

Partielle Differentialgleichungen

STANISLAUS MAIER-PAAPE

18. Juli 2018

Preface

Das vorliegende Skript ist aus meiner Vorlesung „Partielle Differentialgleichung“ vom SS 2004 bzw. SS 2008 und SS 2013 entstanden. Es ist als Einführung, insbesondere in die Theorie elliptischer Differentialgleichungen zu verstehen. Während Definitionen und Sätze überwiegend vollständig vorhanden sind, sind die dazugehörigen Beweise oft nur als Beweisidee, bzw. gar nicht, vorhanden. Das Skript daher nur als roter Faden zu verstehen. Zum genaueren Erlernen der Theorie bedarf es unbedingt des Besuchs der Vorlesung.

Aachen, April 2018

Stanislaus Maier-Paape

© Prof. S. Maier-Paape
Institut für Mathematik
RWTH Aachen
Templergraben 55
52062 Aachen

Inhaltsverzeichnis

Preface	i
Contents	ii
1 Einführung	1
1.1 Einteilung und Beispiele	1
1.2 Die drei Grundgleichungen und Separationsansätze	3
1.3 Herleitung von Differentialgleichungen	9
1.4 Nichtlineare Differentialgleichungen	14
2 Maximumprinzipien	17
2.1 Das schwache Maximumprinzip	17
2.2 Das starke Maximum-Prinzip	19
2.3 A priori Schranken	22
2.4 Symmetrie von Lösungen	23
2.5 Parabolische Maximumprinzipien	25
2.6 Abfall der „Zero number“	28
3 Sobolev-Räume	29
3.1 Lebesgue-Räume	31
3.2 Schwache Ableitungen	35
3.3 Sobolev-Räume	37
3.4 Einbettungssätze	40
3.5 Randwerte von $W_0^{k,p}$ -Funktionen	44
3.6 Differenzenquotienten	46
3.7 Die Poincaré-Ungleichung	47

4	Elliptische Differentialgleichungen zweiter Ordnung	49
4.1	Elliptizität und schwacher Lösungsbegriff	49
4.2	Existenz schwacher Lösungen des Dirichlet–Problems	52
4.3	Schwache Lösungen des Neumann–Problems	55
4.4	Einschub: Fredholm Alternative für kompakte Operatoren	58
4.5	Fredholm Alternative für das Dirichlet–Problem	60
4.6	Die Eigenwertaufgabe	62
4.7	Innere Regularität	66
4.8	Randregularität	69
4.9	Eigenfunktionen und Eigenwerte	72
4.10	Resolventenabschätzung für elliptische Operatoren	77
A	Beispiele für Differentialgleichungen	81
B	Eigenschaften von Sobolev-Räumen	85
C	Ausgewählte Sätze aus der Funktionalanalysis	87
C.1	Elementare Begriffe	87
C.2	Stetige lineare Funktionale	88
C.3	Schwache Konvergenz	89
C.4	Satz von der offenen Abbildung und Folgerungen	90
	Index	91
	Bibliography	94

Kapitel 1

Einführung

1.1 Einteilung und Beispiele

Eine partielle Differentialgleichung (PDE=partial differential equation) ist eine Gleichung für eine Funktion (von zwei oder mehr Variablen) und deren partielle Ableitungen. Also

Definition 1.1.1 Eine Gleichung der Form

$$F(D^k u(x), D^{k-1} u(x), \dots, Du(x), u(x), x) = 0, \quad x \in G \subset \mathbb{R}^n \quad (1.1)$$

heißt **PDE der Ordnung** $k \geq 1$, wobei

$$F: \mathbb{R}^{n^k} \times \mathbb{R}^{n^{k-1}} \times \dots \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times G \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine gegebene Funktion ist, und $u: G \rightarrow \mathbb{R}$ wird gesucht.

Notation 1.1.2 $x = (x_1, \dots, x_n) \in G$

$$Du = \nabla u = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} u, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} u \right)$$

$$D^2 u = D(\nabla u) = \text{Hesse-Matrix}$$

$$D^k u = (D^\alpha u)_{|\alpha|=k}$$

ist der Vektor aller partiellen Ableitungen der Ordnung k :

$$D^\alpha u(x) := \frac{\partial^{|\alpha|} u(x)}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}, \quad \text{wobei} \quad |\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i = k.$$

Zur Unterscheidung klassifizieren wir bestimmte Typen:

Definition 1.1.3 (i) Die PDE (1.1) heißt **linear**, wenn sie die Form

$$\sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha(x) \cdot D^\alpha u = f(x)$$

hat. Dabei sind $a_\alpha, f: G \rightarrow \mathbb{R}$ gegebene Funktionen.

(ii) Die PDE (1.1) heißt **semilinear**, falls

$$\sum_{|\alpha|=k} a_\alpha(x) \cdot D^\alpha u + a_0(D^{k-1}u, \dots, Du, u, x) = 0.$$

(iii) Sie heißt **quasilinear**, falls

$$\sum_{|\alpha|=k} a_\alpha(D^{k-1}u, \dots, Du, u, x) \cdot D^\alpha u + a_0(D^{k-1}u, \dots, u, x) = 0$$

und

(iv) **voll nichtlinear**, falls auch die Ableitungen der höchsten Ordnung nichtlinear vorkommen.

(v) Von **Systemen von PDE** spricht man, wenn u und F vektorwertig sind.

Probleme: Eine allumfassende Lösungstheorie ist **nicht** existent, und wohl auch nicht möglich. Deshalb konzentriert man sich in der Regel auf physikalisch motivierte Modellgleichungen.

Variablen:

- $u = u(x), \quad x = (x_1, \dots, x_n) \in G \subset \mathbb{R}^n$



Interpretation als „räumliche Variable“

stationäres Problem (keine zeitliche Änderung; Gleichgewichte)

- Bei zeitlicher Änderung der Lösung: eine der Variablen wird als "Zeit" ausgezeichnet:
dynamisches Problem

$$u = u(t, y), \quad t \in \mathbb{R} \text{ (Zeit)}, \quad y \in G \subset \mathbb{R}^n \text{ (Raum)}, \quad x = (t, y).$$

Eine (unvollständige) Liste mehrerer physikalisch relevante Differentialgleichungen ist im *Appendix A* zusammengestellt.

Wohlgestellte Probleme:

von einer vernünftigen (wohlgestellten) PDE verlangt man:

- (a) Existenz einer Lösung
- (b) Eindeutigkeit dieser Lösung
- (c) Die Lösung hängt stetig von den „Daten“ des Problems ab (z.B. Koeffizientenfunktionen).

Lösungsbegriffe:

- ▷ **klassische** Lösungen (einer PDE k -ter Ordnung)

Für die Lösung gilt:

$u \in C^k(G)$, also alle im Problem vorkommenden partiellen Ableitungen existieren im **klassischen** Sinne (sind stetig).

oft hat man das nicht:

- ▷ **schwache** Lösungen

Man fordert nur noch k -mal schwach differenzierbar (z.B. $u \in H^k(G) \subset L^2(G)$ Sobolevraum – siehe *Kapitel ??*) Vergrößerung der Funktionenklasse liefert leichter Existenz.

Typische Schwierigkeiten:

- ▷ Explizite Lösungsformeln existieren nur in Spezialfällen.
- ▷ Schwierigkeitsgrad nimmt zu:

linear \longrightarrow nichtlinear

kleine Ordnung \longrightarrow große Ordnung

einzelne Gleichung \longrightarrow Systeme .

1.2 Die drei Grundgleichungen und Separationsansätze

(A) Die Wellengleichung

Wir betrachten die eindimensionale Wellengleichung

$$u_{tt} - c^2 \cdot u_{xx} = F(t, x)$$

für Funktionen $u = u(t, x)$, mit Wellenausbreitungsgeschwindigkeit $c > 0$ und F gegeben. Für $F \equiv 0$ (homogen) ist folgendes **Anfangsrandwertproblem** sinnvoll:

- (1) $\partial_t^2 u = c^2 \partial_x^2 u$ für $x \in (a, b), t > 0$.
- (2) Anfangsbedingung: $u(0, x) = f(x), u_t(0, x) = g(x), x \in (a, b)$ (f und g vorgegeben).
- (3) Randbedingungen für $t > 0$: (mehrere Möglichkeiten)

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{(RB1)} & u(t, a) = 0 = u(t, b) \quad \text{Dirichlet-Randbedingung} \\ \text{(RB2)} & \partial_x u(t, a) = 0 = \partial_x u(t, b) \quad \text{Neumann-Randbedingung} \\ \text{(RB3)} & \begin{cases} u(t, a) = u(t, b); \\ u_x(t, a) = u_x(t, b) \end{cases} \quad \text{periodische Randbedingung} \end{array} \right.$$

Diese Gleichung ist ein physikalisches Modell für die Schwingungen einer Saite (u = Auslenkung der Saite, f = Anfangslage, g = Anfangsgeschwindigkeit, F = äußere Kraft).

Lösungsformel **ohne** Randbedingungen nach D'Alembert:

$$u(t, x) = \frac{1}{2} \left(f(x - ct) + f(x + ct) \right) + \frac{1}{2c} \cdot \int_{x-ct}^{x+ct} g(\xi) d\xi \quad (2.1)$$

Beachte: Lösung $u(t, x_0)$ hängt nur von f und g in $[x_0 - ct, x_0 + ct]$ ab!

Separationsansatz (z.B. für Dirichlet-Randbedingung **(RB1)**): $u(t, x) = h(x) \cdot T(t)$

Der Ansatz führt auf

$$h'' = \lambda \cdot h, \quad x \in (a, b), h(a) = 0 = h(b) \quad (2.2)$$

$$\ddot{T} = \lambda \cdot c^2 \cdot T, \quad t > 0. \quad (2.3)$$

Für $a = 0, b = \pi$ erhält man daher mit dem **Superpositionsprinzip** Lösungen der Form

$$u(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha_k \cdot \sin(kct) + \beta_k \cdot \cos(kct)) \sin(kx). \quad (2.4)$$

Anfangsbedingungen:

$$\begin{aligned} f(x) = u(0, x) &= \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k \cdot \sin(kx) \\ g(x) = u_t(0, x) &= \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot c \cdot \alpha_k \cdot \sin(kx) \end{aligned} \quad (2.5)$$

Seien f und g in $L^2(0, \pi)$ und wählt man

$$\beta_k := \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(\xi) \cdot \sin(k\xi) d\xi \quad \text{und} \quad \alpha_k := \frac{2}{kc\pi} \int_0^{\pi} g(\xi) \cdot \sin(k\xi) d\xi,$$

dann ist (2.5) erfüllt und (2.4) liefert eine Lösung des Anfangsrandwertproblems mit Dirichlet-Randbedingungen.

Rechteckige Membran („Trommel“): Sei $G = (0, \ell_1) \times (0, \ell_2)$

$$\partial_t^2 u = c^2 \cdot \underbrace{(\partial_{x_1}^2 u + \partial_{x_2}^2 u)}_{\Delta u} \quad \text{für } t > 0, x \in G.$$

Randbedingungen: $u(t, x) = 0$ für $x \in \partial G$, $t > 0$ (fest eingespannt).

Anfangsbedingungen:

$$u(0, x) = f(x), \quad u_t(0, x) = g(x), \quad x \in G.$$

Gleicher Ansatz wie vorher liefert:

$$u(t, x) = \sum_{k_1, k_2=1}^{\infty} (\alpha_{k_1, k_2} \cdot \sin(\omega_k \cdot t) + \beta_{k_1, k_2} \cdot \cos(\omega_k \cdot t)) \cdot \sin\left(k_1 \frac{\pi}{\ell_1} x_1\right) \cdot \sin\left(k_2 \frac{\pi}{\ell_2} x_2\right)$$

mit $\omega_k = \sqrt{\frac{k_1^2}{\ell_1^2} + \frac{k_2^2}{\ell_2^2}} \cdot c\pi$ als allgemeine Lösung.

Schwache Lösungen und starke Lösungen

Folgendes Problem tritt bei der obigen Diskussion auf:

Die von uns gefundene allgemeine Lösung der 1-dim Wellengleichung hatte die Form

$$u(t, x) = \sum_{k=1}^N h_k(t) \cdot \sin(kx),$$

wobei $h_k(t) = \alpha_k \cdot \sin(kct) + \beta_k \cdot \cos(kct)$ und $N = \infty$.

Solange $N < \infty$ ist alles problemlos. Die angegebene Funktion ist Lösung von

$$u_{tt} = c \cdot u_{xx}.$$

Ist aber $N = \infty$, so ist $u(t, \cdot)$ für t fest im Allgemeinen nur in $L^2(0, \pi)$ (und zwar z.B. wenn f und $g \in L^2(0, \pi)$; d.h. $\sum_{k=1}^{\infty} (\alpha_k^2 + \beta_k^2) < \infty$)

Nur: $u(t, \cdot)$ ist im Allgemeinen nicht stetig und schon gar **nicht** differenzierbar.

In welchem Sinne kann man deshalb überhaupt von Lösungen sprechen? Für eine „klassische“ Lösung müsste $u(t, \cdot) \in C^2[0, \pi]$ sein. Das bekommt man so aber nicht.

Ausweg: „schwacher“ Differenzierbarkeitsbegriff.

Dieser „schwache“ Differenzierbarkeitsbegriff führt zu einer Vergrößerung des Funktionenraums, wodurch Existenz von Lösungen einfacher wird, vgl. *Kapitel ??*, Sobolev-Räume.

Weiteres Problem:

Die Differentialgleichungen für h auf G waren nur wegen der einfachen Form von G ($[0, \ell]$ bzw. $[0, \ell_1] \times [0, \ell_2]$) einfach zu lösen. Für beliebiges Gebiet kommt man so nicht weiter (vgl. *Kapitel ??* über allgemeine elliptische Differentialgleichungen zweiter Ordnung).

Typisches Vorgehen:

Ziel: klassische Lösungen.

Programm:

- (a) Existenz und Eindeutigkeit einer „schwachen“ Lösung.
- (b) Regularitätsproblem: Zeige, dass diese Lösung tatsächlich glatter ist.

(B) Die Wärmeleitungsgleichung (oder Diffusionsgleichung)

Wir suchen wieder Lösungen $u = u(t, x)$ eines **Anfangsrandwertproblems**

$$(1) \quad \partial_t u = d \cdot \partial_x^2 u \quad \text{für } x \in (a, b), \quad t > 0$$

mit eindimensionaler Raumvariablen $x \in \mathbb{R}$ und Diffusionskonstante $d > 0$ gegeben. Dies ist ein einfaches Modell für die Wärmediffusion ($u = \text{Temperatur}$).

Sei weiter

(2) Anfangsbedingung $u(0, x) = u_0(x)$ für $x \in (a, b)$, wobei $u_0: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ vorgegeben ist.

(3) Randbedingung; wieder Möglichkeiten **(RB1)** – **(RB3)** wie unter **(A)** z.B. **(RB2)**

$\partial_x u(t, a) = \partial_x u(t, b) = 0$ Neumann–Randbedingung (kein Wärmefluss am Rand) oder **(RB1)** Dirichlet–Randbedingungen (feste Temperatur am Rand).

Separationsansatz: $u(t, x) = h(x) \cdot T(t)$ liefert hier

$$h'' = \lambda \cdot h, \quad x \in (a, b) \tag{2.6}$$

$$\dot{T} = \lambda \cdot d \cdot T, \quad t > 0. \tag{2.7}$$

Offenbar hat (2.7) Lösungen $T(t) = e^{\lambda dt}$ und (2.6) mit Randbedingung $\partial_x h(a) = \partial_x h(b) = 0$ (d.h. **(RB2)**) hat Lösungen $h = h_k$ und $\lambda = \lambda_k$ für $k \in \mathbb{N}_0$:

$$h_k(x) = \cos \left(\frac{\pi}{(b-a)} \cdot k(x-a) \right), \quad \lambda_k = -k^2 \left(\frac{\pi}{(b-a)} \right)^2. \tag{2.8}$$

Sei o.B.d.A. wieder $(a, b) = (0, \pi)$. Das Superpositionsprinzip liefert für Anfangsbedingungen der Form $u_0(x) = \sum_{k=0}^N \alpha_k \cdot \cos(kx)$ Lösungen

$$u(t, x) = \sum_{k=0}^N \alpha_k \cdot e^{-dk^2t} \cos(kx). \quad (2.9)$$

Wir erhalten für die Ableitungen:

$$\begin{aligned} \partial_t u(t, x) &= \sum_{k=1}^N (-dk^2) \alpha_k \cdot e^{-dk^2t} \cdot \cos(kx) \\ \partial_x u(t, x) &= - \sum_{k=1}^N k \alpha_k e^{-dk^2t} \cdot \sin(kx) \\ \partial_x^2 u(t, x) &= - \sum_{k=1}^N k^2 \alpha_k \cdot e^{-dk^2t} \cdot \cos(kx) \end{aligned} \quad (2.10)$$

Frage: Wann darf der Grenzübergang $N \rightarrow \infty$ durchgeführt werden?

- **Anfangsbedingung:** $u_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \cdot \cos(kx)$.

Beachte $\sum |\alpha_k|^2 < \infty \iff u_0 \in L^2(0, \pi)$, weil $\left[\sqrt{\frac{1}{\pi}}, \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos(kx) \right]$ VONS im $L^2(0, \pi)$.

- **L^2 -Norm der Lösung nimmt ab:**

$$\|u(t, \cdot) - \alpha_0\|_{L^2(0, \pi)}^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\pi}{2} \left| \alpha_k \cdot e^{-dk^2t} \right|^2 \leq e^{-2dt} \cdot \|u_0 - \alpha_0\|_{L^2(0, \pi)}^2.$$

Allgemein auf (a, b) gilt:

$$\|u(t, \cdot) - \alpha_0\|_{L^2(a, b)} \leq e^{-\frac{dt}{(b-a)^2} \pi^2} \cdot \|u_0 - \alpha_0\|_{L^2(a, b)}, \quad t \geq 0. \quad (2.11)$$

Folgerung: $u(t, \cdot) \rightarrow \alpha_0$ in $L^2(0, \pi)$ ($t \rightarrow \infty$), wobei $\alpha_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} u_0(x) dx$.

Man kann sogar zeigen, dass $\lim_{t \rightarrow \infty} u(t, x) = \alpha_0$ (punktweise!) unabhängig von $x \in [0, \pi]$.

