praxis meist mehrere Hauptvektorketten, die zusammen linear unabhängig sein müssen, benötigt. Die Konstruktion dieser Jordan–Basis ist recht komplex und enthält einige Tücken. Bevor wir ins Detail gehen, hier erst einmal eine Zusammenfassung der in der Vorlesung/Übung hergeleiteten Erkenntnisse zum Hauptraum Haupt$(A;\, \lambda_0)$. $E_n \in \mathbb{C}^{n\times n}$ ist dabei die Einheitsmatrix.

Satz 1. *Ist $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ Eigenwert von $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, dann gilt*

(a) *Haupt*$(A;\, \lambda_0) := \bigcup\limits_{k \in \mathbb{N}} \ker\Big[\big(A - \lambda_0 E_n\big)^k\Big] \subset \mathbb{C}^n$

(b) $n_{\text{alg}}(\lambda_0) := \dim$ *Haupt*$(A;\, \lambda_0)$ *heißt **algebraische Vielfachheit** von λ_0.*

(c) *Haupt*$(A;\, \lambda_0)$ *enthält insbesondere $\ker[A - \lambda_0 E_n]$, was genau dem Eigenraum zum Eigenwert λ_0 entspricht, der alle Eigenvektoren enthält.*

(d) $n_{\text{geo}}(\lambda_0) := \dim\Big(\ker\big[A - \lambda_0 E_n\big]\Big)$ *heißt **geometrische Vielfachheit** von λ_0.*

(e) *Wir setzen $N_k := \ker\Big[\big(A - \lambda_0 E_n\big)^k\Big]$, $k \in \mathbb{N}$, und $N_0 := \{0\}$. Dann gilt $N_{k-1} \subset N_k$ für alle $k \in \mathbb{N}$, d.h. die Kerne, die als Vereinigung den Hauptraum bilden, sind ineinander geschachtelt.*

(f) *Ein Vektor $w \in N_k \setminus N_{k-1}$, $k \geq 1$, heißt **Hauptvektor** der Stufe k, wobei Hauptvektoren der Stufe 1 gerade die Eigenvektoren sind. Der Vektor $w_k := w$ bildet zusammen mit den Vektoren $w_j := (A - \lambda_0 E_n)\, w_{j+1}$, $j = k-1, \ldots, 1$, eine sogenannte **Hauptvektorkette**, wobei $w_j \in N_j \setminus N_{j-1}$ offenbar ein Hauptvektor der Stufe j ist. Insbesondere ist $w_1 = (A - \lambda_0 E_n)^{k-1}\, w_k \in N_1$ ein Eigenvektor. Wir wissen bereits, dass eine solche Hauptvektorkette lauter linear unabhängige Vektoren enthält.*

(g) *Ein Hauptvektor* $w \in N_k \setminus N_{k-1}$, $k \geq 1$, *heißt* ***maximal****, wenn* $(A - \lambda_0 E_n)\, z = w$ *keine Lösung* $z \in \mathbb{C}^n$ *hat. Die zugehörige Hauptvektorkette heißt dann ebenso maximal.*

(h) *Es gilt*

$$\mathit{Haupt}(A;\, \lambda_0) \;=\; \ker\left[\left(A - \lambda_0\, E_n\right)^{n_{\text{alg}}(\lambda_0)}\right] \;=\; \ker\left[\left(A - \lambda_0\, E_n\right)^{\ell^*}\right], \tag{1}$$

wobei $\ell^* = \ell^*(\lambda_0) \in \mathbb{N}$ *minimal mit der Eigenschaft* $\ker\left[\left(A - \lambda_0\, E_n\right)^{\ell^*}\right] = \ker\left[\left(A - \lambda_0\, E_n\right)^{\ell^*+1}\right]$ *ist.*

Eine der zentralen Aussagen der Jordan–Theorie ist, dass man immer eine Basis von Haupt$(A;\, \lambda_0)$ finden kann, die aus (maximalen) Hauptvektorketten besteht. Dabei treten mehrere Schwierigkeiten auf. Sind bereits mehrere gemeinsam linear unabhängige Hauptvektorketten gefunden, die aber noch keine Basis von Haupt$(A; \lambda_0)$ bilden, muss weiter gesucht werden, um eine solche Jordan–Basis zu finden. Wegen (1) gilt es, einen neuen (maximalen) Hauptvektor k–ter Stufe w_k mit $k \leq \ell^*$ möglichst groß zu suchen. Aber selbst, wenn

$$w_k \notin \text{span}\{\text{der bereits bekannten Hauptvektorketten}\},$$

ist nicht gesichert, ob die alten Ketten zusammen mit der neuen Kette linear unabhängig sind, wie folgendes Beispiel zeigt:

Beispiel 1. *Sei* e_j, $1 \leq j \leq 5$, *der* j*–te Einheitsvektor aus* $\mathbb{C}^5$ *und*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{5\times 5}. \tag{2}$$

Hier ist $\lambda_0 = 0$ *fünffacher Eigenwert, d.h.* $n_{\text{alg}}(0) = 5$. $v_2 = e_2$ *und* $v_1 = e_1$ *bilden wegen* $Av_2 = (A - \lambda_0 E_5)\, v_2 = v_1$ *eine Hauptvektorkette* (v_2, v_1)*, die maximal ist, da in diesem Beispiel* $\ell^*(0) = 2$*. Außerdem ist* $w_2 = e_3$ *ein weiterer Hauptvektor der Stufe 2 mit* $w_2 \notin \text{span}\{v_1, v_2\}$*, der zusammen mit* $w_1 = Aw_2 = e_1$ *eine weitere maximale Hauptvektorkette* (w_2, w_1) *bildet. Trotzdem sind die vier Vektoren* v_1, v_2, w_1, w_2 *offenbar nicht linear unabhängig.*

Ein einfaches Kriterium für die lineare Unabhängigkeit zweier Hauptvektorketten ist folgendes Lemma.