- **Wann liegen die Ableitungen in $L^2(0, \pi)$?** Nach (2.10) gilt

$$\begin{aligned} \sum \left| (-dk^2) \alpha_k \cdot e^{-dk^2t} \right|^2 < \infty &\implies \partial_t u, \partial_x^2 u \in L^2(0, \pi) \\ \sum \left| k \alpha_k \cdot e^{-dk^2t} \right|^2 < \infty &\implies \partial_x u \in L^2(0, \pi). \end{aligned}$$

Um allgemein $\sum_{k=1}^{\infty} \left| k^m \alpha_k \cdot e^{-dk^2t} \right|^2$, $m \in \mathbb{N}$ abzuschätzen, zeigt man $k^m \cdot e^{-dk^2t} \leq \frac{C_m}{(d \cdot t)^{m/2}}$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

Analog erhält man

Zeitableitungen:

$$\|\partial_t^m u(t, \cdot)\|_{L^2(0, \pi)} \leq \frac{C_{2m}}{t^m} \cdot \|u_0 - \alpha_0\|_{L^2(0, \pi)} \quad (2.12)$$

Ortsableitungen:

$$\|\partial_x^m u(t, \cdot)\|_{L^2(0, \pi)} \leq \frac{C_m}{(d \cdot t)^{m/2}} \cdot \|u_0 - \alpha_0\|_{L^2(0, \pi)} \quad (2.13)$$

Beobachtung: (Regularisierung) Start mit einer beliebigen L^2 -Funktion u_0 (z.B. stückweise stetig) liefert $u(t, x)$ beliebig oft nach t und x (schwach) differenzierbar (nur für $t > 0!$). Die Diffusion glättet aus!

(C) Potentialgleichung:

$u_{xx} = 0$ bzw. $\Delta u = 0$ und Randbedingungen. Das entspricht gerade Gleichgewichten (zeitunabhängige Lösungen) von (A) bzw. (B).

Zusammenfassung:

- | | |
|--------------------------------------|------------------------|
| (a) $u_{tt} - u_{xx} = 0$ | Wellengleichung |
| (b) $u_t - u_{xx} = 0$ | Wärmeleitungsgleichung |
| (c) $\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0$ | Potentialgleichung |

Mathematisch sprechen wir von

- (a) hyperbolischen
- (b) parabolischen
- (c) elliptischen

Differentialgleichungen, nach folgender Klassifikation. Lineare Differentialgleichungen für $u = u(x_1, \dots, x_n)$ der Ordnung m

$$Lu = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha \cdot D^\alpha u = \begin{cases} 0 \\ f \end{cases}$$

mit gegebenen Koeffizientenfunktion a_α und Multi-Index $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$ assoziiert man mit dem Polynom $p(\xi) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha \xi^\alpha$, $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ in n Variablen vom Grad m .

Hierbei ist $\xi^\alpha = \xi_1^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot \xi_n^{\alpha_n} \in \mathbb{R}$.

Die obigen Gleichungen führen auf

$$(a) \quad p(\xi_1, \xi_2) = \xi_1^2 - \xi_2^2 \quad (\text{Hyperbel})$$

$$(b) \quad p(\xi_1, \xi_2) = \xi_1 - \xi_2^2 \quad (\text{Parabel})$$

$$(c) \quad p(\xi_1, \xi_2) = \xi_1^2 + \xi_2^2 \quad (\text{Ellipse}) .$$

1.3 Herleitung von Differentialgleichungen

Woher kommen PDE? Typische Strukturen?

Wie kann physikalische Intuition der Mathematik helfen? (umgekehrt klar!)

Wir wollen hier typische physikalische Strukturen diskutieren, von denen sich PDEs ableiten lassen.

(A) Gewöhnliche Differentialgleichungen:

Mechanik:

(1) Erhaltungssätze

z.B. Impulserhaltung: $F = m \cdot a = m \cdot \ddot{x}$ (Newton).

Dies ist ein allgemeines Prinzip, es gilt deshalb immer!

(2) Konstitutives Gesetz

Nur zur Beschreibung des konkreten Systems. Es gilt deshalb nur dort.

z.B. Materialgesetz: $F = -k \cdot x$ (Hooke'sches Gesetz für Rückstellkraft einer Feder).

Elektrizität:

(1) Erhaltungssätze

$$\text{Kirchhoff'sche Gesetze: } \begin{cases} \text{Spannungsabfälle: } U_Q + U_W + U_K = 0 & (\text{Maschenregel}) \\ \text{Stromstärke: } I_Q = I_W = I_K & (\text{Knotenregel}) \end{cases}$$

für Stromquelle (**Q**), Widerstand (**W**) und Kondensator (**K**) in Reihe geschaltet.

(2) Materialgesetze

- $U_W = R \cdot I_W$ (Ohmsches Gesetz) $R =$ Widerstand
- $I_K = C \cdot \dot{U}_K$ (am Kondensator) $C =$ Kapazität
- $U_s = L \cdot \dot{I}_s$ (an der Spalte) $L =$ Induktivität

(B) Partielle Differentialgleichungen**Skalare Bilanzgleichung:**

Wir wollen für nachfolgende Variablen eine Bilanzgleichung aufstellen. Rechts in der Tabelle sind dazu Beispiele.

Variablen	Masse	Wärme
$\alpha \in \mathbb{R}$ Erhaltungsgröße	Dichte	Wärmeenergie
$b \in \mathbb{R}^n$ zugehöriger Flussvektor	Massenstrom	Wärmestrom
$\beta \in \mathbb{R}$ Produktionsterm		z.B. Wärmequelle

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Körper und $\hat{\Omega} \subset \Omega$ eine beliebiger Teilkörper.

Bilanz im Teilkörper (integrierte Form) $\langle \cdot, \cdot \rangle = \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^n}$

$$\frac{d}{dt} \int_{\hat{\Omega}} \alpha(t, x) dx = - \int_{\partial \hat{\Omega}} \langle b(t, y), \nu(y) \rangle dS(y) + \int_{\hat{\Omega}} \beta(t, x) dx. \quad (3.1)$$

Der linke Term gibt die zeitliche Veränderung der Erhaltungsgröße wieder. Rechts ist zum einen der Verlust durch Abfließen über den Rand und zum anderen der Gewinn durch Produktion im Volumen angegeben.

Umwandlung in reine Volumenintegrale mit dem Gaußschen Satz liefert:

$$\int_{\hat{\Omega}} \left(\frac{\partial}{\partial t} \alpha + \operatorname{div} b - \beta \right) dx = 0 \quad \text{für beliebiges } \hat{\Omega} \subset \Omega.$$

Skalare Bilanzgleichung (differenzielle Form):

$$\frac{\partial}{\partial t} \alpha + \operatorname{div} b = \beta \quad \text{in } x \in \Omega, t \in \mathbb{R}. \quad (3.2)$$

I. Massenerhaltung

Sei $\alpha = \rho = \text{Dichte}$, $b = \rho \cdot v = \text{Massenstrom}$ und $v = \text{Geschwindigkeit der Teilchen} \in \mathbb{R}^n$.
Mit $\beta = 0$ (keine Produktion) ergibt sich die Gleichung der Massenerhaltung

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho + \operatorname{div}(\rho \cdot v) = 0 \quad \text{in } \Omega \quad (\text{Kontinuitätsgleichung}). \quad (3.3)$$

Beispiel 1.3.1 (Stokes–Gleichungen)

Die Kontinuitätsgleichung gilt z.B. in Flüssigkeiten oder Gasen, muss aber noch ergänzt werden, um solche Systeme komplett zu beschreiben.

Impulserhaltung: $\frac{d}{dt}(\rho \cdot v) = F \in \mathbb{R}^n$ (Newton), d.h. Impulsänderung = Kraft.
Etwa für inkompressible Flüssigkeiten ($\rho \equiv \text{const}$) führt dies auf die Stokes–Gleichungen

$$\frac{\partial v}{\partial t} = c \cdot \Delta v - \nabla p + f \in \mathbb{R}^n \quad (\text{„Kräfte“}) \quad (3.4)$$

$$\operatorname{div}(v) = 0 \quad (\text{Kontinuitätsgleichung}). \quad (3.5)$$

Hierbei ist $f = f(t, x) \in \mathbb{R}^n$ (äußere Kraft) und $c > 0$ gegeben (entspricht „Reynoldszahl“) und $v = v(t, x) \in \mathbb{R}^n$ (Geschwindigkeitsfeld), bzw. $p = p(t, x) \in \mathbb{R}$ (Druck) sind gesucht.

Beispiel 1.3.2 (Navier–Stokes)

Ähnlich wie Stokes, nur statt (3.4):

$$\frac{\partial v}{\partial t} = c \cdot \Delta v - \sum_{i=1}^n v_i \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} v - \nabla p + f. \quad (3.6)$$

II. (Wärme-) Energieerhaltung

Erhaltungsgröße:

$\alpha = e =$ (lokale) Wärmeenergie $= \varrho \cdot c \cdot \Theta$, wobei $\Theta =$ Temperatur, $\varrho = \varrho(x)$ Dichte und $c =$ spezifische Wärmekapazität sind.

Zugehöriger Flussvektor: $b = q =$ Wärmestrom ; Wärmequellen/Senken: β

Aus (3.2) erhalten wir die **Energiebilanz**:

$$\partial_t e + \operatorname{div} q = \beta. \quad (3.7)$$

Materialgesetze: $e = \varrho \cdot c \cdot \Theta$ oder $e = \mathcal{E}(\Theta)$

Fourier'sches Gesetz: $q = -K(x, \Theta) \cdot \nabla \Theta$ mit $K(x, \Theta) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch, positiv definit (oft nur $K = K(x)$). Der Wärmestrom ist dem „größten Anstieg“ der Temperatur entgegen gerichtet.

Zusammen ergibt sich für $\Theta = \Theta_0 + u$ ($\Theta_0 = \text{const} =$ Referenztemperatur) aus (3.7).

Wärmeleitungsgleichung:

Gesucht ist $u = u(t, x)$ mit

$$(WL) \quad (c \cdot \varrho(x)) \cdot \partial_t u = \operatorname{div}(K(x) \nabla u) + \beta(t, x)$$

wobei Dichte und K nur ortsabhängig seien (c, ϱ, K, β sind gegeben).

Wichtig ist die Divergenzform!

Vektorwertige Bilanzgleichungen für den Impuls

Aus Newton (Impulsänderung = Kraft) erhält man: Falls $v =$ Geschwindigkeit $\in \mathbb{R}^d$, $\varrho =$ Dichte $\in \mathbb{R}$, ist $\varrho \cdot v =$ Impuls $\in \mathbb{R}^d$. Impulsbilanz (Integralform) in einem Teilkörper $\hat{\Omega} \subset \Omega \subset \mathbb{R}^n$ ($d \neq n$ möglich)

$$\frac{d}{dt} \int_{\hat{\Omega}} \varrho \cdot v \, dx = \int_{\partial \hat{\Omega}} \Sigma \cdot \nu \, dS(y) + \int_{\hat{\Omega}} f(t, x) \, dx. \quad (3.8)$$

Hierbei ist $\varrho = \varrho(t, x) \in \mathbb{R}$, $v = v(t, x) \in \mathbb{R}^d$, $\Sigma = \Sigma(t, y) \in \mathbb{R}^{d \times n}$ (Spannungstensor), äußere Normale $\nu \in \mathbb{R}^n$ und $f \in \mathbb{R}^d$ externe Kraft. $\Sigma \cdot \nu \in \mathbb{R}^d$ gibt an, welche Kraft bei y auf die Fläche (durch y) mit der Normalen ν wirkt.

Nach partieller Integration mit Gauß erhält man, weil $\hat{\Omega} \subset \Omega$ beliebig, mit

$$\operatorname{div} \Sigma = \begin{pmatrix} \operatorname{div} \Sigma_1 \\ \vdots \\ \operatorname{div} \Sigma_d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^d \text{ die Impulsbilanz (differenzielle Form):}$$

$$\frac{d}{dt}(\varrho \cdot v) = \operatorname{div} \Sigma + f \in \mathbb{R}^d \quad \text{für } x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R}. \quad (3.9)$$

Dazu zwei Beispiele:

III. Schwingung einer Saite ($d = n = 1$)

Sei $u = u(t, x) \in \mathbb{R}$ die Auslenkung einer Saite, $v := \partial_t u \in \mathbb{R}$ die Geschwindigkeit und $\varrho = \varrho_0(x)$ sei konstant in t . Die Spannung

$$\Sigma = K(x) \cdot \partial_x u \in \mathbb{R} \quad (\text{Hooke'sches Materialgesetz}) \quad (3.10)$$

wächst bei Verlängerung.

Aus (3.9) erhalten wir die 1-dim **Wellengleichung**

$$(WG) \quad \varrho_0(x) \cdot \partial_t^2 u = \frac{d}{dx} \left(K(x) \cdot \partial_x u \right) + f(t, x).$$

IV. Elastischer Körper (elastische Verschiebung $d = n = 3$)

Sei $u = u(t, x) \in \mathbb{R}^3$ ein Verschiebungsvektor für $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^3$ und $v = \partial_t u \in \mathbb{R}^3$. Als Referenzkörper dient z.B. ein Gummiblock ohne Spannung.

Lamé'sches Materialgesetz (Verallgemeinerung von Hooke):

$$\Sigma = \lambda(x) \cdot (\operatorname{div} u) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \mu(x) \cdot [Du + (Du)^\top] \in \mathbb{R}^{3 \times 3} \quad (3.11)$$

mit $\mu \in \mathbb{R}$ (Schermodul) und $\lambda \in \mathbb{R}$ (Lamé-Konstanten).

Der Verschiebungsgradient $Du \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ beschreibt die elastische Verzerrung (d.h. Dehnung, Drehung u.s.w.) $\Sigma \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ist der Spannungstensor. $\Sigma \nu \in \mathbb{R}^3$ beschreibt Spannung = Kraft pro Fläche mit Normale ν .

Genauer: $\Sigma = \hat{\Sigma}(x, Du)$ $\hat{\Sigma}(x, \cdot): \mathbb{R}^{3 \times 3} \rightarrow \mathbb{R}^{3 \times 3}$ beschreibt die Spannungs-Dehnung-Beziehung.

Aus (3.9) folgt mit $\varrho = \varrho(x)$ (nur ortsabhängig) die Grundgleichung der linearen 3-dim Elastodynamik

$$\varrho(x) \cdot \partial_t^2 u = \operatorname{div}(\hat{\Sigma}(x, Du(x))) + f(t, x) \in \mathbb{R}^3. \quad (3.12)$$

1.4 Nichtlineare Differentialgleichungen

Wir betrachten die Reaktions–Diffusionsgleichung

$$u_t = \Delta u + f(u), \quad x \in \Omega, \quad t > 0 \quad (4.1)$$

mit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Für $f(u) = u - u^3$ heißt (4.1) Allen–Cahn Gleichung (Materialwissenschaften). Dies ist ein Modell für Phasentrennung verschiedener Materialien ($u =$ „Dichte“ eines Materials).

(a) Energie Ungleichung

Betrachte

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx} + \lambda \cdot f(u) && \text{in } \Omega = (0, 1) \\ u &= 0 && \text{auf } \partial\Omega \end{aligned} \quad (4.2)$$

mit Parameter $\lambda \in \mathbb{R}$.

Lemma 1.4.1 Sei $\lambda = 0$ und $u \in C^2([0, T] \times \bar{\Omega})$ Lösung von (4.2). Dann gilt

$$\int_0^1 u^2(t_1, x) dx \leq \int_0^1 u^2(t_0, x) dx \quad \text{sofern } t_1 \geq t_0,$$

d.h. die L^2 -Norm fällt längs Lösungen (vgl. auch Sektion 1.2 Wärmeleitungsgleichung!)

Beweis: $\frac{d}{dt} \int_0^1 u^2(t, x) dx \leq 0$

Lemma 1.4.2 Sei $\lambda > 0$ und $u \in C^2([0, t] \times \bar{\Omega})$ Lösung von (4.2). Dann ist für $F' = -f$ (z.B. $F(u) = \frac{1}{4}(u^2 - 1)^2$ bei Allen–Cahn) das Funktional $E: C^1(\bar{\Omega}) \rightarrow \mathbb{R}$

$$E(u) := \int_0^1 \left[\frac{1}{2} u_x^2 + \lambda F(u) \right] dx$$

ein Liapunov–Funktional für Lösungen von (4.2), d.h. E fällt längs Lösungen

$$E(u(t_1, \cdot)) \leq E(u(t_2, \cdot)) \quad \text{für } t_1 \geq t_2.$$

Beweis: $\frac{d}{dt} E(u(t, \cdot)) \leq 0.$

Interpretation: Der 1. Term in E bestraft hohe Ableitungen (Tendenz Lösungen flach zu

machen). Der 2. Term in E bevorzugt Minima von F . Die „meisten“ Lösungen konvergieren gegen Minima von F (für $t \rightarrow \infty$).

(b) Finite-Differenzen-Methode für die Allen-Cahn Gleichung

Zur Veranschaulichung ist es oft nützlich (einfache, schnell umsetzbare) numerische Methoden einzusetzen. Wir betrachten wieder

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx} + \lambda \cdot f(u), & x \in (0, 1) \\ u &= 0, & x = 0 \quad \text{und} \quad x = 1 \\ u(0, x) &= u_0(x), & x \in (0, 1). \end{aligned} \tag{4.3}$$

Wir diskretisieren $[0, T] \times \bar{\Omega} = [0, T] \times [0, 1]$.

Wähle dazu $\Delta x > 0$ und $\Delta t > 0$, wobei $\Delta x = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$. Setze $t_0 := 0$ und $t_{k+1} := t_k + \Delta t$, sowie $x_0 := 0$ und $x_{k+1} := x_k + \Delta x$ (d.h. $x_n = 1$).

Ziel: Finde Approximation $v_j^m \approx u(x_j, t_m)$.

Ableitungen werden durch finite Differenzen approximiert:

$$\begin{aligned} u_t &\approx \frac{u(t + \Delta t, x) - u(t, x)}{\Delta t} \\ u_{xx} &\approx \frac{u(t, x + \Delta x) - 2u(t, x) + u(t, x - \Delta x)}{(\Delta x)^2} \end{aligned}$$

Damit ist $u_t(x_j, t_m) \approx \frac{v_j^{m+1} - v_j^m}{\Delta t}$ und $u_{xx}(x_j, t_m) \approx \frac{v_{j+1}^m - 2v_j^m + v_{j-1}^m}{(\Delta x)^2}$.

Einsetzen in (4.3) ergibt

$$v_j^{m+1} = v_j^m + \Delta t \left(\frac{v_{j+1}^m - 2v_j^m + v_{j-1}^m}{(\Delta x)^2} + \lambda \cdot f(v_j^m) \right) \tag{4.4}$$

für $m = 0, 1, \dots$ und $j = 1, \dots, n-1$ ($j = 0, n$ aus Randwerten).

Anfangsbedingungen: $v_j^0 = u_0(x_j)$, $j = 0, \dots, n$.

Randwerte: $v_0^m = 0 = v_n^m$ für $m = 0, 1, \dots$

Eine numerische Analyse liefert als „vernünftige“ Wahl für Δt und Δx (für $\lambda = 0$):
 $\frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} \leq \frac{1}{2}$ (für $\lambda \neq 0$ eher noch kleiner).

Kapitel 2

Maximumprinzipien

Als Begleitliteratur zur *Kapitel 2* bietet sich z.B. Renardy & Rogers [RR93] an.

2.1 Das schwache Maximumprinzip

Annahme 2.1.1 *Der lineare Differentialoperator*

$$Lu(x) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^n b_i(x) u_{x_i} + c(x) u, \quad x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$$

zweiter Ordnung erfülle:

- Die Matrix $(a_{ij})_{i,j \leq n}$ sei symmetrisch und streng positiv definit, d.h. es existiert $\Theta > 0$, so dass

$$(EL) \quad \sum_{i,j=1}^n \xi_i a_{ij}(x) \cdot \xi_j \geq \Theta \cdot \|\xi\|_2^2 \quad \text{für alle } x \in \Omega, \xi \in \mathbb{R}^n.$$

(elliptischer Typ; z.B. $L = \Delta$)

- Ω sei ein beschränktes Gebiet (=: offen und zusammenhängend).
- $a_{ij}, b_i, c \in C(\overline{\Omega})$.

Auf den Zusammenhang von Ω können wir anfangs noch verzichten. Wir betrachten klassische Lösungen (deren Existenz wir erstmal voraussetzen) und untersuchen deren Eigenschaften

- ▷ *Eindeutigkeit, qualitative Form*
- ▷ *A priori Schranken*
- ▷ *Symmetrien*

Satz 2.1.2 (Schwach Maximumprinzip)

Sei L gemäß Annahme 2.1.1, Ω beschränkt und $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ mit

$$\begin{aligned} Lu &\geq 0 \quad \text{in } \Omega \\ c &\equiv 0 \quad \text{in } \Omega. \end{aligned}$$

Dann nimmt u sein Maximum am Rand an, d.h.

$$\max_{x \in \overline{\Omega}} u(x) = \max_{x \in \partial\Omega} u(x).$$

Bemerkung zu Satz 2.1.2

$$\left. \begin{array}{l} Lu \leq 0 \quad \text{in } \Omega \\ c \equiv 0 \quad \text{in } \Omega \end{array} \right\} \implies \min_{x \in \overline{\Omega}} u(x) = \min_{x \in \partial\Omega} u(x).$$

Weiteres Ziel: Bedingungen an c abschwächen!

Korollar 2.1.3 Sei L gemäß Annahme 2.1.1, Ω beschränkt und $c \leq 0$ in Ω .

Dann gilt:

$$(a) \quad Lu \geq 0 \implies \max_{\overline{\Omega}} u \leq \max_{\partial\Omega} u^+$$

$$(b) \quad Lu \leq 0 \implies \min_{\overline{\Omega}} u \geq \min_{\partial\Omega} u^-$$

wobei $u^+ = \max(u, 0) \geq 0$, $u^- = \min(u, 0) \leq 0$ und

$$(c) \quad Lu = 0 \implies \max_{\overline{\Omega}} |u| = \max_{\partial\Omega} |u|.$$

Beachte $u^- \leq u \leq u^+$ und $u = u^- + u^+$.

Bemerkung zu Korollar 2.1.3

$c \leq 0$ ist notwendig! z.B. $\Omega = (0, 1)^2$, $c \equiv 2\pi^2$, $b_i \equiv 0$, $a_{ij} \equiv \delta_{ij}$, also $Lu := \Delta u + 2\pi^2 \cdot u$ in $(0, 1)^2$. $u(x, y) = \sin(\pi x) \cdot \sin(\pi y)$ löst $Lu = 0$, aber $\max_{\overline{\Omega}} u > \max_{\partial\Omega} u$.

Korollar 2.1.4 Sei L gemäß Annahme 2.1.1, Ω beschränkt und $c \leq 0$ in Ω .

Dann gilt für $u, v \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$:

$$(a) \quad \left. \begin{array}{l} Lu \leq Lv \quad \text{in } \Omega \\ u \geq v \quad \text{auf } \partial\Omega \end{array} \right\} \implies u \geq v \quad \text{in } \Omega \quad (\text{Vergleichsprinzip})$$

$$(b) \quad \left. \begin{array}{l} Lu = Lv \quad \text{in } \Omega \\ u = v \quad \text{auf } \partial\Omega \end{array} \right\} \implies u = v \quad \text{in } \Omega \quad (\text{Eindeutigkeitsresultat})$$

Beweis:

$$(a) \quad L(v - u) \geq 0 \implies \max_{\Omega} (v - u) \leq \max_{\partial\Omega} (v - u)^+ = 0.$$

(b) folgt aus (a).

□

Korollar 2.1.5 Die Voraussetzungen seien wie in Korollar 2.1.4 (insbes. $c \leq 0$). Dann gilt:

$$(a) \quad \left. \begin{array}{l} Lu = 0 \quad \text{in } \Omega \\ u = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega \end{array} \right\} \implies u = 0 \quad \text{in } \Omega.$$

$$(b) \quad \left. \begin{array}{l} Lu \leq 0 \quad \text{in } \Omega \\ u \geq 0 \quad \text{auf } \partial\Omega \end{array} \right\} \implies u \geq 0 \quad \text{in } \Omega.$$

Bemerkung 2.1.6 $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ mit

(a) $0 \leq Lu$ heißt **Untertlösung** von $Lu = 0$

(b) $0 \geq Lu$ heißt **Oberlösung** von $Lu = 0$

Für $L = \Delta$ sagt man **subharmonisch**, bzw. **superharmonisch** (u mit $\Delta u = 0$ heißt **harmonisch**).

2.2 Das starke Maximum-Prinzip

Das schwache Maximum-Prinzip sagt: u nimmt sein Maximum am Rand $\partial\Omega$ an. Es ist daher noch möglich, dass ein Maximalpunkt auch im Inneren von Ω angenommen wird. Das starke Maximum-Prinzip schließt das noch aus! Dazu nötig:

Satz 2.2.1 (Hopf'sches Randlemma)

L sei wie in Annahme 2.1.1 (keine Beschränktheit von Ω nötig, weil lokales Resultat), $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ ($C^1(\Omega \cup \{x_0\})$ genügt) und

$$Lu \geq 0 \quad \text{in } \Omega. \quad (2.1)$$

Sei $x_0 \in \partial\Omega$ ein (**striker**) **Maximalpunkt** mit

$$u(x_0) > u(x) \quad \text{für alle } x \in \Omega. \quad (2.2)$$

Ω erfülle bei x_0 eine „**innere Kugelbedingung**“, d.h. es existiert eine Kugel $B = B_r(y_0) \subset \Omega$ mit $r > 0$ und $x_0 \in \partial B$. Gilt weiterhin **eine** der folgenden Bedingungen:

(a) $c \equiv 0$

(b) $c \leq 0$ in Ω und $u(x_0) \geq 0$

(c) $u(x_0) = 0$

Dann gilt:

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0) > 0 \left(\nu = \frac{x_0 - y_0}{r} \text{ ist äußere Einheitsnormale an } \partial B \text{ bei } x_0 \right).$$

Bemerkung zu Satz 2.2.1

- trivialerweise ist $\frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0) \geq 0$, weil x_0 Maximalpunkt.
- $Lu \leq 0$ und x_0 Minimalpunkt ($u(x_0) \leq 0$ in (b)) $\implies \frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0) < 0$.
- C^2 -Rand genügt für „innere Kugelbedingung“, nicht jedoch spitze Ecken.

Beweisidee: Finde Funktion v mit $\frac{\partial v}{\partial \nu} < 0$ bei x_0 und $u + \varepsilon v \leq u(x_0)$ in Ω .

Dann folgt die Behauptung. □

Das Hopf'sche Randlemma macht nur die Aussage, dass eine Richtungsableitung nicht Null ist. Mit seiner Hilfe lässt sich aber der folgende weitreichende Satz zeigen.

Satz 2.2.2 (**Starkes Maximumprinzip**)

Sei L wie in Annahme 2.1.1, Ω ein nicht notwendigerweise beschränktes Gebiet und es gelte

$$Lu \geq 0 \quad (2.3)$$

für ein $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$. Dann gilt entweder

(A) u ist konstant, oder

(B) (a) $c \equiv 0 \implies u$ nimmt sein Maximum **nicht** im Inneren von Ω an.

(b) $c \leq 0 \implies u$ nimmt kein nicht-negatives Maximum im Inneren von Ω an.

(c) c beliebig $\implies u$ kann nie Null sein an einem inneren Maximalpunkt $x_0 \in \Omega$.

Bemerkung zu Satz 2.2.2 Ohne Zusammenhang von Ω ist der Satz falsch.

Anwendung: Stationäre Lösungen der Allen–Cahn Gleichung

Betrachte die Allen–Cahn Gleichung

$$\begin{aligned} u_t &= \Delta u + \lambda \cdot f(u) && \text{in } \Omega \\ u &= 0 && \text{auf } \partial\Omega, \end{aligned} \tag{2.4}$$

wobei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet, $\lambda \in \mathbb{R}$ ein Parameter und $f(u) = u - u^3$.

Für stationäre Lösungen gilt:

$$\begin{aligned} \Delta u + \lambda f(u) &= 0 && \text{in } \Omega \\ u &= 0 && \text{auf } \partial\Omega. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Was kann man über Lösungen sagen (sofern welche existieren)? Wir betrachten allgemeiner:

Annahme 2.2.3 $\lambda = 1$; $f \in C^1(\mathbb{R})$, $f(0) = f(\pm 1) = 0$

und $f > 0$ auf $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$

bzw. $f < 0$ auf $(-1, 0) \cup (1, \infty)$.

Satz 2.2.4 Sei f wie oben und $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ Lösung von

$$\begin{aligned} \Delta u + f(u) &= 0 && \text{in } \Omega \\ u &= 0 && \text{auf } \partial\Omega. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Dann gilt:

$$-1 \leq u \leq 1 \quad \text{in } \Omega.$$

Beweis: Falls $\Omega^+ := \{u > 1\} \neq \emptyset$ gilt $\Delta u > 0$ in Ω^+ und $u = 1$ auf $\partial\Omega^+$ mit Widerspruch zum starken Maximumprinzip.

□

Satz 2.2.5 Sei f wie in Annahme 2.2.3 und $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ Lösung von (2.6).

Dann gilt sogar

$$-1 < u < +1 \quad \text{in } \Omega.$$

2.3 A priori Schranken

Unser mittelfristiges Ziel (siehe *Kapitel 4*) ist es, Lösungen (z.B. $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$) für das elliptische Randwertproblem

$$\begin{aligned} Lu &= f & \text{in } \Omega \\ u &= g & \text{auf } \partial\Omega \end{aligned} \tag{3.1}$$

mit vorgegebenem $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ und $g: \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ zu finden. Insbesondere werden wir sehen, dass (3.1) ein wohlgestelltes Problem ist, d.h.:

- (a) Es existiert eine Lösung (vgl. *Kapitel 4*).
- (b) Die Lösung ist eindeutig ja; vgl. *Korollar 2.1.4*.
- (c) Die Lösung hängt stetig von den Daten ab.

Die letzte Behauptung (c) folgt aus der folgenden a priori Abschätzung:

Satz 2.3.1 (*Theorem 4.11, S. 109 Renardy & Rogers [RR93]*)

Sei L wie in *Annahme 2.1.1* mit $c \leq 0$, $b = (b_1, \dots, b_n)$ und Elliptizitätskonstante Θ , sowie $f: \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ und $g: \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Ω sei beschränkt und liege zwischen zwei parallelen Hyperebenen mit Abstand $d > 0$. $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ sei Lösung von (3.1). Dann gilt

$$\max_{x \in \overline{\Omega}} |u(x)| \leq \max_{x \in \partial\Omega} |g(x)| + \frac{C}{\Theta} \max_{x \in \overline{\Omega}} |f(x)|$$

mit $C = C(\Theta, \|b\|_{C(\overline{\Omega})}, d) > 0$. Genauer gilt

$$C + 1 = \exp\left(d \cdot \left[1 + \Theta^{-1} \|b\|_{C(\overline{\Omega})}\right]\right).$$

Stetige Abhängigkeit folgt dann sofort:

Seien u_1 und u_2 Lösungen von

$$\begin{aligned} Lu_i &= f_i & \text{in } \Omega \\ u_i &= g_i & \text{auf } \partial\Omega \end{aligned} \quad i = 1, 2.$$

Dann löst $u_1 - u_2$:

$$\begin{aligned} L(u_1 - u_2) &= f_1 - f_2 & \text{in } \Omega \\ u_1 - u_2 &= g_1 - g_2 & \text{auf } \partial\Omega \end{aligned}$$

Satz 2.3.1 liefert dann

$$\max_{x \in \overline{\Omega}} |(u_1 - u_2)(x)| \leq \max_{x \in \partial\Omega} |(g_1 - g_2)(x)| + \frac{C}{\Theta} \max_{x \in \overline{\Omega}} |(f_1 - f_2)(x)|,$$

d.h. unterscheiden sich (f_1, g_1) nur wenig von (f_2, g_2) , dann liegen auch die Lösungen nahe beieinander.

2.4 Symmetrie von Lösungen

Originalliteratur zu diesem Paragraphen: Gidas, Ni & Nirenberg [GNN79]

Annahme 2.4.1 Sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ von der Klasse C^1 . $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ sei offen, beschränkt und symmetrisch bzgl. der x_1 -Variable und $\partial\Omega \cap \{x_1 > 0\}$ sei Graph einer C^2 Funktion in $\hat{x} := (x_2, \dots, x_n)$.

Wir betrachten **positive** $C^2(\overline{\Omega})$ -Lösungen u von

$$\begin{aligned} \Delta u + f(u) &= 0 & \text{in } \Omega \\ u &= 0 & \text{auf } \partial\Omega \\ u &> 0 & \text{in } \Omega. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Satz 2.4.2 Jede Lösung von (4.1) gemäß Annahme 2.4.1 ist symmetrisch bzgl. der x_1 -Variable, d.h.

$$u(x_1, \hat{x}) = u(-x_1, \hat{x})$$

und

$$\frac{\partial u}{\partial x_1}(x) < 0 \quad \text{für alle } x \in \Omega \cap \{x_1 > 0\}. \tag{4.2}$$

Korollar 2.4.3 Für $\Omega = B_R(0)$ ist jede C^2 -Lösung von (4.1) radialsymmetrisch, d.h. es existiert eine Funktion $\tilde{u}: [0, R] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $u(x) = \tilde{u}(|x|)$, $\max_{x \in \overline{\Omega}} u(x) = \tilde{u}(0)$, $\tilde{u}(R) = 0$ und $\tilde{u}'(r) < 0 \quad \forall r \in (0, R)$.

Satz 2.4.2 wird mit 3 Lemmata bewiesen. Es gelte jeweils Annahme 2.4.1.

Lemma 2.4.4 Sei $x^* \in \partial\Omega \cap \{x_1 > 0\}$. Dann existiert ein $\delta > 0$ mit

$$\frac{\partial u}{\partial x_1}(x) < 0 \quad \text{in } \Omega \cap B_\delta(x^*).$$

Beweis mit dem Hopf'schen Randlemma.

Notation 2.4.5 Für $\lambda \geq 0$ sei $T_\lambda := \{x_1 = \lambda\}$ eine Hyperebene im \mathbb{R}^n . Für $x \in \Sigma_\lambda := \Omega \cap \{x_1 > \lambda\} \neq \emptyset$ sei x^λ das Spiegelbild von x unter der Spiegelung an T_λ und $\Sigma'_\lambda \subset \Omega$ das Bild von Σ_λ unter dieser Spiegelung.

Lemma 2.4.6 Sei $\lambda > 0$ und $\Sigma_\lambda \neq \emptyset$. Falls

$$(a) \quad \frac{\partial u}{\partial x_1}(x) \leq 0 \quad \text{und} \quad u(x) \leq u(x^\lambda) \quad \text{für alle} \quad x \in \Sigma_\lambda.$$

$$(b) \quad u(x) \neq u(x^\lambda) \quad \text{für} \quad x \in \Sigma_\lambda.$$

Dann gilt:

$$(c1) \quad u(x) < u(x^\lambda) \quad \text{für alle} \quad x \in \Sigma_\lambda.$$

$$(c2) \quad \frac{\partial u}{\partial x_1}(x) < 0 \quad \text{für alle} \quad x \in \Omega \cap T_\lambda.$$

Beweis wieder mit Maximumprinzipien.

Lemma 2.4.7 Für jedes $\lambda > 0$ mit $\Sigma_\lambda \neq \emptyset$ gilt:

$$\frac{\partial u}{\partial x_1}(x) < 0 \quad \text{und} \quad u(x) < u(x^\lambda) \quad \text{für alle} \quad x \in \Sigma_\lambda. \quad (4.3)$$

Beweis mit der „Moving plane“-Methode.

Beweis von Satz 2.4.2: (4.2) folgt unmittelbar und wegen Stetigkeit folgt $u(x) \leq u(x^0)$ für alle $x \in \Sigma_0$ aus (4.3). Nochmaliges anwenden auf $v(x) := u(-x_1, \hat{x})$ liefert $v(x) \leq v(x^0)$ oder $u(x) \geq u(x^0)$ für alle $x \in \Sigma_0$. Folglich ist $u(x) = u(x^0)$, d.h. u ist symmetrisch bzgl. $T_0 = \{x_1 = 0\}$. □

Nachtrag zu Korollar 2.4.3

Betrachte Lösungen von

$$\begin{aligned} \Delta u + f(u) &= 0 & \text{in} & \quad \Omega = B_R(0) \\ u &= 0 & \text{auf} & \quad \partial B_R(0) \\ u &> 0 & \text{in} & \quad \Omega \end{aligned} \quad (4.4)$$

und die Spiegelebene $\eta^\perp \neq e_1^\perp = \{x_1 = 0\}$.

Frage: Gilt Satz 2.4.2 analog für $\eta \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ beliebig (statt nur für e_1).