Lemma 1. [Nachweis der linearen Unabhängigkeit zweier Hauptvektorketten zum gleichen Eigenwert] *Seien* $(v_k, \ldots, v_1)$ *und* $(w_\ell, \ldots, w_1)$ *zwei Hauptvektorketten zum gleichen Eigenwert* $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ *der Matrix* $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$*. Angenommen, die Eigenvektoren der Ketten,* v_1 *und* w_1*, sind linear unabhängig. Dann sind auch die* $k+\ell$ *Vektoren* $\{v_1, \ldots, v_k\,,\, w_1, \ldots, w_\ell\}$ *bereits linear unabhängig.*

Beweis: Wir behandeln zwei Fälle.

Fall 1: $k = \ell$.
Angenommen, es gäbe eine Linearkombination

$$\sum_{j=1}^{k} \alpha_j v_j + \sum_{j=1}^{k} \beta_j w_j = 0. \tag{3}$$

Da $(v_k, \ldots, v_1)$ Hauptvektorkette, gilt $(A - \lambda_0 E_n)v_j = v_{j-1}$ für $j = k, \ldots, 2$ und für den Eigenvektor v_1 ist $(A - \lambda_0 E_n)\, v_1 = 0$. Analog für die w_j. Wende $(A - \lambda_0 E_n)^{k-1}$ auf beide Seiten von (3) an. Es folgt

$$\alpha_k v_1 + \beta_k w_1 = 0.$$

Wegen der angenommenen linearen Unabhängigkeit von v_1 und w_1 muss $\alpha_k = \beta_k = 0$ gelten.

Setze dies ein und wiederhole den Vorgang: Wende $(A - \lambda_0 E_n)^{k-2}$ auf die reduzierte Gleichung an, usw. Induktiv folgt, dass alle $\alpha_j = \beta_j = 0$ sind. Also sind beide Ketten zusammen linear unabhängig.

Fall 2: $k > \ell$.
Wir setzen wieder eine Linearkombination an:

$$\sum_{j=1}^{k} \alpha_j v_j + \sum_{j=1}^{\ell} \beta_j w_j = 0. \tag{4}$$

Wende $(A - \lambda_0 E_n)^{k-1}$ auf beide Seiten an. Da v_k analog wie oben nach (3) durch $(A - \lambda_0 E_n)^{k-1}$ auf v_1 abgebildet wird, alle v_j, $j < k$, sowie alle w_j aber durch $(A - \lambda_0 E_n)^{k-1}$ auf Null abgebildet werden, verschwinden alle weiteren Terme. Es bleibt:

$$\alpha_k v_1 = 0.$$

Da $v_1 \neq 0$, folgt $\alpha_k = 0$.

Durch Einsetzen von $\alpha_k = 0$ fällt der Term $\alpha_k v_k$ in der ersten Summe in (4) weg und man ist zurück im Fall mit $k - 1$ und ℓ Vektoren. Führe diese Reduktion weiter durch, bis die Längen der beiden Ketten gleich sind, dann folgt die Behauptung aus dem ersten Fall.

$\square$

Das folgende Kriterium zum Nachweis der linearen Unabhängigkeit mehrerer Hauptvektorketten ist die kanonische Erweiterung von **Lemma 1**.

Lemma 2. [Nachweis der linearen Unabhängigkeit mehrerer Hauptvektorketten zum gleichen Eigenwert] *Seien $(v_{\ell_1}^{(1)}, \ldots, v_1^{(1)}), \ldots, (v_{\ell_m}^{(m)}, \ldots, v_1^{(m)})$ insgesamt $m \geq 2$ bereits konstruierte Hauptvektorketten zum Eigenwert λ_0 der Matrix $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ mit zusammen linear unabhängigen Vektoren. Des Weiteren sei $(w_k, \ldots, w_1)$ eine weitere Hauptvektorkette zu λ_0, so dass die Eigenvektoren w_1 zusammen mit den $v_1^{(i)}$ $(i = 1, \ldots, m)$ linear unabhängig sind. Dann sind alle Vektoren aus allen Hauptvektorketten bereits linear unabhängig.*

Dieses Lemma folgt unmittelbar aus dem folgenden allgemeineren **Satz 2**, welcher ein einfaches, aber sehr nützliches Kriterium liefert, lineare Unabhängigkeit von Hauptvektorketten nachzuprüfen.

Satz 2. [Charakterisierung von linear unabhängigen Hauptvektorketten zum gleichen Eigenwert] *Seien* $\left(v_{\ell_1}^{(1)}, \ldots, v_1^{(1)}\right), \ldots, \left(v_{\ell_r}^{(r)}, \ldots, v_1^{(r)}\right)$ *insgesamt* $r \geq 2$ *Hauptvektorketten zum Eigenwert* λ_0 *von* $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$*. Dann sind alle Vektoren aus allen Hauptvektorketten zusammen linear unabhängig genau dann, wenn deren Eigenvektoren* $v_1^{(i)} (i = 1, \ldots, r)$ *linear unabhängig sind.*

Beweis: Die Hinrichtung ist offensichtlich trivial. Für die Rückrichtung machen wir eine Induktion über die maximale Kettenlänge $\ell_{\max} := \max\{\ell_1, \ldots, \ell_r\} \geq 1$.

Induktionsanfang: $\ell_{\max} = 1$.
Hier ist wieder nichts zu zeigen, da alle Hauptvektorketten nur aus einem Eigenvektor bestehen.

Induktionsschritt: Wir nehmen an, die Behauptung sei für $\ell_{\max} = k-1$ bereits gezeigt. Sei jetzt $\ell_{\max} = k$.