Nur für $\eta = e_i$, $i = 1, \dots, n$ ist das klar ($\Delta = \sum_{i=1}^n \partial_{x_i x_i}$ ist scheinbar auf dem Koordinaten ausgezeichnet). Statt die Beweise nochmal einzeln für η beliebig durchzugeben (was geht!), kann man auch alternativ ausnützen, dass der Laplace-Operator $O(n)$ -**äquivariant** ist. Sei dazu $O(n) = \{\gamma \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid \gamma \gamma^T = \gamma^T \gamma = Id\}$ die orthogonale Gruppe.

Lemma 2.4.8 (*$O(n)$ -Äquivarianz von Δ*)

Zu $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$ setze $(\gamma u)(x) := u(\gamma^{-1}x)$. Dann ist auch $\gamma u \in C^2(\mathbb{R}^n)$ und es gilt:

$$\gamma(\Delta u) = \Delta(\gamma u) \quad \text{für alle } \gamma \in O(n).$$

D.h. mit u Lösung von (4.1) auf einem Ball Ω ist auch jedes γu Lösung von (4.1) und die Symmetriefrage bzgl. η^\perp lässt sich nach einer geeigneten Drehung um γ auf die Symmetriefrage bzgl. e_1^\perp zurückführen.

2.5 Parabolische Maximumprinzipien

Wir betrachten den parabolischen (linearen) Differentialoperator

$$Lu = -u_t + \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(t,x) u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^n b_i(t,x) u_{x_i} + c(t,x) u, \quad (5.1)$$

wobei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ i.d. Regel ein Gebiet ist. Wir suchen Lösungen $u = u(t,x)$ mit $(t,x) \in (0,T) \times \Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$.

Definition 2.5.1 Setze $D := (0,T] \times \Omega$, $Q := (0,T) \times \Omega$ und $\Sigma := ([0,T] \times \partial\Omega) \cup (\{0\} \times \Omega)$. Σ heißt **parabolischer Rand**. Offenbar ist $Q = \text{int}(\overline{D})$.

Annahme 2.5.2 (a) $a_{ij}, b_i, c \in C(\overline{D})$

(b) $A(t,x) = (a_{ij}(t,x))_{i,j=1,\dots,n}$ ist streng positiv definit, d.h. es existiert $\Theta > 0$ mit

$$\sum_{i,j=1}^n \xi_i a_{ij}(t,x) \xi_j \geq \Theta \|\xi\|^2 \quad \forall (t,x) \in \overline{D}, \forall \xi \in \mathbb{R}^n.$$

L hat also die Form $Lu = -u_t +$ „elliptischer Differentialoperator“. $Lu = 0$ ist eine (einfache) **Evolutionsgleichung** (Zeit $t \rightsquigarrow$ dynamisches Problem).

Satz 2.5.3 (*Schwaches parabolisches Maximumprinzip*)

Es sei Annahme 2.5.2 erfüllt und Ω offen und beschränkt. Sei L wie in (5.1) mit $c \equiv 0$ in D und $u \in C^2(D) \cap C(\overline{D})$ erfülle

$$Lu \geq 0 \text{ in } D$$

Dann gilt:

$$\max_{\overline{D}} u = \max_{\Sigma} u.$$

Bemerkung: Dieser Satz gilt auch für etwas allgemeinere Gebiete $D \subset (0, T] \times \mathbb{R}^n$.

Korollar 2.5.4 Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt und zusätzlich $c \leq 0$ in D (oder allgemeineres D)
Dann gilt:

$$(a) \quad Lu \geq 0 \implies \max_{\overline{D}} u \leq \max_{\Sigma} u^+$$

$$(b) \quad Lu \leq 0 \implies \min_{\overline{D}} u \geq \min_{\Sigma} u^-$$

$$(c) \quad Lu = 0 \implies \max_{\overline{D}} |u| = \max_{\Sigma} |u|$$

Beweis: Analog zum Beweis von *Korollar 2.1.3*, nur mit Gebiet $(0, T) \times \Omega$ bzw. noch allgemeiner. □

Korollar 2.5.5 Sei Ω offen und beschränkt, oder allgemeines D wie vorher.
Sei $u, v \in C^2(D) \cap C(\overline{D})$ mit

$$(a) \quad \left. \begin{array}{l} Lu \leq Lv \quad \text{in } D \\ u \geq v \quad \text{auf } \Sigma \end{array} \right\} \implies u \geq v \quad \text{in } D$$

$$(b) \quad \left. \begin{array}{l} Lu = Lv \quad \text{in } D \\ u = v \quad \text{auf } \Sigma \end{array} \right\} \implies u = v \quad \text{in } D$$

Bemerkung: Wir fordern **keine** Einschränkung an das Vorzeichen von c . Teil (b) liefert Eindeutigkeit von linearen Anfangsrandwertaufgaben (vgl. auch Übung).

Weiteres Ziel ist ein starkes Maximumprinzip. Wann lassen sich innere Maxima ausschließen?

Satz 2.5.6 (Starkes parabolisches Maximumprinzip)

Sei $u \in C^2(D) \cap C(\overline{D})$ und

$$Lu \geq 0 \quad \text{in } D = (0, T] \times \Omega,$$

wobei Ω ein beschränktes Gebiet ist, d.h. momentan D nur in „Kreuzproduktform“.

Wir setzen $M := \sup_{x \in D} u(x)$ und nehmen an, dass ein

$$(t_0, x_0) \in D \quad \text{mit} \quad u(t_0, x_0) = M$$

existiert (ein „inneres“ Maximum).

Zusätzlich gelte entweder:

- (a) $c \equiv 0$ (M beliebig)
- (b) $c \leq 0$ und $M \geq 0$
- (c) $M = 0$ und c beliebig.

Dann ist $u \equiv M$ auf $[0, t_0] \times \bar{\Omega}$.

Zum Beweis benötigen wir mehrere Lemmata. Die Annahmen von Satz 2.5.6 gelten also jeweils.

Lemma 2.5.7 *Sei wie vorher $Lu \geq 0$ in Ω und $M = \sup_D u$.*

Sei $B \subset \mathbb{R}^n$ ein Ball mit $\bar{B} \subset D$,

$$u < M \text{ in } B \quad \text{und} \quad u(t_0, x_0) = M \quad \text{für ein} \quad (t_0, x_0) \in \partial B.$$

Dann liegt (t_0, x_0) entweder am „Nordpol“ oder am „Südpol“ von B .

Beweisidee: Hopf'sches Randlemma (Satz 2.1.2) verwenden (in $n + 1$ Variablen (t, x)).

□

Lemma 2.5.8 *Angenommen $u(t_0, x_0) < M$ für $x \in \Omega$ und $t_0 \in (0, T)$.*

Dann gilt $u(t_0, x) < M$ für alle $x \in \Omega$.

Lemma 2.5.9 *Sei $0 \leq t_0 < t_1 \leq T$ und $u < M$ in $(t_0, t_1) \times \Omega$.*

Dann gilt: $u < M$ auf $\{t_1\} \times \Omega$.

Als Verallgemeinerung (vgl. Protter/Weinberger [PW84]) zitieren wir ohne Beweis:

Satz 2.5.10 *Sei $u \in C^2(D) \cap C(\bar{D})$ und $Lu \geq 0$ in D , wobei $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ ein beschränktes Gebiet mit hinreichend glattem Rand sei. Setze $M := \sup_D u$.*

Angenommen $u(t_0, x_0) = M$ für ein $(t_0, x_0) \in D$ und es gelte eine der drei Bedingungen

- (a) $c \equiv 0$ und M beliebig
- (b) $c \leq 0$ und $M \geq 0$
- (c) c beliebig und $M = 0$.

Dann gilt $u(t_1, x_1) = M$ für jeden Punkt $(t_1, x_1) \in D$ mit $t_1 \leq t_0$, welcher mit (t_0, x_0) durch einen Weg in D aus horizontalen oder aufwärts vertikalen Strecken verbunden werden kann.

2.6 Abfall der „Zero number“

Sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ von der Klasse C^1 . Wir betrachten Lösungen von

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + f(u), & x \in (0, 1), t \in (0, T] \\ u = 0 & \text{für } x = 0 \text{ oder } x = 1. \end{cases} \quad (6.1)$$

Annahme 2.6.1 (a) $f(0) = 0$

(b) $u \in C^2((0, T] \times (0, 1)) \cap C([0, T] \times [0, 1])$ sei Lösung von (6.1).

Definition 2.6.2 („Zero number“)

Sei $\varphi \in C[0, 1]$. Dann ist die zero number $z(\varphi)$ die maximale Zahl $n \in \mathbb{N}_0 \cup \{+\infty\}$, so dass $0 \leq x_0 < x_1 < \dots < x_n \leq 1$ existieren mit

$$\varphi(x_j) \cdot \varphi(x_{j+1}) < 0 \quad \text{für } j = 0, \dots, n - 1.$$

Satz 2.6.3 Sei f und u wie in Annahme 2.6.1. Dann gilt: $z(u(t, \cdot))$ ist nicht steigend in t (fallen ist erlaubt).

Beweis mit dem starken parabolischen Maximumprinzip.

Kapitel 3

Sobolev-Räume

Motivation:

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, offen und beschränkt, $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben. Wir betrachten das Randwertproblem

$$\begin{aligned} -\Delta u + u &= f & \text{in } \Omega \\ u &= 0 & \text{auf } \partial\Omega, \end{aligned} \tag{0.1}$$

wobei $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ gesucht ist. Multiplizieren von (0.1) mit einer Testfunktion $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ und anschließendes Integrieren liefert:

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \varphi \, dx + \int_{\Omega} u \varphi \, dx = \int_{\Omega} f \varphi \, dx \quad \text{für alle } \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Wir setzen

$$a(u, \varphi) := \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \varphi + u \varphi \, dx \quad \text{und} \quad F(\varphi) := \int_{\Omega} f \varphi \, dx \tag{0.2}$$

für $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$.

Jede klassische Funktion $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$, welche (0.1) erfüllt, ist also Lösung der folgenden Aufgabe: Gesucht ist u mit

$$a(u, \varphi) = F(\varphi) \quad \text{für alle } \varphi \in C_0^\infty(\Omega). \tag{0.3}$$

Unser Ziel ist es, Hilbert-Raum-Theorie anzuwenden. Sei $H =$ Hilbert-Raum mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle_H$. Der Satz von Riesz liefert zu gegebenem $F \in H'$ eine eindeutige Lösung $u = u_F \in H$ der Gleichung

$$\langle u, \varphi \rangle_H = F(\varphi) \quad \text{für alle } \varphi \in H.$$

Konstruktion von H mit Skalarprodukt $a(\cdot, \cdot)$:

Setze $\|u\|_a := \sqrt{a(u, u)}$, und vervollständige $C_0^\infty(\Omega)$ bezüglich dieser Norm

$$W_0^{1,2}(\Omega) := \text{cl}_{\|\cdot\|_a} C_0^\infty(\Omega), \quad (0.4)$$

$$W^{1,2}(\Omega) = \text{cl}_{\|\cdot\|_a} C^\infty(\bar{\Omega}). \quad (0.5)$$

$W_0^{1,2}(\Omega)$ und $W^{1,2}(\Omega)$ sind Beispiele für Sobolev-Räume. Beides sind Hilberträume mit Skalarprodukt $a(\cdot, \cdot)$. Es gilt

$$W_0^{1,2}(\Omega) \subset W^{1,2}(\Omega) \subset L^2(\Omega)$$

und $\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq \|u\|_a$ für alle $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$. Man kann a und F auf $W_0^{1,2}(\Omega)$ stetig fortsetzen.

Die **erweiterte Aufgabe** aus (0.3) lautet nun: Sei $f \in L^2(\Omega)$ und damit F gegeben.

Gesucht ist $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ mit

$$a(u, \varphi) = F(\varphi) \quad \text{für alle } \varphi \in W_0^{1,2}(\Omega). \quad (0.6)$$

Dieses Problem hat nach Riesz eine eindeutige Lösung $u = u_F$. Wir nennen u_F **schwache Lösung** von (0.1).

Probleme:

- Regularität: Ist $u_F \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$?
- Randwerte: Gilt $u|_{\partial\Omega} = 0$?

Bevor wir diesen Zugang in *Kapitel 4* auf allgemeinere Differentialgleichungen (von elliptischem Typ) verallgemeinern, wollen wir noch mehr über Sobolev-Räume kennenlernen und zwar insbesondere

- Dichteaussagen (vgl. (0.5))
- Einbettungssätze (wann sind $W^{1,2}(\Omega)$ Funktionen in $C(\bar{\Omega})$ und in welchem Sinne?)
- Randwerte (wann folgt aus $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$, dass $u|_{\partial\Omega} = 0$?)

3.1 Lebesgue-Räume

Definition 3.1.1 Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen (also Borel-messbar). Für $1 \leq p < \infty$ sei

$$L^p(\Omega) := \left\{ \begin{array}{l} u: \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm \infty\}, \text{ messbar, } \int_{\Omega} |u(x)|^p dx < \infty \\ \uparrow \\ \text{Äquivalenzklasse} \end{array} \right\}$$

mit Norm $\|u\|_p := \left(\int_{\Omega} |u(x)|^p dx \right)^{1/p}$.

Genauer: $L^p(\Omega)$ besteht aus Äquivalenzklassen von Funktionen. u und $v \in L^p(\Omega)$ sind Vertreter der gleichen Äquivalenzklasse genau dann, wenn $u(x) = v(x)$ a.e. in Ω (d.h. für Lebesgue fast alle $x \in \Omega$).

Definition 3.1.2 $u: \Omega \longrightarrow [-\infty, \infty]$, messbar, heißt **im Wesentlichen beschränkt**, falls es eine Konstante $K > 0$ gibt mit $|u(x)| \leq K$ a.e. in Ω

$$\begin{aligned} \|u\|_{\infty} = \operatorname{ess\,sup}_{x \in \Omega} |u(x)| &:= \inf \left\{ K \mid |u(x)| \leq K \text{ a.e. in } \Omega \right\} \\ &= \inf_{\substack{M \subset \Omega \\ M \text{ ist Nullmenge}}} \left(\sup_{x \in \Omega \setminus M} |u(x)| \right). \end{aligned}$$

Definition 3.1.3 Für $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen setzen wir

$$L^{\infty}(\Omega) := \left\{ u: \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm \infty\}, \text{ messbar, } \|u\|_{\infty} < \infty \right\},$$

wobei $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ wieder für eine ganze Äquivalenzklasse steht.

Lemma 3.1.4 (Hölder-Ungleichung)

Seien $p, q \in [1, \infty]$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ und sei $f \in L^p(\Omega)$, $g \in L^q(\Omega)$. Dann ist $f \cdot g \in L^1(\Omega)$ und es gilt:

$$\|f \cdot g\|_{L^1(\Omega)} \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \cdot \|g\|_{L^q(\Omega)}$$

In $L^p(\Omega)$ gilt die Dreiecksungleichung:

Lemma 3.1.5 (Minkowski-Ungleichung)

Sind $f, g \in L^p(\Omega)$, $p \in [1, \infty]$ dann ist auch $f + g \in L^p(\Omega)$ und

$$\|f + g\|_{L^p(\Omega)} \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} + \|g\|_{L^p(\Omega)}.$$

Lemma 3.1.6 (Fatou)

Sind $f_j \in L^1(\Omega)$, $f_j \geq 0$ fast überall und

$$\int_{\Omega} f_j(x) dx \leq C < \infty,$$

so ist $\liminf_{j \rightarrow \infty} f_j \in L^1(\Omega)$ und

$$\int_{\Omega} \left(\liminf_{j \rightarrow \infty} f_j \right) (x) dx \leq \liminf_{j \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_j(x) dx.$$

Satz 3.1.7 (Fischer–Riesz)

$L^p(\Omega)$ ist vollständig für $1 \leq p < \infty$ ($p = \infty$ als Übung)

Korollar 3.1.8 Für $1 \leq p \leq \infty$ ist $(L^p(\Omega), \|\cdot\|_p)$ ein Banachraum.

Zusatz: $L^2(\Omega)$ ist Hilbert–Raum mit $\langle u, v \rangle_{L^2(\Omega)} := \int_{\Omega} u(x) v(x) dx$.

Korollar 3.1.9 (Zusammenhang L_p –Konvergenz und Konvergenz fast überall)

Jede Cauchy–Folge $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $L^p(\Omega)$ enthält eine Teilfolge $(u_{n_j})_{j \in \mathbb{N}}$, welche fast überall in Ω konvergiert (gegen den L^p –Limes u) d.h. $u_{n_j}(x) \xrightarrow[\text{in } \mathbb{R}]{j \rightarrow \infty} u(x)$ für fast alle $x \in \Omega$.

Satz 3.1.10 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ sei offen und beschränkt (mit Maß $0 < \mu(\Omega) < \infty$). Dann gilt:

(i) Für $1 \leq p \leq q \leq \infty$ ist

$$\mu(\Omega)^{-1/p} \|u\|_p \leq \mu(\Omega)^{-1/q} \|u\|_q \quad \text{für alle } u \in L^q(\Omega)$$

(ii) $u \in L^\infty(\Omega) \implies \lim_{p \rightarrow \infty} \|u\|_p = \|u\|_\infty$

(iii) Ist $u \in L^p(\Omega)$ für alle $1 \leq p < \infty$ und $\|u\|_p \leq K$, so folgt $u \in L^\infty(\Omega)$.

Bemerkung 3.1.11 Aus (i) folgt insbesondere $L^q(\Omega) \subset L^p(\Omega)$ für $p \leq q$ (d.h. $L^q(\Omega) \subset L^p(\Omega)$ und die **Einbettung** ist **stetig**).

Genauer: $id: L^q(\Omega) \rightarrow L^p(\Omega)$ ist stetig, weil linear und beschränkt ($\|id(u)\|_p \leq C \cdot \|u\|_q$). Für Ω beschränkt gilt also $L^\infty(\Omega) \subset L^q(\Omega) \subset L^p(\Omega) \subset L^1(\Omega)$.

Weitere wichtige Sätze der Lebesgue–Theorie sind die der monotonen und der majorisierten Konvergenz.

Satz 3.1.12 (Satz von der monotonen Konvergenz; Beppo Levi)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f_n: \Omega \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, $n \in \mathbb{N}$, messbar mit

$$0 \leq f_1(x) \leq f_2(x) \leq \dots \quad \text{für jedes } x \in \Omega. \quad (1.7)$$

Dann gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_n(x) dx = \int_{\Omega} \left[\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right] dx \quad (1.8)$$

Satz 3.1.13 (Satz von der majorisierten Konvergenz; Lebesgue)

Sei $\Omega \in \mathbb{R}^n$ offen und $f_n: \Omega \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, $n \in \mathbb{N}$, messbar, so dass der punktweise Limes existiert, d.h.

$$f(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x), \quad x \in \Omega. \quad (1.9)$$

Falls dann eine Funktion $g \in L^1(\Omega)$ existiert mit

$$|f_n(x)| \leq g(x) \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in \Omega, \quad (1.10)$$

dann gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_n(x) dx = \int_{\Omega} f(x) dx \quad (1.11)$$

Definition 3.1.14 (Testfunktionen $C_0^\infty(\Omega)$)

(a) Für $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ist $\text{supp}(f) = \text{cl} \{x \in \Omega: f(x) \neq 0\}$. $\text{supp}(f)$ heißt **Träger** (engl.: **Support**) von f .