Wieder wird eine Linearkombination aller Hauptvektorketten angesetzt:

$$\sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{\ell_i} \alpha_j^{(i)} v_j^{(i)} = 0. \tag{5}$$

Wende $(A-\lambda_0 E_n)^{k-1}$ auf (5) an. Falls $I_{\max} \subset \{1, \ldots, r\}$ die Indexmenge der Hauptvektorketten bezeichnet, welche einen Hauptvektor der höchsten Stufe k besitzen, „überleben" dies wie zuvor im Beweis von **Lemma 1** nur die Koeffizienten der höchsten Stufe $\alpha_k^{(i)}, i \in I_{\max}$. Es folgt

$$\sum_{i \in I_{\max}} \alpha_k^{(i)} \left(A - \lambda_0 E_n\right)^{k-1} v_k^{(i)} = \sum_{i \in I_{\max}} \alpha_k^{(i)} \, v_1^{(i)} = 0.$$

Wegen der angenommenen linearen Unabhängigkeit von $v_1^{(1)}, \ldots, v_1^{(r)}$ folgt $\alpha_k^{(i)} = 0$ für alle $i \in I_{\max}$. Einsetzen in (5) liefert

$$\sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{\min\{\ell_i, k-1\}} \alpha_j^{(i)} v_j^{(i)} = 0. \tag{6}$$

Die übrig gebliebenen Ketten haben aber nur noch maximale Länge $k-1$, sind also nach Induktionsannahme linear unabhängig, so dass alle Koeffizienten aus (6) Null sein müssen. Damit sind schließlich auch alle Koeffizienten aus (5) zu Null diskutiert. Also sind alle Vektoren aus allen Hauptvektorketten für $\ell_{\max} = k$ zusammen linear unabhängig.

Damit folgt die Behauptung von **Satz 2** nach dem Prinzip der vollständigen Induktion. $\square$

Zur Vorbereitung des Konstruktionsverfahren für Jordan–Basen, welches gleich im Anschluss kommt, benötigen wir noch eine Folgerung aus **Satz 2**.

Folgerung 1. [Direkte Summe von Hauptvektoren der Stufe j und N_{j-1}] *Sei wieder $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ Eigenwert von $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ und für $1 \le j \le d := \ell^*(\lambda_0)$ seien $w_j^{(1)}, \dots, w_j^{(m)} \in N_j \setminus N_{j-1}$ m Hauptvektoren der Stufe j, wobei*

$$m \;=\; \dim N_j \;-\; \dim N_{j-1}. \tag{7}$$

Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(a) $N_j = \operatorname{span}\Big\{ w_j^{(1)}, \dots, w_j^{(m)} \Big\} \,\oplus\, N_{j-1}$ (8)

(b) *Die Eigenvektoren $w_1^{(k)} := (A - \lambda_0 E_n)^{j-1}\, w_j^{(k)},\ 1 \le k \le m,$ sind linear unabhängig.* (9)

Beweis: *Es sind zwei Implikationen zu zeigen.*

ad „(b) ⇒ (a)“: *Die Aussage **(a)** unterteilt sich in zwei Teilaussagen:*

(a1) $\operatorname{span}\Big\{ w_j^{(1)}, \dots, w_j^{(m)} \Big\} \,\cap\, N_{j-1} \;=\; \{0\}$

(a2) $\operatorname{span}\Big\{ w_j^{(1)}, \dots, w_j^{(m)} \Big\} \,+\, N_{j-1} \;=\; N_j$

ad(a1): Wir zeigen dies indirekt.

Angenommen, es existiert ein $w^* \neq 0$ mit $w^* \in \operatorname{span}\Big\{ w_j^{(1)}, \dots, w_j^{(m)} \Big\} \cap N_{j-1}$. Dann findet man $(\beta_1, \dots, \beta_m) \neq \big(0, \dots, 0\big)$ mit

$$w^* \;=\; \sum_{k=1}^{m} \beta_k\, w_j^{(k)} \in N_{j-1} \setminus \{0\}. \tag{10}$$

Insbesondere ist $\sum\limits_{k=1}^{m} \beta_k\, w_j^{(k)} - w^* = 0$ und es folgt durch Anwendung von $(A - \lambda_0 E_n)^{j-1}$ auf beiden Seiten

$$0 \;=\; (A - \lambda_0 E_n)^{j-1} \sum_{k=1}^{m} \beta_k\, w_j^{(k)} \;-\; \underbrace{(A - \lambda_0 E_n)^{j-1}\, w^*}_{\overset{(10)}{=}\; 0} \;=\; \sum_{k=1}^{m} \beta_k\, w_1^{(k)}.$$

Da aber nach (9) $w_1^{(1)}, \dots, w_1^{(m)}$ linear unabhängig sind, folgt $\beta_1 = \beta_2 = \ldots = \beta_m = 0$, also ein Widerspruch zu $w^* \neq 0$.

ad(a2): Wegen **(a1)** hat der Schnitt in **(a1)** Dimension Null. Damit hat der Unterraum

$$U \;:=\; \operatorname{span}\Big\{ w_j^{(1)}, \dots, w_j^{(m)} \Big\} \,\oplus\, N_{j-1}$$

von N_j laut Dimensionsformel die Dimension

$$\begin{aligned} \dim U \;&=\; \dim\Big(\operatorname{span}\big\{ w_j^{(1)}, \dots, w_j^{(m)} \big\}\Big) \;+\; \dim N_{j-1} \\ &=\; m \;+\; \dim N_{j-1} \;\overset{(7)}{=}\; \dim N_j, \end{aligned}$$

wobei verwendet wurde, dass $w_j^{(1)}, \ldots, w_j^{(m)}$ wegen (9) und **Satz 2** linear unabhängig sind. Daraus folgt $U = N_j$.

ad „(a) ⇒ (b)“: Angenommen, die Eigenvektoren $w_1^{(1)}, \ldots, w_1^{(m)}$ wären linear abhängig, d.h. es existieren $(\gamma_1, \ldots, \gamma_m) \neq \big(0, \ldots, 0\big)$ mit $\sum\limits_{k=1}^{m} \gamma_k \, w_1^{(k)} = 0$. Da $w_1^{(k)} = (A - \lambda_0 E_n)^{j-1} \, w_j^{(k)}$, für $1 \leq k \leq m$, folgt

$$(A - \lambda_0 E_n)^{j-1} \sum_{k=1}^{m} \gamma_k \, w_j^{(k)} = 0,$$

also insbesondere ist $b^* := \sum\limits_{k=1}^{m} \gamma_k \, w_j^{(k)} \in N_{j-1}$.

Fall 1: $b^* = 0$.
Dann sind $w_j^{(1)}, \ldots, w_j^{(m)}$ linear abhängig und folglich gilt $\dim\Big(\mathrm{span}\big\{w_j^{(1)}, \ldots, w_j^{(m)}\big\}\Big) \leq m - 1$, was wegen (7) $\mathrm{span}\Big\{w_j^{(1)}, \ldots, w_j^{(m)}\Big\} + N_{j-1} \subsetneqq N_j$ impliziert.

Fall 2: $b^* \neq 0$.
In diesem Fall ist die Summe in (8) nicht direkt.

In jedem Fall gilt (8) nicht; ein Widerspruch. □

Wir haben jetzt alle Zutaten, um das Konstruktionsverfahren anzugeben.

Konstruktionsverfahren für Jordan–Basen im Hauptraum Haupt$(\boldsymbol{A}; \boldsymbol{\lambda_0})$

Wegen **Satz 1 (b)** müssen insgesamt $n_{\mathrm{alg}}(\lambda_0)$ viele Vektoren bestehend aus gemeinsam linear unabhängigen maximalen Hauptvektorketten zum Eigenwert λ_0 gefunden werden. Erst dann hat man eine Jordan–Basis des Hauptraums Haupt$(A; \lambda_0)$ gefunden. Wie viele maximale Hauptvektorketten welcher Stufe dabei benötigt werden, ergibt sich, wie wir gleich sehen werden, aus den Dimensionen der Kerne

$$N_\ell \,=\, \ker\Big[\big(A - \lambda_0 \, E_n\big)^\ell\Big], \quad 1 \,\leq\, \ell \,\leq\, \ell^*(\lambda_0), \quad N_0 = \{0\}. \tag{11}$$

So ist z.B. $\dim N_1 = n_{\mathrm{geo}}(\lambda_0)$, da N_1 genau dem Eigenraum von λ_0 entspricht. Demnach hat die Jordan–Normalform von A genau $n_{\mathrm{geo}}(\lambda_0)$ viele Jordan–Kästen zum Eigenwert λ_0, da jede Hauptvektorkette genau einen Eigenvektor hat. Daher besteht die Jordan–Basis des Hauptraums Haupt$(A;\, \lambda_0)$ auch aus genau $n_{\mathrm{geo}}(\lambda_0)$ vielen maximalen Hauptvektorketten.

Falls $\ell^*(\lambda_0) = 1$, ist Haupt$\,(A; \lambda_0) = N_1$ und es genügt, eine Basis von N_1 zu bestimmen, um eine Jordan–Basis des Hauptraums zu erhalten. Im anderen Fall, also wenn $d := \ell^*(\lambda_0) > 1$, muss auch die Größe der Jordan–Kästen, bzw. die Länge der Hauptvektorketten, bestimmt werden. Das Ergebnis fassen wir in folgendem Satz zusammen.

Satz 3. [Struktur der Jordan–Basis im Hauptraum mit konstruktivem Beweis] *Im Falle $d = \ell^*(\lambda_0) > 1$ mit $\ell^*(\lambda_0)$ definiert in* **Satz 1 (h)**, *setze*

$$s_d \,:=\, \dim\, N_d \,-\, \dim N_{d-1} \overset{(1)}{=} n_{\mathrm{alg}}(\lambda_0) - \dim\, N_{d-1} \,>\, 0 \tag{12}$$

und weiter rekursiv für $j = d-1, \ldots, 1$

$$s_j := \dim N_j - \dim N_{j-1} - \sum_{\ell = j+1}^{d} s_\ell \geq 0, \tag{13}$$

was vermöge Induktion äquivalent ist zu

$$s_j = 2\dim N_j - \dim N_{j-1} - \dim N_{j+1}. \tag{14}$$

Dann hat der Hauptraum $\mathit{Haupt}(A; \lambda_0)$ *eine Jordan–Basis bestehend aus* s_d *Hauptvektorketten der längstmöglichen Länge* $d = \ell^*(\lambda_0)$ *sowie, falls* $s_j > 0$, $j \in \{2, \ldots, d-1\}$, *bestehend aus zusätzlich jeweils* s_j *maximalen Hauptvektorketten der Länge* j *und schließlich aus weiteren* s_1 *maximalen Eigenvektoren, falls* $s_1 > 0$. *Die entsprechenden Jordan–Kästen haben die Größen* $d \times d$, $j \times j$, $j \in \{2, \ldots, d-1\}$, *bzw.* 1×1. *Die genaue Auswahl der Hauptvektorketten wird im Beweis beschrieben.*

Zur Verifizierung, dass die dort zu wählenden Hauptvektorketten das Gewünschte liefern, ist es ausreichend, von den Eigenvektoren an den Spitzen der Hauptvektorketten lineare Unabhängigkeit zu prüfen.