(b) $A \subset\subset B: \iff \begin{cases} \text{(i)} & \bar{A} \text{ ist kompakt und} \\ \text{(ii)} & \bar{A} \subset B \end{cases}$

Wir sagen A **liegt kompakt** in B oder A ist in B **kompakt enthalten**.

(c) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen

$$C_0^\infty(\Omega) := \{u \in C^\infty(\Omega): \text{supp}(u) \subset\subset \Omega\}.$$

Ziel: $C_0^\infty(\Omega)$ ist **dicht** in $L^p(\Omega)$ für $1 \leq p < \infty$.

Satz 3.1.15 Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Es sei $f \in L^p(\Omega)$ für $p \in [1, \infty)$. Dann gibt es eine Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset L^p(\Omega)$ mit $\text{supp}(f_n) \subset\subset \Omega$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - f_n\|_p = 0$.

Definition 3.1.16 (Standard $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ -Funktionen)

Setze

$$g(x) := \begin{cases} c \cdot e^{-\frac{1}{1-|x|^2}}, & \text{für } |x| < 1 \\ 0, & \text{für } |x| \geq 1, \end{cases}$$

wobei $c > 0$ so gewählt ist, dass $\int_{\mathbb{R}^n} g(x) dx = 1$.

Offenbar ist $\text{supp}(g) = \overline{B_1(0)}$, $g(x) \geq 0$ und $g \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Lemma 3.1.17 Zu $\varepsilon > 0$ sei

$$g_\varepsilon(x) := \frac{1}{\varepsilon^n} g\left(\frac{x}{\varepsilon}\right), \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Dann ist $g_\varepsilon \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\text{supp}(g_\varepsilon) = \overline{B_\varepsilon(0)}$, $\int_{\mathbb{R}^n} g_\varepsilon(x) dx = 1$ und g_ε ist beschränkt ($|g_\varepsilon(x)| \leq K_\varepsilon$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$).

Definition 3.1.18 Sei $f \in L_{loc}^1(\mathbb{R}^n) := \left\{ u: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm \infty\} : u \text{ ist messbar, } u \in L^1(\Omega) \text{ für alle } \Omega \subset\subset \mathbb{R}^n \right\}$. Dann ist

$$(g_\varepsilon * f)(x) := \int_{\mathbb{R}^n} g_\varepsilon(x-y) f(y) dy \quad (1.12)$$

wohldefiniert. $g_\varepsilon * f$ heißt **Faltung** (engl.: **Mollifier**).

In (1.12) wird nur über $\overline{B_\varepsilon(x)}$, also ein Kompaktum, integriert. Offenbar ist $L^p(\Omega) \subset L_{loc}^1(\mathbb{R}^n)$. Setzt man $f \in L^p(\Omega)$ außerhalb von Ω durch Null fort, erhält man eine $L_{loc}^1(\mathbb{R}^n)$ -Funktion.

Satz 3.1.19 (a) $g_\varepsilon * f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ für alle $f \in L_{loc}^1(\mathbb{R}^n)$ und

$$D^\alpha(g_\varepsilon * f)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} D_x^\alpha g_\varepsilon(x-y) \cdot f(y) dy$$

für $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$ und $x \in \mathbb{R}^n$.

(b) Ist $f \in L_{loc}^1(\mathbb{R}^n)$ und $\text{supp}(f) \subset\subset \Omega$, so ist $(g_\varepsilon * f) \in C_0^\infty(\Omega)$, sofern

$$0 < \varepsilon < \text{dist}(\text{supp}(f), \partial\Omega).$$

(c) Sei $f \in L^p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$ und $f|_{\mathbb{R}^n \setminus \Omega} = 0$, so dass also $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$.

Dann gilt:

$$g_\varepsilon * f \in L^p(\Omega), \quad \|g_\varepsilon * f\|_{L^p(\Omega)} \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \quad (1.13)$$

und

$$\lim_{\varepsilon \searrow 0} \|(g_\varepsilon * f) - f\|_{L^p(\Omega)} = 0. \quad (1.14)$$

Korollar 3.1.20 Für $1 \leq p < \infty$ und $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen ist $C_0^\infty(\Omega)$ dicht in $L^p(\Omega)$.

Die Aussage von Korollar 3.1.20 gilt nicht für $p = \infty$. Sei z.B. $f \equiv 1 \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$, aber trotzdem gilt

$$\|g - f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \geq 1 \quad \text{für alle } g \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n).$$

Satz 3.1.21 Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $u \in C(\Omega)$, sowie $M \subset\subset \Omega$.

Dann gilt $\lim_{\varepsilon \searrow 0} (g_\varepsilon * u) = u$ gleichmäßig auf M , d.h.

$$\sup_{x \in M} |(g_\varepsilon * u)(x) - u(x)| \rightarrow 0 \quad (\varepsilon \searrow 0).$$

Bemerkung 3.1.22 In der Situation von Satz 3.1.19(c) gilt für $f \in L^p(\Omega) \cap L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ mit $f|_{\mathbb{R}^n \setminus \Omega} \neq 0$ zwar statt der Abschätzung in (1.13) nur noch

$$\|g_\varepsilon * f\|_{L^p(\Omega)} \leq \|f\|_{L^p(\widehat{\Omega}_\varepsilon)}, \quad (1.15)$$

wobei $\widehat{\Omega}_\varepsilon := \{x \in \mathbb{R}^n : \text{dist}(x, \Omega) \leq \varepsilon\} \supset \Omega$.

Die Konvergenz in (1.14) ist aber immer noch gültig, falls man zusätzlich fordert, dass ein $\varepsilon_0 > 0$ existiert mit $f \in L^p(\widehat{\Omega}_{\varepsilon_0})$.

3.2 Schwache Ableitungen

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beliebig offen. Dann gilt die Formel der partiellen Integration:

$$\int_{\Omega} D^\alpha u(x) \cdot \varphi(x) dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} u(x) \cdot D^\alpha \varphi(x) dx$$

für alle $u \in C^k(\Omega)$, $|\alpha| \leq k$ und $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$. Setze

$$L^1_{loc}(\Omega) := \left\{ u \in \Omega \rightarrow [-\infty, \infty] : u \text{ messbar, } u|_{\tilde{\Omega}} \in L^1(\tilde{\Omega}) \text{ für alle } \tilde{\Omega} \subset\subset \Omega \right\}.$$

Definition 3.2.1 Sei $u \in L^1_{loc}(\Omega)$. Eine Funktion $v \in L^1_{loc}(\Omega)$ heißt α -te schwache (partielle) Ableitung von u , falls

$$\int_{\Omega} u(x) D^{\alpha} \varphi(x) dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} v(x) \varphi(x) dx \quad \text{für alle } \varphi \in C_0^{\infty}(\Omega). \quad (2.1)$$

Schreibweise: $v = d^{\alpha}u$.

Bemerkung: Falls $u \in C^{|\alpha|}(\Omega)$, dann existiert eine schwache Ableitung, welche der klassischen Ableitung entspricht, d.h. $d^{\alpha}u = D^{\alpha}u$.

Satz 3.2.2 Die schwache Ableitung ist eindeutig bestimmt.
(Rechtfertigung der Schreibweise $v = d^{\alpha}u$)

Definition 3.2.3 Setze $W^k(\Omega) := \{u \in L^1_{loc}(\Omega), u \text{ besitzt schwache Ableitungen } d^{\alpha}u \text{ in } L^1_{loc}(\Omega) \text{ für alle } |\alpha| \leq k\}$.

Offenbar gilt $C^k(\Omega) \subset W^k(\Omega)$ und $W^k(\Omega)$ ist linearer Raum.

Lemma 3.2.4 Sei $u \in W^k(\Omega)$. Ist $x \in \Omega$ mit $\text{dist}(x, \partial\Omega) > \varepsilon$, so gilt für alle $|\alpha| \leq k$

$$D^{\alpha}(g_{\varepsilon} * u)(x) = (g_{\varepsilon} * d^{\alpha}u)(x).$$

Insbesondere ist also $D^{\alpha}(g_{\varepsilon} * u) = g_{\varepsilon} * d^{\alpha}u$ auf $\Omega_{\varepsilon} := \{x \in \Omega \mid \text{dist}(x, \partial\Omega) > \varepsilon\}$.

Lemma 3.2.5 Seien $u, v \in L^1_{loc}(\Omega)$ und $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ fest. Dann gilt:

$v = d^{\alpha}u \iff$ für alle $\Omega' \subset\subset \Omega$ existiert eine Folge $(u_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset C^{\infty}(\Omega)$ mit

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{k \rightarrow \infty} \|u_k - u\|_{L^1(\Omega')} = 0 \quad \text{und} \\ \lim_{k \rightarrow \infty} \|D^{\alpha}u_k - v\|_{L^1(\Omega')} = 0. \end{array} \right.$$

Konvergenz gilt dabei auf jedem beliebigen Kompaktum $\Omega' \subset\subset \Omega$.

Bemerkung: Die Folge $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ im obigen Lemma darf von Ω' abhängen.

Lemma 3.2.6 (Produktregel)

$u \in C^1(\Omega)$, $v \in W^1(\Omega)$ impliziert $u \cdot v \in W^1(\Omega)$ und

$$d_j(u \cdot v) = u \cdot d_j v + v \cdot D_j u.$$

Beweisidee: Mit Lemma 3.2.5. (d_j ist die schwache Ableitung, D_j die klassische!)

Satz 3.2.7 (Kettelregel)

Sei $f \in C^1(\mathbb{R})$, $f' \in L^\infty(\mathbb{R})$ und $u \in W^1(\Omega)$. Dann gilt $f \circ u \in W^1(\Omega)$ und

$$d_j(f \circ u) = f'(u) \cdot d_j u.$$

Bemerkung 3.2.8 Als Anwendung erhalten wir $u \in W^1(\Omega)$ impliziert $|u| \in W^1(\Omega)$, was klassisch nicht richtig ist.

Notation 3.2.9 Sei $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben. Wir setzen

$$u^+(x) := \max(u(x), 0), \quad x \in \Omega$$

$$u^-(x) := \min(u(x), 0), \quad x \in \Omega$$

Es gilt $u(x) = u^+(x) + u^-(x)$ und $|u(x)| = u^+(x) - u^-(x)$.

Lemma 3.2.10 Falls $u \in W^1(\Omega)$, dann sind auch u^+ , u^- , $|u| \in W^1(\Omega)$.

3.3 Sobolev-Räume

Satz 3.3.1 Sei $1 \leq p < \infty$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Dann sind die **Sobolev-Räume**

$$W^{k,p}(\Omega) = \left\{ u \in W^k(\Omega) : d^\alpha u \in L^p(\Omega) \text{ für } 0 \leq |\alpha| \leq k \right\}$$

Banach-Räume mit Norm

$$\|u\|_{k,p} = \left\{ \sum_{0 \leq |\alpha| \leq k} \int_{\Omega} |d^\alpha u(x)|^p dx \right\}^{\frac{1}{p}}.$$

Bemerkung 3.3.2 $L^p(\Omega) \subset L^1_{loc}(\Omega)$ für alle $p \in [1, \infty)$, also $W^{k,p}(\Omega) \subset W^k(\Omega)$.

Beweisidee von Satz 3.3.1: Mit Vollständigkeit von $L^p(\Omega)$.

$H^k(\Omega) := W^{k,2}(\Omega)$ ist ein Hilbert-Raum mit dem Skalarprodukt

$$\langle u, v \rangle_k = \sum_{0 \leq |\alpha| \leq k} \int_{\Omega} d^\alpha u(x) d^\alpha v(x) dx.$$

Bemerkung 3.3.3 $u_\ell \rightarrow u$ in $W^{k,p}(\ell \rightarrow \infty) \iff d^\alpha u_\ell \rightarrow d^\alpha u$ in $L^p(\ell \rightarrow \infty)$ für alle $|\alpha| \leq k$.

Offenbar gilt: $C_0^k(\Omega) \subset W^{k,p}(\Omega)$. Setze $W_0^{k,p}(\Omega) := c\ell_{\|\cdot\|_{k,p}}(C_0^\infty(\Omega))$.

Satz 3.3.4 $W_0^{k,p}(\Omega) \subset W^{k,p}(\Omega)$ ist auch ein Banach-Raum. Analog ist $H_0^k(\Omega) := W_0^{k,2}(\Omega)$ ein Hilbert-Raum.

Im Moment ist damit noch nicht klar, ob $W_0^{k,p}(\Omega)$ echte Teilmenge von $W^{k,p}(\Omega)$ für $k \geq 1$ ist.

Lemma 3.3.5 Sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f \in C^1(\mathbb{R})$, $f' \in L^\infty(\mathbb{R})$, $f(0) = 0$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen.

Dann gilt:

1. $u \in W^{1,p}(\Omega)$ impliziert $f \circ u \in W^{1,p}(\Omega)$.
2. $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ impliziert $f \circ u \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Bemerkung: Fall 1. gilt auch für $f(0) \neq 0$ falls Ω beschränkt ist.

Lemma 3.3.6 Sei $u \in W^{k,p}(\Omega)$, $v \in W_0^{k,q}(\Omega)$, $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1$ und $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen.

Dann gilt:

$$\int_{\Omega} (d^\alpha u(x)) \cdot v(x) dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} u(x) d^\alpha v(x) dx, \quad \text{für alle } |\alpha| \leq k.$$

Ziel: $C^\infty(\Omega) \cap W^{k,p}(\Omega)$ ist dicht in $W^{k,p}(\Omega)$ bezüglich $\|\cdot\|_{k,p} = \|\cdot\|_{W^{k,p}(\Omega)}$. Insbesondere ist

$$\hat{C}^{k,p}(\Omega) := \{u \in C^k(\Omega) : D^\alpha u \in L^p(\Omega) \text{ für alle } |\alpha| \leq k\}$$

in $W^{k,p}(\Omega)$ dicht (Meyers & Serrin 1969).

Lemma 3.3.7 Sei $p \in [1, \infty)$ und $u \in W^{k,p}(\Omega)$. Dann gilt für $\Omega' \subset\subset \Omega$ beliebig:

$$\|g_\varepsilon * u - u\|_{W^{k,p}(\Omega')} \rightarrow 0 \quad (\varepsilon \rightarrow 0).$$

Bemerkung 3.3.8 Setzt man $u \in W^{k,p}(\Omega)$ außerhalb von Ω durch 0 fort, liegt die Fortsetzung in $L^p(\mathbb{R}^n)$, aber nicht notwendigerweise in $W^{k,p}(\mathbb{R}^n)$!

Sei $C_B^k(\Omega) := \{u \in C^k(\Omega) : D^\alpha u \text{ ist beschränkt für } |\alpha| \leq k\}$.

Lemma 3.3.9 (Leibniz-Formel)

Sei $\psi \in C^\infty(\Omega) \cap C_B^k(\Omega)$, $u \in W^{k,p}(\Omega)$. Dann folgt: $\psi \cdot u \in W^{k,p}(\Omega)$ und

$$d^\alpha(\psi \cdot u) = \sum_{0 \leq \beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} D^\beta \psi \cdot d^{\alpha-\beta} u \quad \text{für alle } |\alpha| \leq k.$$

Hierbei ist $\alpha! := \alpha_1! \cdots \alpha_n!$ und $\binom{\alpha}{\beta} := \frac{\alpha!}{\beta!(\alpha-\beta)!}$.

Beweisidee: Durch Induktion über k .

Lemma 3.3.10 (Zerlegung der Eins)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $\Omega \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} \Omega_j$ sei eine offene Überdeckung von Ω mit

1. $\Omega_j \subset \subset \Omega$
2. Für jedes Kompaktum $K \subset \subset \Omega$ gilt: $K \cap \Omega_j = \emptyset$ für fast alle j (nur endlich viele Ausnahmen zugelassen).

$(\Omega_j)_{j \in \mathbb{N}}$ heißt **lokal endliche Überdeckung** von Ω . Dann gibt es $\psi_j \in C_0^\infty(\Omega)$ mit

- (i) $0 \leq \psi_j(x) \leq 1$ für alle $x \in \Omega$
- (ii) $\text{supp } \psi_j \subset \subset \Omega_j$
- (iii) $\sum_{j=1}^{\infty} \psi_j(x) = 1$ für alle $x \in \Omega$.

Man nennt $(\psi_j)_{j \in \mathbb{N}}$ mit (i) – (iii) eine **Zerlegung der Eins**.

Satz 3.3.11 (Meyers & Serrin, 1964)

$C^\infty(\Omega) \cap W^{k,p}(\Omega) \left(\subset \hat{C}^{k,p}(\Omega) \right)$ ist dicht in $W^{k,p}(\Omega)$ für $1 \leq p < \infty$.

Beweisidee: Sei

$$K_j := \left\{ x \in \Omega \mid |x| \leq j, \text{dist}(x, \partial\Omega) \geq \frac{1}{j} \right\} \quad \text{kompakt, so dass}$$

$$\overset{\circ}{K}_j = \left\{ x \in \Omega, |x| < j, \text{dist}(x, \partial\Omega) > \frac{1}{j} \right\} \quad \text{offen.}$$

Dann gilt $K_j \subset \subset \Omega$, $K_j \subset K_{j+1}$ und $\Omega = \bigcup_{j=1}^{\infty} \overset{\circ}{K}_j$.

Setze $K_0, K_{-1} := \emptyset$ und $\Omega_j := \overset{\circ}{K}_{j+1} \setminus K_{j-1}$ für $j \in \mathbb{N}$. Dann ist $\Omega = \bigcup_{j=1}^{\infty} \Omega_j$ lokal endliche Überdeckung. Damit existiert eine Zerlegung der Eins $\{\psi_j\}_{j=1}^{\infty}$.

Sei $u \in W^{k,p}(\Omega)$ beliebig. Dann ist $\psi_j u \in W^{k,p}(\Omega)$.

Wähle $U_j := \overset{\circ}{K}_{j+2} \setminus K_{j-2}$, so dass $U_j \subset \subset \Omega$ und $\Omega_j \subset \subset U_j$. Zu $\varepsilon > 0$ vorgegeben, wähle $\varepsilon_j > 0$ so klein, dass $g_{\varepsilon_j} * (\psi_j u) \in C_0^\infty(U_j)$ und $\|g_{\varepsilon_j} * (\psi_j u) - \psi_j u\|_{W^{k,p}(U_j)} < \frac{\varepsilon}{2^j}$.