Damit hat die Jordan–Basis von $\mathit{Haupt}(A; \lambda_0) = N_d$ *insgesamt*

$$n_{\text{alg}}(\lambda_0) = \dim N_d = \sum_{j=1}^{d} j \cdot s_j \tag{15}$$

linear unabhängige Vektoren bestehend aus maximalen Hauptvektorketten. Für die geometrische Vielfachheit, welche auch der Anzahl der Jordan–Kästen entspricht, gilt

$$n_{\text{geo}}(\lambda_0) = \dim N_1 = \sum_{j=1}^{d} s_j. \tag{16}$$

Des Weiteren bilden alle Hauptvektoren der Stufen $1, \ldots, j$, $j \in \{2, \ldots, d-1\}$, *aus der Jordan–Basis von* $\mathit{Haupt}\,(A; \lambda_0)$ *eine Basis von* N_j, *so dass*

$$\dim N_j = \sum_{\ell=1}^{j-1} \ell \cdot s_\ell + j \cdot \sum_{\ell=j}^{d} s_\ell\,. \tag{17}$$

Beweis: Zur Konstruktion der Jordan–Basis von Haupt $(A; \lambda_0)$ gilt es, maximale Hauptvektorketten auszuwählen, wobei man sinnvollerweise mit den längstmöglichen Hauptvektorketten der Länge $d = \ell^*(\lambda_0)$ beginnt und sich dann nach unten arbeitet. Für die Konstruktion ist es hilfreich, wenn man sich vorab mit dem Gauß–Verfahren Basen der N_ℓ aus (11) verschafft, und zwar beginnend mit N_1 und diese dann wegen $N_\ell \subset N_{\ell+1}$ immer weiter zu Basen der N_ℓ ergänzt. Wegen (12) erhält man s_d Jordan–Kästen der Größe $d \times d$ mit Hauptvektorketten der (maximalen) Länge $d = \ell^*(\lambda_0)$, da Hauptvektoren der Stufe d in $N_d \setminus N_{d-1}$ liegen müssen. Inspiriert von **Satz 2** bestimme man daher s_d Hauptvektoren

$$w_d^{(1)}, \ldots, w_d^{(s_d)} \in N_d \setminus N_{d-1} \tag{18}$$

der Stufe d, so dass die dazugehörigen Hauptvektorketten der Länge $d = \ell^*(\lambda_0)$

$$\begin{array}{cccc} w_d^{(1)} & \ldots\ldots & w_d^{(s_d)} & \leftarrow \text{ in } \; N_d \setminus N_{d-1} \\ w_{d-1}^{(1)} := (A - \lambda_0 E_n)\, w_d^{(1)} & \ldots\ldots & w_{d-1}^{(s_d)} := (A - \lambda_0 E_n)\, w_d^{(s_d)} & \leftarrow \text{ in } \; N_{d-1} \setminus N_{d-2} \\ \vdots & \ldots\ldots & \vdots & \vdots \\ w_1^{(1)} := (A - \lambda_0 E_n)^{d-1}\, w_d^{(1)} & \ldots\ldots & w_1^{(s_d)} := (A - \lambda_0 E_n)^{d-1}\, w_d^{(s_d)} & \leftarrow \text{ in } \; N_1 \end{array} \tag{19}$$

in den Spitzen

$$\text{Eigenvektoren } \; w_1^{(1)}, \ldots, w_1^{(s_d)} \text{ haben, die } \textbf{linear unabhängig} \text{ sind.} \tag{20}$$

Dann gilt:

(a) Alle Hauptvektoren aus (19) sind nach **Satz 2** zusammen linear unabhängig. (21)

(b) $\operatorname{Haupt}(A; \lambda_0) \overset{(1)}{=} N_d = \operatorname{span}\left\{ w_d^{(1)}, \ldots, w_d^{(s_d)} \right\} \oplus N_{d-1}.$ (22)

Die Aussage von (22) ist wegen (12) eine Konsequenz von **Folgerung 1**. Die Existenz solcher Vektoren mit (18) und (22) ist erneut wegen (12) aus Dimensionsgründen nach dem Satz von der Basisergänzung gesichert. Jede der s_d Hauptvektorketten aus (19) führt dann zu einem Jordan–Kasten der Größe $d \times d$. Außerdem sind wegen (1) alle diese Hauptvektorketten automatisch maximal.

Bemerkungen:

(a) Die Verifizierung von (22) via (20) ist deutlich leichter zu führen, als (22) direkt nachzuweisen.

(b) Natürlich sind gemäß Konstruktion auch die $w_d^{(1)}, \ldots, w_d^{(s_d)}$ linear unabhängig. Das allein zusammen mit (18) genügt allerdings nicht, um (22) sicherzustellen, wie das **Beispiel 1** bereits gezeigt hat.

Offenbar haben die in (19) konstruierten Hauptvektorketten auf allen Stufen $k \leq d$ je einen Hauptvektor, der demnach in $N_k \setminus N_{k-1}$ liegt. Es folgt unmittelbar

$$\dim N_{k-1} + s_d \leq \dim N_k \qquad \text{für alle} \qquad 2 \leq k \leq d, \tag{23}$$

wobei wegen (12) für $k = d$ in (23) Gleichheit gilt. Es folgt unmittelbar

$$s_{d-1} \overset{(13)}{=} \dim N_{d-1} - \dim N_{d-2} - s_d \overset{(23)}{\geq} 0, \tag{24}$$

was auch die Ungleichung in (13) für $j = d - 1$ nachweist. Falls

$$s_{d-1} = 0, \tag{25}$$

benötigt man keine weiteren Hauptvektoren der Stufe $d - 1$, da in diesem Fall wegen

$$\dim N_{d-1} \overset{(25)}{=} \dim N_{d-2} + s_d$$

in N_{d-1} keine weiteren, von

$$W_{d-1} := \operatorname{span}\left\{ w_{d-1}^{(j)} \;\middle|\; j = 1, \ldots, s_d \right\} \overset{(19)}{\subset} N_{d-1} \setminus N_{d-2} \tag{26}$$

noch nicht abgedeckten linear unabhängigen Hauptvektoren der Stufe $d-1$ vorhanden sein können. Ist allerdings $s_{d-1} > 0$, benötigt man weitere maximale Hauptvektoren der Stufe $d-1$, die noch nicht durch die Hauptvektorketten aus (19) abgedeckt sind, also insbesondere nicht in W_{d-1} liegen. Diese Hauptvektoren der Stufe $d-1$ liegen nach Definition in $N_{d-1} \setminus N_{d-2}$, aber nicht in W_{d-1}. Man bestimme daher s_{d-1} Hauptvektoren

$$v_{d-1}^{(1)}, \ldots, v_{d-1}^{(s_{d-1})} \in N_{d-1} \setminus \left[N_{d-2} \oplus W_{d-1} \right] \tag{27}$$

der Stufe $d-1$, so dass die dazugehörigen Hauptvektorketten der Länge $d-1$

$$\begin{array}{ccccl}
v_{d-1}^{(1)} & \ldots\ldots & v_{d-1}^{(s_{d-1})} & \leftarrow & \text{in } N_{d-1} \setminus N_{d-2} \\
v_{d-2}^{(1)} := (A - \lambda_0 E_n)\, v_{d-1}^{(1)} & \ldots\ldots & v_{d-2}^{(s_{d-1})} := (A - \lambda_0 E_n)\, v_{d-1}^{(s_{d-1})} & \leftarrow & \text{in } N_{d-2} \setminus N_{d-3} \\
\vdots & \ldots\ldots & \vdots & & \vdots \\
v_1^{(1)} := (A - \lambda_0 E_n)^{d-2}\, v_{d-1}^{(1)} & \ldots\ldots & v_1^{(s_{d-1})} := (A - \lambda_0 E_n)^{d-2}\, v_{d-1}^{(s_{d-1})} & \leftarrow & \text{in } N_1
\end{array} \tag{28}$$

in den Spitzen

$$\begin{array}{l}
\text{Eigenvektoren } v_1^{(1)}, \ldots, v_1^{(s_{d-1})} \text{ haben, die zusammen mit den} \\
\text{Eigenvektoren } w_1^{(1)}, \ldots, w_1^{(s_d)} \text{ aus (19) } \textbf{linear unabhängig} \text{ sind.}
\end{array} \tag{29}$$

Dann gilt:

(a) Alle Hauptvektoren aus (19) und (28) sind nach **Satz 2** zusammen linear unabhängig.

(b) $N_{d-1} = \operatorname{span}\left\{ v_{d-1}^{(1)}, \ldots, v_{d-1}^{(s_{d-1})} \right\} \oplus W_{d-1} \oplus N_{d-2}.$ (30)

Wieder ist die Aussage (30) wegen $s_{d-1} + s_d = \dim N_{d-1} - \dim N_{d-2}$ (vgl. (13)) eine Konsequenz von **Folgerung 1**. Die Existenz solcher Vektoren mit (27) und (30) ist wieder aus Dimensionsgründen nach dem Satz von der Basisergänzung gesichert. Es ist nicht schwer zu zeigen, dass durch die Auswahl der $v_{d-1}^{(1)}, \ldots, v_{d-1}^{(s_{d-1})}$ gemäß (27) automatisch Hauptvektoren der Stufe $d-1$ ausgewählt wurden, die maximal sind (vgl. Definition in **Satz 1 (g)**). Der Beweis dazu wird zur besseren Übersicht nach **Lemma 3** ausgelagert. Jede der s_{d-1} Hauptvektorketten der Länge $d-1$ führt zu einem Jordan–Kasten der Größe $(d-1) \times (d-1)$.

Analog verfährt man, falls s_j aus (13) für ein weiteres $j \in \{d-2, \ldots, 2\}$ positiv ist. Vorab sei allerdings bemerkt, dass alle bereits konstruierten Hauptvektorketten der Stufen größer j auch einen Hauptvektor der Stufe j besitzen, der demnach in $N_j \setminus N_{j-1}$ liegt. Analog zu (23) gilt also

$$\dim N_{j-1} + s_{j+1} + s_{j+2} + \ldots + s_d \leq \dim N_j, \tag{31}$$

woraus

$$s_j \overset{(13)}{=} \dim N_j - \dim N_{j-1} - \sum_{\ell=j+1}^{d} s_\ell \geq 0 \tag{32}$$

folgt, was wiederum die Ungleichung in (13) nachweist. Sei jetzt also angenommen $s_j > 0$ und

$$W_j := \operatorname{span}\left\{\begin{array}{l}\text{aller bereits konstruierten Hauptvektoren der Stufe } j\\ \text{von längeren Hauptvektorketten}\end{array}\right\} \tag{33}$$

definiert. Man bestimme dann weitere s_j Hauptvektoren

$$z_j^{(1)}, \ldots, z_j^{(s_j)} \in N_j \setminus \Big[N_{j-1} \oplus W_j\Big] \tag{34}$$

der Stufe j, so dass die dazugehörigen Hauptvektorketten der Länge j in den Spitzen

> Eigenvektoren $z_1^{(\ell)} = (A - \lambda_0 E_n)^{j-1} z_j^{(\ell)}$, $\ell = 1, \ldots, s_j$, haben, die zusammen mit allen bereits konstruierten Eigenvektoren von längeren Hauptvektorketten **linear unabhängig** sind. (35)

Dann gilt:

(a) Alle bisher konstruierten Hauptvektoren sind nach **Satz 2** zusammen linear unabhängig.