Setzt man

$$v_j := g_{\varepsilon_j} * (\psi_j u) \quad \text{und} \quad v := \sum_{j=1}^{\infty} v_j \in C^\infty(\Omega) \cap W^{k,p}(\Omega),$$

dann folgt leicht $\|v - u\|_{W^{k,p}(\Omega)} < \varepsilon$.

□

Beispiel 3.3.12 Der Satz von Meyers & Serrin gilt für $p = \infty$ nicht:
Etwa für $\Omega = (-1, 1) \subset \mathbb{R}$ und $u(x) = |x|$ ist $u \in W^{1,\infty}(\Omega)$, aber

$$u \notin \text{cl}_{\|\cdot\|_{1,\infty}} (C^\infty(\Omega) \cap W^{1,\infty}(\Omega)) .$$

3.4 Einbettungssätze

Zunächst einige Reminiszenzen der Funktionalanalysis über Kompaktheit.

Satz 3.4.1 Im topologischen linearen Raum (X, τ) gilt: $K \subset X$ kompakt $\implies K$ ist abgeschlossen und beschränkt.

Satz 3.4.2 Ist (X, d) metrischer Raum und $K \subset X$, so sind äquivalent:

- (a) K ist kompakt; genauer: **überdeckungskompakt**, d.h. jede offene Überdeckung von $K, K \subset \bigcup_{i \in I} \Theta_i$ mit $\Theta_i \subset X$ offen, I beliebige Indexmenge, hat eine endliche Teilüberdeckung, d.h. es existieren $i_j, j = 1, \dots, n$ mit $K \subset \bigcup_{j=1}^n \Theta_{i_j}$.
- (b) K ist **folgenkompakt**, d.h. zu jeder Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset K$ existiert eine konvergente Teilfolge $x_{n_j} \rightarrow x \in K$ für $j \rightarrow \infty$.

Definition 3.4.3 A heißt **relativ kompakt** genau dann, wenn \bar{A} kompakt ist.

Im Folgenden sei $f \in L^p(\Omega)$ durch $f|_{(\mathbb{R}^n \setminus \Omega)} \equiv 0$ fortgesetzt.

Satz 3.4.4 (Fréchet–Kolmogorov).

Sei $p \in [1, \infty)$ und $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ sei offen und beschränkt. Dann gilt: $K \subset L^p(\Omega)$ ist relativ kompakt genau dann, wenn:

- (a) K beschränkt ($\exists C > 0$ mit $\|f\|_{L^p(\Omega)} \leq C$ für alle $f \in K$);
- (b) K ist im Mittel gleichgradig stetig, d.h. zu $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ mit

$$\left(|h| < \delta \implies \left(\int_{\Omega} |f(x+h) - f(x)|^p dx \right)^{1/p} < \varepsilon \text{ für alle } f \in K \right) .$$

Ist Ω unbeschränkt, wird zusätzlich

- (c) $\sup_{f \in K} \|f\|_{L^p(\Omega \setminus B_R(0))} \rightarrow 0 \quad (R \rightarrow \infty)$

benötigt.

Beweis: Siehe [Alt92], Satz 2.24.

Folgende stetige Einbettungen gelten trivialerweise:

$$L^p(\Omega) \hookrightarrow W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{2,p}(\Omega) \hookrightarrow \dots \quad (4.1)$$

d.h. z.B. $id: W^{1,p}(\Omega) \rightarrow L^p(\Omega)$ ist stetig (weil linear und beschränkt).

Damit folgt insbesondere

$$L^p(\Omega) \hookrightarrow W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow W_0^{2,p} \hookrightarrow \dots \quad (4.2)$$

Letztere Einbettungen sind aber nicht nur stetig, sondern sogar kompakt in folgendem Sinne:

Definition 3.4.5 Seien (X_i, τ_i) , $i = 1, 2$, topologische lineare Räume. Dann heißt ein linearer Operator $T: X_1 \rightarrow X_2$ **kompakt**, wenn er beschränkte Mengen in X_1 auf relativ kompakte Mengen in X_2 abbildet.

Satz 3.4.6 (Rellich)

Es sei $p \in [1, \infty)$ und $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ sei offen und beschränkt. Dann ist die Einbettung

$$W_0^{k+1,p}(\Omega) \hookrightarrow W_0^{k,p}(\Omega)$$

kompakt (d.h. id ist ein kompakter Operator).

Bemerkung 3.4.7 Insbesondere ist die Einheitskugel von $W_0^{k+1,p}(\Omega)$,

$$B_1(0) := \left\{ u \in W_0^{k+1,p}(\Omega) \mid \|u\|_{W^{k+1,p}(\Omega)} \leq 1 \right\} \subset W_0^{k,p}(\Omega)$$

in $W_0^{k,p}(\Omega)$ relativ kompakt.

Beweisidee: Man kann für $y \in \mathbb{R}^n$ beliebig und $|\alpha| \leq k$ zeigen $\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\right)$:

$$\left(\int_{\Omega} |d^\alpha u(x+y) - d^\alpha u(x)|^p dx \right)^{1/p} \leq |y|_q \cdot \|u\|_{W^{k+1,p}(\Omega)} \quad \text{für alle } u \in W_0^{k+1,p}(\Omega). \quad (4.3)$$

Setze $\mathcal{M} := \left\{ u \in W_0^{k+1,p}(\Omega) : \|u\|_{k+1,p} \leq 1 \right\}$. Dann ist für $|\alpha| \leq k$

$$\mathcal{M}_\alpha := \left\{ d^\alpha u \in L^p(\Omega) : u \in \mathcal{M} \right\}$$

in $L^p(\Omega)$ beschränkt und im Mittel gleichgradig stetig (wegen (4.3)), also mit Fréchet–Kolmogorov relativ kompakt. Damit folgt leicht, dass \mathcal{M} folgenkompakt ist.

□

Weiteres Ziel: Einbettung von $W^{k,p}(\Omega)$ in Räume stetiger Funktionen.

Für $\Omega = (a, b) \subset \mathbb{R}^1$ gilt

$$W^{k+1,p}(a, b) \subset C^k[a, b],$$

in dem Sinne, dass zu jeder Äquivalenzklasse $u \in W^{k+1,p}(a, b)$ ein Repräsentant $\tilde{u} \in C^k[a, b]$ gefunden werden kann. Darüber hinaus gilt der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung in der schwachen Form:

$$\tilde{u}(y) - \tilde{u}(x) = \int_x^y du(\xi) d\xi \quad \text{für alle } u \in W^{1,p}(a, b) \quad \text{und} \quad a \leq x < y \leq b. \quad (4.4)$$

Für allgemeines $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ hat man einen Verlust von $\lceil \frac{n}{p} \rceil$ Ableitungen, statt nur einer für $n = 1$ (siehe unten).

Definition 3.4.8 Sei $\bar{B} \not\equiv 0$ eine abgeschlossene Kugel im \mathbb{R}^n und

$$\mathcal{C}_0 = \{\lambda x : x \in \bar{B}, \lambda \geq 0\} \cap \bar{B}_R(0)$$

eine Kegel mit Spitze in 0 und Höhe R . Eine offene Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ genügt der **Kegelbedingung**, falls zu jedem $x_0 \in \Omega$ ein **zu einem festen \mathcal{C}_0 kongruenter Kegel** mit Spitze in x_0 existiert, welcher ganz in Ω liegt.

Satz 3.4.9 (Sobolev, 1938)

Sei $p \in [1, \infty)$ und $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, sei offen und genüge der Kegelbedingung. Ist $k > \frac{n}{p}$, so ist jedes Element $u \in W^{k,p}(\Omega)$ fast überall gleich einer stetigen Funktion \tilde{u} , welche auf Ω beschränkt ist. Das heißt

$$W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow C_B(\Omega),$$

wobei die Einbettung stetig ist:

$$\|\tilde{u}\|_{C_B(\Omega)} \leq K_0 \cdot \|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} \quad \text{für alle } u \in W^{k,p}(\Omega). \quad (4.5)$$

Die Konstante $K_0 = K_0(\mathcal{C}_0) > 0$ hängt nur von der Größe des Referenzkegels \mathcal{C}_0 aus Definition 3.4.8 ab.

Bemerkung 3.4.10 Im Grenzfall $\Omega = (a, b)$ gilt auch $W^{1,1}(a, b) \hookrightarrow C_B(a, b)$.

Beweisidee: Für $u \in C^\infty(\Omega) \cap W^{k,p}(\Omega)$ und $x_0 \in \Omega$ beliebig zeigt man

$$|u(x_0)| \leq K_0 \cdot \|u\|_{k,p,\mathcal{C}_{x_0}} \leq K_0 \cdot \|u\|_{k,p,\Omega},$$

wobei $\mathcal{C}_{x_0} \subset \Omega$ ein zu \mathcal{C}_0 kongruenter Kegel sei.

Die Aussage folgt dann mit Meyers und Serrin *Satz 3.3.11*.

□

Korollar 3.4.11 *Es sei $k - l > \frac{n}{p}$. Dann gilt für Ω , welche der Kegelbedingung genügen*

$$W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow C_B^l(\Omega).$$

Beweis: Anwendungen von Satz 3.4.9 auf alle Ableitungen bis zur Ordnung l .

Bemerkung 3.4.12 *Falls $k - l > \frac{n}{p}$ gilt für jedes $\Omega \subset \mathbb{R}^n$*

$$W_0^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow C_B^l(\Omega).$$

Beweisidee: Triviales Fortsetzen $u|_{\Omega^c} \equiv 0$ von $u \in W_0^{k,p}(\Omega)$ ergibt $W_0^{k,p}(\Omega) \subset W_0^{k,p}(\mathbb{R}^n)$.

Da \mathbb{R}^n der Kegelbedingung genügt, folgt die Behauptung. □

Für die Anwendungen auf partielle Differentialgleichungen bräuchte man folgende Verschärfung des Sobolev'schen Satzes: $W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow C_B(\overline{\Omega})$. Ohne Zusatzbedingungen ist das aber nicht zu erwarten:

Beispiel 3.4.13 *Sei $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$, $\Omega_1 = (0, 1)^2$, $\Omega_2 = (1, 2) \times (0, 1)$.*

Damit ist $\overline{\Omega} = [0, 2] \times [0, 1]$. Für

$$u(x) = \begin{cases} 1, & x \in \Omega_1 \\ 0, & x \in \Omega_2 \end{cases}$$

gilt $u \in C^\infty(\Omega) \cap W^{k,p}(\Omega)$ für jedes $k \in \mathbb{N}_0$, $p \geq 1$. Trotzdem ist $u \notin C_B(\overline{\Omega})$.

Definition 3.4.14 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ sei offen. Ω hat die **Segmenteigenschaft**, falls zu jedem $x \in \partial\Omega$ ein offenes $U \ni x$ und ein Vektor $y_x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ existiert, so dass

$$z + ty_x \in \Omega \quad \text{für alle } t \in (0, 1) \quad \text{und für alle } z \in U \cap \overline{\Omega}.$$

Sofern Ω die Segmenteigenschaft erfüllt, darf Ω nicht auf beiden Seiten von $\partial\Omega$ liegen. Anders ausgedrückt: jedes Randsegment lässt sich ins Innere von Ω verschieben. In *Beispiel 3.4.13* gilt das nicht.

Satz 3.4.15 (Agmon)

Hat $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ die Segmenteigenschaft, so ist $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)|_\Omega$ dicht in $W^{k,p}(\Omega)$ für $1 \leq p < \infty$.

Korollar 3.4.16 *Hat $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ die Segmenteigenschaft und erfüllt Ω zusätzlich die Kegelbedingung, so gilt für $1 \leq p < \infty$*

$$W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow C_B^l(\overline{\Omega}), \quad \text{sofern } k - l > \frac{n}{p},$$

mit stetiger Einbettung. Das heißt, es existiert ein $K_0 > 0$, so dass zu jedem $u \in W^{k,p}(\Omega)$ ein $\tilde{u} \in C_B^l(\overline{\Omega})$ mit $u = \tilde{u}$ fast überall in $\overline{\Omega}$ existiert und

$$\|\tilde{u}\|_{C_B^l(\overline{\Omega})} \leq K_0 \cdot \|u\|_{W^{k,p}(\Omega)}. \quad (4.6)$$

3.5 Randwerte von $W_0^{k,p}$ -Funktionen

Offenbar impliziert $u \in C_0^\infty(\Omega)$, dass $u = 0$ auf $\partial\Omega$. Es stellt sich die Frage, inwiefern dies für $u \in W_0^{k,p}(\Omega) = cl_{\|\cdot\|_{k,p,\Omega}}(C_0^\infty(\Omega))$ immer noch gilt?

Da $\partial\Omega$ eine Nullmenge ist, ist diese Frage nur dann sinnvoll, wenn zusätzlich $u \in C(\bar{\Omega})$ bekannt ist!

Definition 3.5.1 $\Omega, \tilde{\Omega}$ seien offen in \mathbb{R}^n .

$\varphi: \Omega \rightarrow \tilde{\Omega}$ heißt **k -Diffeomorphismus**, falls φ Homöomorphismus und $D^\alpha\varphi \in C_B(\Omega)$, $D^\alpha\varphi^{-1} \in C_B(\tilde{\Omega})$ für alle $1 \leq |\alpha| \leq k$ ist.

Abgeschlossene Mengen A und \tilde{A} heißen k -diffeomorph, falls $A \subset \Omega$, $\tilde{A} \subset \tilde{\Omega}$, $\Omega, \tilde{\Omega}$ offen und k -diffeomorph vermöge φ sind mit $\varphi(A) = \tilde{A}$.

Da $k \geq 1$, existieren Konstanten $c_1, c_2 > 0$, so dass

$$\begin{aligned} c_1 &\leq |\det D\varphi(x)| \leq c_2, & x \in \Omega \\ c_1 &\leq |\det D\varphi^{-1}(y)| \leq c_2, & y \in \tilde{\Omega} \end{aligned} \tag{5.1}$$

gilt.

Satz 3.5.2 Ω und $\tilde{\Omega}$ seien k -diffeomorph ($k \geq 1$) und $p \in [1, \infty)$.

Dann sind die Banachräume $W^{k,p}(\Omega)$ und $W^{k,p}(\tilde{\Omega})$ vermöge

$$\begin{aligned} T: W^{k,p}(\Omega) &\longrightarrow W^{k,p}(\tilde{\Omega}) \\ u(\cdot) &\longmapsto u(\varphi^{-1}(\cdot)) = (Tu)(\cdot) \end{aligned}$$

algebraisch und topologisch isomorph, d.h. T ist bijektiv und sowohl T , als auch T^{-1} sind stetig.

Sonderfall: $k = 0$. Hier ist $L^p(\Omega) \cong L^p(\tilde{\Omega})$, sofern Ω und $\tilde{\Omega}$ 1-diffeomorph sind.

Beweisidee: T ist offenbar linear und bijektiv. Dass T bzw. T^{-1} auch stetig (beschränkt) ist, folgt aus der Kettenregel, der Transformationsformel und (5.1).

Zusatz: Sind $\bar{\Omega}$ und $\tilde{\Omega}$ k -diffeomorph vermöge φ und gilt $\varphi(\partial\Omega) = \partial\tilde{\Omega}$, so ist

$$T: W_0^{k,p}(\Omega) \longrightarrow W_0^{k,p}(\tilde{\Omega})$$

algebraischer und topologischer Isomorphismus.

Definition 3.5.3 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ sei offen. Ω hat einen Rand $\partial\Omega$ von der Klasse C^k , $k \geq 1$, falls zu jedem $x \in \partial\Omega$ eine offene Umgebung $U \ni x$ existiert, so dass $\bar{U} \cap \bar{\Omega}$ k -diffeomorph zur abgeschlossenen Halbkugel $\bar{B}_1^+(0) = \{x \in \mathbb{R}^n, |x| \leq 1, x_n \geq 0\}$ ist. Dabei soll gelten:

$$\begin{aligned} \varphi(U \cap \partial\Omega) &= \{x \in \mathbb{R}^n, |x| < 1, x_n = 0\} \\ \varphi(\partial U \cap \Omega) &= \{x \in \mathbb{R}^n, |x| = 1, x_n > 0\}. \end{aligned}$$

Bemerkung 3.5.4 *Definition 3.5.3 sagt aus, dass der Rand lokal glatt gebogen werden kann.*

Hat Ω einen Rand der Klasse C^k mit $k \geq 1$, so folgt:

- (1) Ω hat die Segment-Eigenschaft
- (2) Ω erfüllt die Kegelbedingung, sofern Ω beschränkt ist.

Satz 3.5.5 *Es sei $u \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ für $1 \leq p < \infty$ und $\partial\Omega$ sei von der Klasse C^1 .*

Dann gilt:

$$u(x) = 0 \quad \text{für alle } x \in \partial\Omega.$$

Bemerkung 3.5.6 *In diesem Sinne erfüllen $W_0^{1,p}$ -Funktionen „schwache“ oder „verallgemeinerte“ Nullrandbedingungen.*

Satz 3.5.7 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ sei offen, beschränkt mit Rand von der Klasse C^1 .

Ist $u \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap W^{k,p}(\Omega)$ mit $1 \leq p < \infty$, $k > \frac{n}{p}$, so folgt:

$$u(x) = 0 \quad \text{für alle } x \in \partial\Omega.$$

Genauer gesagt gilt: In der Äquivalenzklasse von u gibt es ein $u \in C(\overline{\Omega})$, welches auf $\partial\Omega$ verschwindet.

Beweisidee: $W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow C_B(\overline{\Omega}) = C(\overline{\Omega})$ für $k > \frac{n}{p}$.

Satz 3.5.8 *Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $u \in W_0^{k,p}(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$, $k > \frac{n}{p}$. Dann gilt:*

$$u|_{\partial\Omega} \equiv 0.$$

Im allgemeinen haben $W^{1,p}(\Omega)$ Funktionen natürlich keine „vernünftigen“ Randwerte ($\partial\Omega = \text{Nullmenge}$). Trotzdem lässt sich etwas machen:

Satz 3.5.9 (Spuroperator)

Es $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt mit $\partial\Omega$ von der Klasse C^1 , $p \in [1, \infty)$.

Dann existiert ein beschränkter linearer Operator

$$S: W^{1,p}(\Omega) \longrightarrow L^p(\partial\Omega)$$

mit

- (i) $Su = u|_{\partial\Omega}$ für alle $u \in C^1(\overline{\Omega})$
- (ii) $\|Su\|_{L^p(\partial\Omega)} \leq C \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$ für alle $u \in W^{1,p}(\Omega)$, wobei $C = C(p, \Omega)$.
Su heißt die „Spur von u auf $\partial\Omega$ “.

Beweisidee: Zunächst zeigt man

$$\|u|_{\partial\Omega}\|_{L^p(\partial\Omega)} \leq C \cdot \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} \quad \text{für alle } u \in C^1(\overline{\Omega})$$

und verallgemeinert diese Abschätzung anschließend mit Approximation durch $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ -Funktionen (Satz von Agmon) auf $W^{1,p}(\Omega)$ -Funktionen.

Satz 3.5.10 Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt mit $\partial\Omega$ von der Klasse C^1 und $u \in W^{1,p}(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$. Dann gilt:

$$u \in W_0^{1,p}(\Omega) \iff Su = 0 \in L^p(\partial\Omega).$$

Beweisidee: Durch Approximation mit $C_0^\infty(\Omega)$ -Funktionen und mit Satz 3.5.9.

Satz 3.5.11 (Erweiterung von $W^{1,p}(\Omega)$ -Funktionen)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt mit $\partial\Omega$ von der Klasse C^1 . V sei so gewählt, dass $\Omega \subset\subset V$. Dann existiert ein beschränkter linearer Operator

$$E: W^{1,p}(\Omega) \longrightarrow W^{1,p}(\mathbb{R}^n),$$

so dass für alle $u \in W^{1,p}(\Omega)$ gilt:

- (a) $Eu = u$ fast überall in Ω .
- (b) $\text{supp } Eu \subset\subset V$.
- (c) $\|Eu\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \leq C \cdot \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$ wobei $C = C(p, \Omega, V)$.
- (d) $E|_{\widehat{C}^{1,p}(\Omega)} \longrightarrow \widehat{C}^{1,p}(\mathbb{R}^n)$.

Beweis: Evans [Eva10], S. 270.

3.6 Differenzenquotienten

Definition 3.6.1 Für $h \neq 0$ heißt

$$\nabla_h u(x) = \nabla_{h,i} u(x) = \frac{u(x + he_i) - u(x)}{h}$$

Differenzenquotient in Richtung $e_i \in \mathbb{R}^n$.

Lemma 3.6.2 Sei $u \in W^{1,p}(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$. Dann gilt:

$$\nabla_{h,i} u \in L^p(\Omega') \quad \text{für alle } \Omega' \subset\subset \Omega \quad \text{mit } 0 < |h| < \text{dist}(\Omega', \partial\Omega)$$

und

$$\|\nabla_{h,i} u\|_{L^p(\Omega')} \leq \|d_i u\|_{L^p(\Omega)}.$$

Eine Art Umkehrung gilt auch:

Lemma 3.6.3 Sei $u \in L^p(\Omega)$, $1 < p < \infty$, und $\nabla_{h,i} u \in L^p(\Omega')$, $\|\nabla_{h,i} u\|_{L^p(\Omega')} \leq K$ für alle $0 < |h| < \text{dist}(\Omega', \partial\Omega)$ und für alle $\Omega' \subset\subset \Omega$. Dann existiert die schwache Ableitung $d_i u$ in $L^p(\Omega)$ und

$$\|d_i u\|_{L^p(\Omega)} \leq K.$$

3.7 Die Poincaré-Ungleichung

Für $u \in W^{k,p}(\Omega)$ bzw. $u \in W_0^{k,p}(\Omega)$ suchen wir eine Abschätzung der Form

$$\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)}^p \leq C \cdot \sum_{|\alpha|=k} \|d^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}^p + ?,$$

d.h. im Wesentlichen eine Abschätzung durch die höchsten Ableitungen.

Definition 3.7.1 Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt. Ω_i , $i \in I$, bezeichne die Zusammenhangskomponenten von Ω . Wir setzen für $k \geq 1$

$$\mathcal{P}_{k-1} := \left\{ q: \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid q|_{\Omega_i} \text{ ist Polynom vom Höchstgrad } \leq k-1 \right\} \subset W^{k,p}(\Omega).$$

Sei $\Gamma_{k-1} := \{f_1, \dots, f_{\ell^*}\} \subset (W^{k,p}(\Omega))'$ derart, dass

$$v \in \mathcal{P}_{k-1}, \quad \sum_{i=1}^{\ell^*} |f_i(v)| = 0 \implies v = 0 \quad (7.1)$$

Beispiel 3.7.2

$$f_\alpha(u) = \int_{\Omega} d^\alpha u \, dx, \quad |\alpha| \leq k-1.$$

Satz 3.7.3 Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt und habe die Segmenteigenschaft. Sei $1 < p < \infty$, $k \geq 1$ und Γ_{k-1} erfülle (7.1). Dann ist

$$[u] = [u]_{k,p} := \left(\sum_{|\alpha|=k} \|d^\alpha u\|_p^p + \sum_{i=1}^{\ell^*} |f_i(u)|^p \right)^{1/p}$$

auf $W^{k,p}(\Omega)$ eine zu $\|\cdot\|_{W^{k,p}(\Omega)}$ äquivalente Norm.

Korollar 3.7.4 (verallgemeinerte Friedrichs–Ungleichung)

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ sei offen, beschränkt und zusammenhängend, $\partial\Omega$ Klasse C^1 , $\Gamma \subset \partial\Omega$ mit $\mu_{n-1}(\Gamma) > 0$, $1 < p < \infty$ und $k \geq 1$. Dann existiert $C > 0$ mit

$$\|u\|_{k,p,\Omega} \leq C \cdot \left(\sum_{|\alpha|=k} \|d^\alpha u\|_p^p + \sum_{|\alpha| \leq k-1} \left| \int_\Gamma d^\alpha u \, dS(x) \right|^p \right)^{1/p} \quad \text{für alle } u \in W^{k,p}(\Omega).$$

Bemerkung: Das Korollar bleibt richtig, falls Ω nicht zusammenhängend, aber

$$\mu_{n-1}(\Gamma \cap \partial\Omega_i) > 0$$

für alle Zusammenhangskomponenten Ω_i von Ω .

Korollar 3.7.5 (Poincaré–Ungleichung in $W_0^{k,p}(\Omega)$)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt mit Rand von der Klasse C^1 , $1 < p < \infty$, $k \geq 1$. Dann ist

$$|u|_{k,p,\Omega} := \left(\sum_{|\alpha|=k} \|d^\alpha u\|_p^p \right)^{1/p} \quad (7.2)$$

auf $W_0^{k,p}(\Omega)$ eine zu $\|\cdot\|_{W^{k,p}(\Omega)}$ äquivalente Norm.

Bemerkung: Die Aussage von Korollar 3.7.5 bleibt auch richtig, wenn $\partial\Omega$ nicht glatt ist.

Korollar 3.7.6 Sei $1 < p < \infty$, $k \geq 1$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt, zusammenhängend und erfülle die Segmenteigenschaft. Dann gilt: zu $\Omega^* \subset \Omega$ mit $\mu(\Omega^*) > 0$ existiert ein $C > 0$ mit

$$\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} \leq C \left(\sum_{|\alpha|=k} \|d^\alpha u\|_p^p + \sum_{|\alpha| \leq k-1} \left| \int_{\Omega^*} d^\alpha u \, dx \right|^p \right)^{1/p} \quad \text{für alle } u \in W^{k,p}(\Omega).$$

Bemerkung 3.7.7 Das obige Korollar bleibt richtig, falls Ω nicht zusammenhängend ist, sofern wir $\mu(\Omega^* \cap \Omega_i) > 0$ für alle Zusammenhangskomponenten Ω_i von Ω fordern.

Korollar 3.7.8 Sei p und Ω wie in Korollar 3.7.6, dann ist

$$V := \left\{ v \in W^{1,p}(\Omega) : \int_\Omega v \, dx = 0 \right\}$$

mit der Norm $\|u\|_V := |u|_{1,p,\Omega}$ aus (7.2) ein Banachraum.

Korollar 3.7.9 Sei Ω beschränkt und offen, $1 < p < \infty$. Dann gilt:

$$W_0^{k,p}(\Omega) \subsetneq W^{k,p}(\Omega) \quad \text{für alle } k \geq 1.$$

Bemerkung 3.7.10 Für $\Omega = \mathbb{R}^n$ gilt $W_0^{k,p}(\mathbb{R}^n) = W^{k,p}(\mathbb{R}^n)$.

Kapitel 4

Elliptische Differentialgleichungen zweiter Ordnung

4.1 Elliptizität und schwacher Lösungsbegriff

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt. Wir untersuchen zunächst das **Dirichlet–Randwertproblem**

$$\begin{aligned} Lu &= f & \text{in } \Omega \subset \mathbb{R}^n \\ u &= g & \text{auf } \partial\Omega \end{aligned} \tag{1.1}$$

mit $g: \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$. $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben. $u: \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ wird gesucht.

Definition 4.1.1 *L sei ein linearer Differentialoperator 2ter Ordnung, entweder in Divergenzform*

$$Lu = - \sum_{i,j=1}^n (a_{ij}(x) u_{x_i})_{x_j} + \sum_{i=1}^n b_i(x) u_{x_i} + c(x) \cdot u \tag{1.2}$$

oder in Normalform

$$Lu = - \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^n b_i(x) u_{x_i} + c(x) \cdot u, \tag{1.3}$$

wobei $a_{ij}, b_i, c: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ gegebene Koeffizientenfunktionen sind. Wir wollen jeweils symmetrische Koeffizienten annehmen:

$$a_{ij} = a_{ji}, \quad 1 \leq i, \quad j \leq n. \tag{1.4}$$

Bemerkung 4.1.2 *Sind die Koeffizienten a_{ij} , sämtlich C^1 -Funktionen, so läßt sich (1.4) jeweils erreichen. Auch Divergenzform und Normalform lassen sich jeweils ineinander überführen.*

Definition 4.1.3 Die Differentialoperatoren aus (1.2) und (1.3) mit symmetrischen Koeffizienten a_{ij} (1.4) heißen **gleichmäßig elliptisch**, falls ein $\Theta > 0$ existiert, so dass

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \geq \Theta |\xi|^2 \quad \text{für alle } x \in \Omega, \xi \in \mathbb{R}^n. \quad (EL)$$

Der Prototyp eines gleichmäßig elliptischen Operators ist natürlich $L = -\Delta$. Operatoren mit der Eigenschaft (EL) heißen oft auch gleichmäßig stark elliptisch. Aus Notationsgründen hat der Hauptteil von L jetzt im Gegensatz zu Kapitel 2 ein negatives Vorzeichen (vgl. Annahme 2.1.1).

In Folgendem sei L immer in Divergenzform.

Annahme 4.1.4

$$\begin{aligned} a_{ij}, b_i, c &\in L^\infty(\Omega), \quad 1 \leq i, j \leq n \\ f &\in L^2(\Omega), \\ g &\in H^2(\Omega). \end{aligned}$$

Offenbar gilt: u ist Lösung von (1.1) $\iff \hat{u} := u - g$ ist Lösung von

$$\begin{cases} L\hat{u} = f - Lg & \text{in } \Omega \\ \hat{u} = 0 & \text{auf } \partial\Omega. \end{cases}$$

Da aber $\hat{f} = f - Lg \in L^2(\Omega)$, können wir o.B.d.A. in (1.1) $g = 0$ annehmen.

Schwache Lösungen: Jede Lösung von (1.1) mit L aus (1.2) erfüllt

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left[\sum_{i,j=1}^n a_{ij} u_{x_i} \varphi_{x_j} + \sum_{i=1}^n b_i u_{x_i} \varphi + c u \varphi \right] dx \\ = \int_{\Omega} f \varphi dx \quad \text{für alle } \varphi \in H_0^1(\Omega). \end{aligned} \quad (1.5)$$

Die gesuchte Funktion u werden wir wegen der Randwerte $g = 0$ ebenfalls in $H_0^1(\Omega)$ suchen.

Definition 4.1.5 Die Koeffizientenfunktionen seien wie in Annahme 4.1.4.

Die mit dem Divergenzoperator L aus (1.2) **assoziierte Bilinearform** ist dann definiert als

$$B(u, \varphi) := \int_{\Omega} \left[\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \cdot u_{x_i} \varphi_{x_j} + \sum_{i=1}^n b_i(x) u_{x_i} \varphi + c u \varphi \right] dx \quad \text{für } u, \varphi \in H^1(\Omega).$$

Definition 4.1.6 Wir sagen $u \in H_0^1(\Omega)$ ist **schwache Lösung** des Randwertproblems (1.1) mit $g = 0$, falls

$$B(u, \varphi) = \langle f, \varphi \rangle_{L^2(\Omega)} \quad \text{für alle } \varphi \in H_0^1(\Omega). \quad (1.6)$$

Um (1.6) zu lösen, verwenden wir von der rechten Seite $F(\varphi) := \langle f, \varphi \rangle_{L^2(\Omega)}$ nur, dass $F \in [H_0^1(\Omega)]'$.

Notation 4.1.7 (Dualraum von $H_0^1(\Omega)$) $H^{-1}(\Omega) := [H_0^1(\Omega)]'$. Wir schreiben

$$F(\varphi) = \langle F, \varphi \rangle \quad \text{für } F \in H^{-1}(\Omega) \quad \text{und } \varphi \in H_0^1(\Omega).$$

Norm auf $H^{-1}(\Omega)$:

$$\|F\|_{H^{-1}(\Omega)} := \sup_{\varphi \in H_0^1(\Omega), \|\varphi\|_{H^1(\Omega)} \leq 1} |\langle F, \varphi \rangle|.$$

Bemerkung 4.1.8 (Charakterisierung von $H^{-1}(\Omega)$):

Es gilt $F \in H^{-1}(\Omega) \iff$ es existieren $f^0, f^1, \dots, f^n \in L^2(\Omega)$ mit

$$\langle F, \varphi \rangle = \int_{\Omega} f^0 \varphi + \sum_{i=1}^n f^i \varphi_{x_i} dx \quad \text{für } \varphi \in H_0^1(\Omega). \quad (1.7)$$

Definition 4.1.9 Falls $u \in H_0^1(\Omega)$ eine Lösung von

$$B(u, \varphi) = \langle F, \varphi \rangle \quad \text{für alle } \varphi \in H_0^1(\Omega), \quad (1.8)$$

wobei $F \in H^{-1}(\Omega)$ durch (1.7) gegeben ist, dann sagen wir u ist **schwache Lösung (im Distributionssinne)** von

$$\begin{cases} Lu = f^0 - \sum_{i=1}^n f_{x_i}^i & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{auf } \partial\Omega. \end{cases} \quad (1.9)$$

4.2 Existenz schwacher Lösungen des Dirichlet–Problems

Ziel ist es, den Satz von Lax–Milgram anzuwenden.

Satz 4.2.1 (Lax–Milgram)

Sei $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein Hilbertraum und $D: H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ bilinear, so dass $\alpha, \beta > 0$ existieren mit

- (i) $|D(u, v)| \leq \alpha \|u\| \cdot \|v\|$ für alle $u, v \in H$ (Stetigkeit)
- (ii) $\beta \|u\|^2 \leq D(u, u)$ für alle $u \in H$ (positiv definit).

Dann existiert für jedes $F \in H' = \mathcal{L}(H, \mathbb{R})$ genau ein $u = u_F \in H$ mit

$$D(u_F, \varphi) = F(\varphi) \quad \text{für alle } \varphi \in H.$$

Zusatz: Der Lösungsoperator $T: F \rightarrow u_F, H' \rightarrow H$ ist stetig, linear und bijektiv, also ein Isomorphismus.

$$\|T(F)\|_H = \|u_F\|_H \leq C \|F\|_{H'}.$$

Literatur: [Alt92], S. 118.

Im Gegensatz zum Satz von Riesz braucht D hier keine Symmetrie.

Wir wollen diesen Satz im Wesentlichen auf die Bilinearform B anwenden:

$$B(u, \varphi) = \int_{\Omega} \left[\sum_{i,j=1}^n a_{i,j}(x) u_{x_i} \varphi_{x_j} + \sum_{i=1}^n b_i(x) u_{x_i} \varphi + c u \varphi \right] dx$$

Satz 4.2.2 Sei L gleichmäßig elliptisch, in Divergenzform und mit Koeffizienten gemäß Annahme 4.1.4. Dann existieren Konstanten $\alpha, \beta > 0$ und $\gamma > 0$ mit

- (i) $|B(u, v)| \leq \alpha \|u\|_{H^1(\Omega)} \cdot \|v\|_{H^1(\Omega)}$ für alle $u, v \in H^1(\Omega)$

und

- (ii) $\beta \|u\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq B(u, u) + \gamma \cdot \|u\|_{L^2(\Omega)}^2$ für alle $u \in H^1(\Omega)$.

Dabei ist $\beta = \frac{\Theta}{2}$ und γ ist von der Form $\gamma = \frac{\Theta}{2} + C^*$ mit Θ aus Definition 4.1.3 und $C^* = C^*(b_i, c^-, \Theta) \geq 0$ hängt nur von den b_i, Θ und $c^- = \min\{0, c\}$ ab mit $C^*(0, 0, \Theta) = 0$.

Zusatz zu Satz 4.2.2 Ist Ω beschränkt, lässt sich (ii) für $u \in H_0^1(\Omega)$ verschärfen. Es gilt die **Garding'sche Ungleichung**

$$(ii)' \quad \beta \|u\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq B(u, u) + \underbrace{C^*(b_i, c^-, \Theta)}_{=: \gamma' \geq 0} \int_{\Omega} u^2 dx \quad \text{für alle } u \in H_0^1(\Omega),$$

wobei $\beta = \frac{\Theta}{2} / (1 + \hat{c}) > 0$ mit $\hat{c} > 0$ aus der Poincaré–Ungleichung.

Als Spezialfall hat man damit für $b_i = 0$, $i = 1, \dots, n$ und $c \geq 0$

$$(ii)'' \quad \beta \|u\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq B(u, u) \quad \text{für alle } u \in H_0^1(\Omega),$$

d.h. B ist positiv definit oder $H_0^1(\Omega)$ -elliptisch.