(b) $$N_j = \operatorname{span}\Big\{z_j^{(1)}, \ldots, z_j^{(s_j)}\Big\} \oplus W_j \oplus N_{j-1}. \tag{36}$$

Auch hier ist (36) wegen (13), also $s_j + \dim W_j = \dim N_j - \dim N_{j-1}$, eine Konsequenz von **Folgerung 1**. Ebenso ist die Existenz solcher Vektoren mit (34) und (36) nach dem Satz von der Basisergänzung gesichert.

Analog zu **Lemma 3** lässt sich wieder zeigen, dass die neuen Hauptvektoren $z_j^{(1)}, \ldots, z_j^{(s_j)}$ der Stufe j maximal sind. Die damit maximalen Hauptvektorketten zu $z_j^{(1)}, \ldots, z_j^{(s_j)}$ ergeben s_j Jordan–Kästen der Größe $j \times j$. Ist schließlich

$$s_1 \overset{(13)}{=} \dim N_1 - \underbrace{\dim N_0}_{=0} - (s_2 + s_3 + \ldots + s_d) > 0,$$

sind noch s_1 linear unabhängige Eigenvektoren

$$u_1^{(1)}, \ldots, u_1^{(s_1)} \in N_1 \setminus \operatorname{span}\left\{\begin{array}{l}\text{aller bereits konstruierten Eigenvektoren}\\ \text{von längeren Hauptvektorketten}\end{array}\right\} \tag{37}$$

so zu wählen, dass $u_1^{(1)}, \ldots, u_1^{(s_1)}$ zusammen mit den Eigenvektoren der bereits konstruierten Hauptvektorketten linear unabhängig sind und somit eine Basis von N_1 bilden. Wieder sind die $u_1^{(1)}, \ldots, u_1^{(s_1)}$ nach Konstruktion in (37) bereits maximal und führen damit auf Jordan–Kästen der Größe 1×1 . Da durch die bereits konstruierten Hauptvektorketten bereits $s_d + s_{d-1} + \ldots + s_3 + s_2$ Eigenvektoren gefunden wurden, ergibt sich

$$n_{\text{geo}}(\lambda_0) = \dim N_1 = \sum_{j=1}^{d} s_j, \tag{38}$$

was auch (16) zeigt.

Die Basis von N_1 aus Eigenvektoren liegt natürlich auch in N_2. Des Weiteren enthalten die konstruierten Hauptvektorketten weitere $s_d + s_{d-1} + \ldots + s_3 + s_2$ Hauptvektoren der Stufe 2. Diese sind zusammen $s_1 + 2 \cdot (s_2 + \ldots + s_d)$ linear unabhängige Vektoren aus N_2, welche wegen

$$\dim N_2 \overset{(13)}{=} \dim N_1 + \sum_{\ell=2}^{d} s_\ell \overset{(38)}{=} s_1 + 2 \cdot \sum_{\ell=2}^{d} s_\ell \tag{39}$$

bereits eine Basis von N_2 bilden. Damit ist (17) für $j = 2$ gezeigt. Für $j = 3, \ldots, d$ folgt durch Induktion:

$$\begin{aligned} \dim N_j &\overset{(13)}{=} \dim N_{j-1} + \sum_{\ell=j}^{d} s_\ell \overset{\text{(Ind. Ann.)}}{=} \left[\sum_{\ell=1}^{j-2} \ell \cdot s_\ell + (j-1) \cdot \sum_{\ell=j-1}^{d} s_\ell \right] + \sum_{\ell=j}^{d} s_\ell \\ &= \sum_{\ell=1}^{j-1} \ell \cdot s_\ell + j \cdot \sum_{\ell=j}^{d} s_\ell , \end{aligned} \tag{40}$$

wodurch (17) gezeigt ist. Da wir durch unsere Konstruktion bereits $s_1 + 2s_2 + \ldots + (j-1)\, s_{j-1} + j \cdot (s_j + \ldots + s_d)$ linear unabhängige Hauptvektoren der Stufe $\leq j$ erhalten haben, bilden diese nach (40) also eine Basis von N_j. Wir erhalten schließlich, dass wegen

$$n_{\text{alg}}(\lambda_0) \overset{(1)}{=} \dim N_d \overset{(40)}{=} \sum_{\ell=1}^{d} \ell \cdot s_\ell \tag{41}$$

alle insgesamt konstruierten linear unabhängigen Hauptvektoren (der Stufen $\leq d$) eine Basis von $N_d = \text{Haupt}(A; \lambda_0)$ bilden. Dies schließt die Konstruktion der Jordan–Basis von $\text{Haupt}(A; \lambda_0)$ ab. □

Wir müssen noch die im obigen Beweis ausgelagerte Maximalität der Hauptvektoren aus (27) nachweisen.

Lemma 3. *Die Hauptvektoren* $v_{d-1}^{(1)}, \ldots, v_{d-1}^{(s_{d-1})}$ *der Stufe* $d-1$ *aus der Konstruktion von* ***Satz 3*** *(siehe* (27)*) sind maximal.*

Beweis: Angenommen, es gäbe ein $j^* \in \{1, \ldots, s_{d-1}\}$, so dass

$$(A - \lambda_0 E_n)\, z = v_{d-1}^{(j^*)} \tag{42}$$

eine Lösung $z \in \mathbb{C}^n$ hat. Da $v_{d-1}^{(j^*)}$ Hauptvektor der Stufe $d-1$, ist z Hauptvektor der Stufe d, d.h. $z \in N_d \setminus N_{d-1}$.

Demnach existieren nach (22) Koeffizienten $\alpha_1, \ldots, \alpha_{s_d} \in \mathbb{C}$ mit $(\alpha_1, \ldots, \alpha_{s_d}) \neq \big(0, \ldots, 0\big)$, so dass

$$z \;=\; \sum_{\ell=1}^{s_d} \alpha_\ell \, w_d^{(\ell)} \;+\; \widetilde{z}$$

mit $\widetilde{z} \in N_{d-1}$. Es folgt

$$\begin{aligned} v_{d-1}^{(j^*)} \overset{(42)}{\in} (A-\lambda_0 E_n)\left[\sum_{\ell=1}^{s_d} \alpha_\ell \, w_d^{(\ell)} + N_{d-1}\right] \;&\subset\; \sum_{\ell=1}^{s_d} \alpha_\ell \, \underbrace{(A-\lambda_0 E_n)\, w_d^{(\ell)}}_{=\, w_{d-1}^{(\ell)}} + N_{d-2} \\ &\overset{(26)}{\subset} \; W_{d-1} \;+\; N_{d-2}, \end{aligned}$$

was aber wegen (27) nicht sein kann.

□

Bemerkung 1. *Das hier vorgestellte Verfahren zur Bestimmung einer Jordan–Basis weicht deutlich von dem in der Literatur verwendeten Standard–Verfahren ab. So schlägt zum Beispiel Wikipedia [wiki] ähnlich wie bei uns in* (34) *vor, einen Hauptvektor der Stufe j*

$$z \in N_j \setminus \operatorname{span}\{N_{j-1} \,\cup\, M_j\}\,, \tag{43}$$

zu wählen, wobei M_j die Menge aller zuvor berechneten Hauptvektoren der Stufe j ist. Dies ist so lange durchzuführen, bis alle Hauptvektoren der Stufe j bestimmt sind. Da hierzu jedes mal die Menge auf der rechten Seite von (43) *neu zu bestimmen ist, ist dieses Verfahren erheblich aufwendiger, als wenn eine solche Menge wie in* (34) *nur einmal pro Stufe bestimmt werden muss und mit Hilfe von* (35) *ein einfaches Kriterium vorhanden ist, die korrekte Auswahl für alle Hauptvektoren der Stufe j in einem Schritt zu verifizieren.*

Wir kommen nochmal auf unser einleitendes Beispiel zurück.

Beispiel 2. [Fortsetzung von **Beispiel 1**]
Für A aus (2) *und wegen $\lambda_0 = 0$ gilt*

$$A^2 = (A-\lambda_0 E_5)^2 \,=\, 0 \in \mathbb{C}^{5\times 5}.$$

*Mit der Notation aus **Satz 3** gilt hier $d = \ell^*(0) = 2$, da $N_2 = \ker\Big[\big(A-\lambda_0 E_5\big)^2\Big] = \mathbb{C}^5$. Der Eigenraum $N_1 = \ker[A-\lambda_0 E_5] = \operatorname{span}\{e_1, e_2 \,-\, e_3, e_4\}$ hat Dimension 3. Damit gilt gemäß* (12) *und* (13)

$$\begin{aligned} s_d \;&=\; s_2 \;=\; \dim N_2 \;-\; \dim N_1 \;=\; 2 \quad \textit{und} \\ s_1 \;&=\; \dim N_1 \;-\; \underbrace{\dim\, N_0}_{=\,0} - s_2 \;=\; 1. \end{aligned}$$

Die Konstruktion in (19) *liefert $s_d = 2$ Hauptvektoren der Stufe 2*

$$w_2^{(1)}, w_2^{(2)} \in N_2 \setminus N_1$$

mit maximalen Hauptvektorketten $\left(w_2^{(1)},\, w_1^{(1)} := (A - \lambda_0 E_5)\, w_2^{(1)}\right)$ *und* $\left(w_2^{(2)},\, w_1^{(2)} := (A - \lambda_0 E_5)\, w_2^{(2)}\right)$ *und schließlich einen maximalen Eigenvektor*

$$u_1^{(1)} \in N_1 \setminus \operatorname{span}\left\{w_1^{(1)}\,,\, w_1^{(2)}\right\}$$

gemäß (37).

Hierbei ist laut ***Satz 2*** *zu beachten, dass die konstruierten Eigenvektoren*

$$w_1^{(1)},\, w_1^{(2)} \quad \textit{und} \quad u_1^{(1)}$$

linear unabhängig sind und damit eine Basis von N_1 *bilden. Wählt man z.B.* $w_2^{(1)} := e_2$ *und* $w_2^{(2)} := e_5$*, erhält man zwei Hauptvektorketten*

$$\left(w_2^{(1)},\, w_1^{(1)}\right) = \left(e_2, e_1 = (A - \lambda_0 E_5)\, e_2\right) \quad \textit{und} \quad \left(w_2^{(2)},\, w_1^{(2)}\right) = \left(e_5, e_4 = (A - \lambda_0 E_5)\, e_5\right)$$

mit linear unabhängigen Eigenvektoren. Weiter ergänzt durch $u_1^{(1)} := e_2 - e_3$ *erhält man schließlich als Jordan–Basis* $\mathcal{B} = \left(w_1^{(1)}, w_2^{(1)}, w_1^{(2)}, w_2^{(2)}, u_1^{(1)}\right) = \left(e_1, e_2, e_4, e_5, e_2 - e_3\right)$ *und die Darstellung der linearen Abbildung* $L[x] := A \cdot x,\ x \in \mathbb{C}^5$*, bzgl. dieser Jordan–Basis ist*

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Die ursprüngliche Wahl der Hauptvektoren der Stufe 2 in ***Beispiel 1*** *führte dagegen nicht zum Ziel, da die zugehörigen Eigenvektoren nicht linear unabhängig waren.*

Literatur

[wiki] https://de.wikipedia.org/wiki/Jordansche–Normalform