Satz 4.2.3 (Existenz schwacher Lösungen des Dirichlet-Problems)

Unter den Voraussetzungen an L gemäß Satz 4.2.2 und Ω beschränkt existiert eine Konstante $\gamma \geq 0$, so dass für alle

$$\mu \geq \gamma \tag{2.1}$$

und für alle $f \in L^2(\Omega)$ eine eindeutige schwache Lösung $u \in H_0^1(\Omega)$ des Randwertproblems (vgl. Definition 4.1.6):

$$\begin{aligned} Lu + \mu u &= f && \text{in } \Omega \\ u &= 0 && \text{auf } \partial\Omega \end{aligned} \tag{2.2}$$

existiert. Das heißt, es gilt

$$D_\mu(u, v) := B(u, v)_{L^2} + \mu \langle u, v \rangle_{L^2} = \langle f, v \rangle_{L^2} \quad \text{für alle } v \in H_0^1(\Omega).$$

Beweisidee: Mit Lax–Milgram.

□

Bemerkung 4.2.4 Analog lässt sich für

$$f^i \in L^2(\Omega), \quad i = 0, \dots, n,$$

die Existenz und Eindeutigkeit einer schwachen Lösung u (im Distributionssinne) von

$$\begin{aligned} Lu + \mu u &= f^0 - \sum_{i=1}^n f_{x_i}^i && \text{in } \Omega \\ u &= 0 && \text{auf } \partial\Omega \end{aligned} \tag{2.3}$$

für $\mu \geq \gamma$ zeigen (vgl. Definition 4.1.9).

Dafür genügt es zu zeigen, dass

$$F(\varphi) = \int_{\Omega} f^0 \varphi \, dx + \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n f^i \varphi_{x_i} \, dx \tag{2.4}$$

ebenso $F \in [H_0^1(\Omega)]' = H^{-1}(\Omega)$ erfüllt. Dies ist der Fall und in der Form (2.4) hat man tatsächlich alle $F \in (H_0^1(\Omega))'$ erfasst (vgl. Bemerkung 4.1.8).

Korollar 4.2.5 Der schwache Lösungsoperator von (2.3)
(eigentlich von $D_\mu(u, \varphi) = F(\varphi)$ für alle $\varphi \in H_0^1(\Omega)$) für $\mu \geq \gamma$.

$$(L_\mu)^{-1} = \text{„}(L + \mu I)^{-1}\text{“}: H^{-1}(\Omega) \longrightarrow H_0^1(\Omega)$$

$$F \longmapsto u_F$$

ist linear, stetig und bijektiv, also ein **Isomorphismus**. Insbesondere gilt also

$$\|u_F\|_{H_0^1(\Omega)} = \|(L + \mu I)^{-1}F\|_{H_0^1(\Omega)} \leq \text{const}(\mu) \cdot \|F\|_{H^{-1}(\Omega)} \quad (\text{a priori Abschätzung}).$$

Beispiel 4.2.6 Betrachte für beschränktes Ω

$$Lu = - \sum_{i,j=1}^n (a_{ij} u_{x_i})_{x_j} + cu$$

mit $c \geq 0$ in Ω . Dann gilt nach **Zusatz zu Satz 4.2.2** die Garding'sche Ungleichung

$$\beta \|u\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq B(u, u) \quad \text{für alle } u \in H_0^1(\Omega),$$

mithin also $\gamma = 0$ in **(ii)** von Satz 4.2.2.

Somit hat

$$\begin{aligned} Lu + \mu u &= f && \text{in } \Omega \\ u &= 0 && \text{auf } \partial\Omega \end{aligned} \tag{2.5}$$

für alle $\mu \geq 0$ und $f \in L^2(\Omega)$ genau eine schwache Lösung $u = u_f \in H_0^1(\Omega)$.

Insbesondere hat mit $L = -\Delta$

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f && \text{in } \Omega \\ u &= 0 && \text{auf } \partial\Omega, \end{aligned}$$

für alle $f \in L^2(\Omega)$ genau eine schwache Lösung $u \in H_0^1(\Omega)$.

Für $\mu < 0$ kann sowohl Existenz, also auch Eindeutigkeit in (2.5) fehlen. Etwa

$$\begin{aligned} -\Delta u - nu &= 0 && \text{in } [0, \pi]^n \\ u &= 0 && \text{auf } \partial[0, \pi]^n \end{aligned} \quad \text{hat Lösungen } u(x) = \alpha \prod_{i=1}^n \sin(x_i), \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Frage: Können wir aus den schwachen Lösungen tatsächlich klassische Lösungen erhalten? Dabei auftretende Probleme sind

(i) Randwerte: Ist $u|_{\partial\Omega} = 0$?

(ii) Regularität: Gilt tatsächlich $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$?

Falls man diese Probleme lösen kann, bekommt man tatsächlich klassische Lösungen. Dazu: Die schwache Lösung u erfüllt

$$D_\mu(u, \varphi) = \langle f, \varphi \rangle_{L^2} \quad \text{für alle } \varphi \in C_0^\infty(\Omega) \subset H_0^1(\Omega).$$

Mittels partieller Integration erhält man

$$\int_{\Omega} (Lu + \mu u - f) \cdot \varphi \, dx = 0 \quad \text{für alle } \varphi \in C_0^\infty(\Omega),$$

d.h.

$$Lu + \mu u = f \quad \text{in } L^2(\Omega), \tag{2.6}$$

da $C_0^\infty(\Omega)$ dicht in $L^2(\Omega)$ ist.

Falls $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ gilt (2.6) in $C(\Omega)$.

Auch ohne Regularität erhält man aber in jedem Fall:

Korollar 4.2.7 *Jede klassische Lösung von (2.2) mit $\mu \geq \gamma$ gemäß Satz 4.2.3 ist eindeutig.*

Beweis: Jede klassische Lösung ist natürlich auch schwache Lösung, welche aber eindeutig waren.

□

4.3 Schwache Lösungen des Neumann–Problems

Wir müssen zuerst einen schwachen Lösungsbegriff herleiten. Sei wieder L in Divergenzform und gleichmäßig elliptisch. Mit

$$Ru(x) := - \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) u_{x_i}(x) \cdot \nu_j(x) \quad \text{für } x \in \partial\Omega \tag{3.1}$$

bezeichnen wir den **natürlichen Randoperator**, wobei $\nu = \nu(x)$, $x \in \partial\Omega$ das äußere Normalenfeld ist. $\partial\Omega$ sei in diesem Paragraph von der Klasse C^1 und Ω beschränkt. Wir suchen Lösungen des **inhomogenen „Neumann“-Problems** (auch **natürliches Randwertproblem**)

$$\begin{aligned} Lu &= f && \text{in } \Omega \\ Ru &= h \cdot u + \psi && \text{auf } \partial\Omega. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Neben $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ sind auch $h, \psi: \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben.

Beispiel 4.3.1 Falls $a_{ij} = \delta_{ij}$ ist $Ru = -\frac{\partial u}{\partial \nu}$ die Normalenableitung.

Multiplikation der Differentialgleichung in (3.2) mit Testfunktionen $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)|_{\bar{\Omega}}$ und Integration liefert

$$\tilde{B}(u, \varphi) = \tilde{F}(\varphi) \quad \text{für alle } \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)|_{\Omega}, \quad (3.3)$$

wobei

$$\tilde{B}(u, \varphi) := B(u, \varphi) + \int_{\partial\Omega} h \cdot u \cdot \varphi \, d\sigma$$

und

$$\tilde{F}(\varphi) := \int_{\Omega} f \cdot \varphi \, dx - \int_{\partial\Omega} \psi \cdot \varphi \, d\sigma.$$

Annahme 4.3.2 Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt mit C^1 -Rand und L gemäß Definition 4.1.3 gleichmäßig elliptisch, $f \in L^2(\Omega)$, $\psi \in L^2(\partial\Omega)$ und $h \in L^\infty(\partial\Omega)$.

Lemma 4.3.3 Unter der Annahme 4.3.2 ist wohldefiniert: $\tilde{B}: H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ (bilinear) und $\tilde{F}: H^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ (linear). Insbesondere gilt (3.3) für alle $\varphi \in H^1(\Omega)$.

Definition 4.3.4 Wir sagen $u \in H^1(\Omega)$ heißt **schwache Lösung** des natürlichen Randwertproblems (3.2), falls

$$\tilde{B}(u, \varphi) = \tilde{F}(\varphi) \quad \text{für alle } \varphi \in H^1(\Omega)$$

gilt.

Satz 4.3.5 Sei Annahme 4.3.2 und $h \geq 0$ erfüllt. Dann existiert ein $\gamma > 0$, so dass für alle $\mu \geq \gamma$ das Randwertproblem

$$\begin{aligned} L_\mu u &:= Lu + \mu u = f && \text{in } \Omega \\ Ru &= h \cdot u + \psi && \text{auf } \partial\Omega \end{aligned} \quad (3.4)$$

genau eine schwache Lösung $u = u_{f,h,\psi} \in H^1(\Omega)$ hat.

Beweisidee: Anwendung von Lax–Milgram auf

$$\tilde{D}_\mu(u, \varphi) := \tilde{B}(u, \varphi) + \mu \cdot \langle u, \varphi \rangle_{L^2(\Omega)} \quad \text{für } u, \varphi \in H^1(\Omega)$$

für $\mu \geq \gamma$, wobei γ aus Satz 4.2.2 ist.

□

Bemerkung 4.3.6 Die schwache Formulierung der Randwertaufgabe (3.4) ist:
Finde $u \in H^1(\Omega)$, so dass

$$\tilde{D}_\mu(u, \varphi) = \tilde{F}(\varphi) \quad \text{für alle } \varphi \in H^1(\Omega). \quad (3.5)$$

Bleibt die Frage, ob schwache Lösungen, die hinreichend regulär sind, auch klassische Lösungen von (3.4) sind?

Das ist tatsächlich so! Sei dazu $a_{ij} \in C^1(\overline{\Omega})$, $b_i, c \in C(\Omega)$, $h, \psi \in C(\partial\Omega)$ und $f \in C(\Omega)$. Ist dann $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ eine reguläre schwache Lösung gemäß (3.5), dann gilt

$$B(u, \varphi) + \int_{\partial\Omega} h S u S \varphi d\sigma + \mu \langle u, \varphi \rangle_{L^2(\Omega)} = \langle f, \varphi \rangle_{L^2(\Omega)} - \int_{\partial\Omega} \psi S \varphi d\sigma \quad \text{für alle } \varphi \in H^1(\Omega), \quad (3.6)$$

wobei $S: H^1(\Omega) \rightarrow L^2(\partial\Omega)$ der Spuroperator aus Satz 3.5.9 ist.

1. Für Testfunktionen $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ liefert (3.6) $\langle Lu + \mu u, \varphi \rangle_{L^2(\Omega)} = \langle f, \varphi \rangle_{L^2(\Omega)}$ und damit

$$Lu + \mu u = f \quad \text{in } L^2(\Omega). \quad (3.7)$$

2. Testet man (3.6) mit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)|_{\overline{\Omega}}$ und verwendet (3.7) erhält man die Randwerte:

$$\int_{\partial\Omega} (-\sum a_{ij} u_{x_i} \nu_j) \cdot \varphi d\sigma = \int_{\partial\Omega} (h \cdot u + \psi) \cdot \varphi d\sigma \quad \text{für alle } \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)|_{\Omega}$$

und damit $Ru = hu + \psi$ in $L^2(\partial\Omega)$.

Korollar 4.3.7 Jede reguläre schwache Lösung von (3.4) ist auch klassische Lösung.

Bemerkung 4.3.8 Der Randoperator R aus (3.1) heißt **natürlicher Randoperator** (homogene natürliche Randbedingung $Ru = 0$), weil sich diese Randbedingungen einstellen, **ohne** in den Funktionenraum mit aufgenommen werden zu müssen (schwache Lösungen liegen in $H^1(\Omega)$, im Gegensatz zu $H_0^1(\Omega)$ bei Nullrandwerten).

Bemerkung 4.3.9 Für $u \in H^1(\Omega)$ (schwache Lösung von (3.4)) ist $d_{x_i} u \in L^2(\Omega)$, was zu wenig ist für vernünftige Randwerte. Ru macht also ohne Regularität gar keinen Sinn!

Neben Dirichlet- bzw. Neumann–Randwertproblemen treten in den Anwendungen auch oft **gemischte Randwerte** auf (sogenanntes **Robin–Problem**).

Beispiel 4.3.10 (Robin–Problem — gemischte Randwerte)

Wir betrachten zum Beispiel die Randwertaufgabe

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f && \text{in } \Omega \\ u &= 0 && \text{auf } \Gamma \\ -\frac{\partial u}{\partial \nu} &= \psi && \text{auf } \partial\Omega \setminus \Gamma, \end{aligned}$$

für $\emptyset \neq \Gamma \subset \partial\Omega$, $\psi \in L^2(\partial\Omega)$. Die schwache Formulierung lautet:

Suche $u \in H_{\Gamma}^1(\Omega) = cl_{\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}}[C_0^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \Gamma)|_{\Omega}]$, so dass

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \varphi \, dx = \int_{\Omega} f \cdot \varphi \, dx - \int_{\partial\Omega \setminus \Gamma} \psi S\varphi \, d\sigma \quad \text{für alle } \varphi \in H_{\Gamma}^1(\Omega).$$

Nur die erzwungenen „Nullrandwerte“ kommen in den Ansatzraum $H_{\Gamma}^1(\Omega)$, denn falls $\partial\Omega$ und Γ hinreichend glatt sind, kann man zeigen, dass $H_{\Gamma}^1(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega) \mid Su|_{\Gamma} = 0\}$ gilt und damit

$$H_0^1(\Omega) \subset H_{\Gamma}^1(\Omega) \subset H^1(\Omega).$$

4.4 Einschub: Fredholm Alternative für kompakte Operatoren

Im nächsten Paragraphen werden wir sehen, dass der schwache Lösungsoperator

$$L_{\gamma}^{-1}: L^2(\Omega) \longrightarrow H_0^1(\Omega) \subset\subset L^2(\Omega)$$

kompakt ist, d.h. er bildet beschränkte Mengen auf relativ kompakte Mengen ab (vgl. *Definition 3.4.5*).

Wir wollen deshalb unsere Kenntnisse über kompakte Operatoren vertiefen:

Beispiele kompakter Operatoren

- $T \in \mathcal{L}(X, Y)$, $\dim X < \infty$ oder $\dim Y < \infty \implies T$ kompakt.
- $T \in \mathcal{L}(X, Y)$, $S \in \mathcal{L}(Y, Z)$. Ist T **oder** S kompakt, dann ist auch $S \circ T$ kompakt.

Lemma 4.4.1 Seien $(H_i, \langle \cdot, \cdot \rangle_i)$, $i = 1, 2$ Hilberträume und $A \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$. Dann existiert ein (eindeutig bestimmter) linearer Operator $A^*: H_2 \rightarrow H_1$ mit $A^* \in \mathcal{L}(H_2, H_1)$ und

$$\langle A^*v, u \rangle_1 = \langle v, Au \rangle_2 \quad \text{für alle } u \in H_1, v \in H_2.$$

A^* heißt der zu A **adjungierte Operator**.

Beweis: Evans [Eva98] § D.5, Lemma 1.

Für lineare Operatoren $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ sei im Folgenden $N(A) = \ker A$ (nucleus) und $R(A) = \text{im}(A)$ (range).

Satz 4.4.2 (Fredholm–Alternative für kompakte Operatoren)

Sei $K: H \rightarrow H$ kompakter linearer Operator. Dann gilt:

- (i) $N(I - K)$ ist endlich dimensional
- (ii) $R(I - K)$ ist abgeschlossen
- (iii) $R(I - K) = N(I - K^*)^\perp$, $R(I - K^*) = N(I - K)^\perp$
- (iv) $N(I - K) = \{0\} \iff R(I - K) = H$
- (v) $\dim N(I - K) = \dim N(I - K^*)$

Beweis: Evans [Eva98] § D.5, Theorem 5.

Bemerkung 4.4.3 Falls (iv) ist $I - K: H \rightarrow H$ bijektiv, d.h. $(I - K)^{-1}: H \rightarrow H$ existiert und ist stetig (open mapping theorem), mithin $(I - K)^{-1} \in \mathcal{L}(H, H)$.

Bemerkung 4.4.4 Die Fredholm Alternative 4.4.2 liefert insbesondere, dass genau eine der beiden Alternativen wahr ist (vergl. (iv))

(α) für jedes $f \in H$ hat die Gleichung $x - Kx = f$ genau eine Lösung $x \in H$

oder

(β) die homogene Gleichung $x - Kx = 0$ hat eine nichttriviale Lösung $x \neq 0$.

Zusätze:

- Falls (β) gilt, hat man keine eindeutigen Lösungen von $x - Kx = f$ mehr. Existenz wird wie folgt charakterisiert:

$$x - Kx = f \quad \text{ist genau dann lösbar, wenn } f \in N(I - K^*)^\perp. \quad (4.1)$$

- Der Raum der nichttrivialen Lösungen $x \neq 0$ von $x - Kx = 0$ ist endlich dimensional.

Definition 4.4.5 Sei X normierter Raum über den Körper \mathbb{C} , $T \in \mathcal{L}(X, X)$.

Setze $T_\lambda := T - \lambda I = T - \lambda$. Dann heißt:

- (a) $\varrho(T) := \left\{ \lambda_0 \in \mathbb{C} \mid T_{\lambda_0}: X \rightarrow X \text{ ist bijektiv} \right\}$ **Resolventenmenge** von T
- (b) $\sigma(T) := \mathbb{C} \setminus \varrho(T)$ das **Spektrum** von T .
- (c) $\sigma_p(T) := \left\{ \lambda \in \sigma(T) \mid N(T - \lambda) \neq \{0\} \right\} \subset \sigma(T)$ **Punktspektrum** von T .
- (d) Ist $\lambda \in \sigma_p(T)$, dann heißt λ **Eigenwert** von T . Lösungen $w \neq 0$ von $Tw = \lambda w$ heißen **Eigenvektoren** zu λ .

Satz 4.4.6 (Riesz–Schauder: Spektrum kompakter Operatoren)

Sei H Hilbertraum, $\dim H = \infty$ und $K: H \rightarrow H$ kompakt. Dann gilt:

- (i) $0 \in \sigma(K)$
- (ii) $\sigma(K) \setminus \{0\} = \sigma_p(K) \setminus \{0\}$
- (iii) $\left\{ \begin{array}{l} \text{entweder } \sigma(K) \setminus \{0\} \text{ ist endlich, oder} \\ \sigma(K) \setminus \{0\} \text{ ist abzählbar und jede konvergente Folge in} \\ \sigma(K) \setminus \{0\} \text{ hat 0 als Grenzwert.} \end{array} \right.$

Beweis: Evans [Eva98] Appendix D.5, Theorem 6.

4.5 Fredholm Alternative für das Dirichlet–Problem

Definition 4.5.1 Sei $b_i \in W^{1,\infty}(\Omega)$. Der zu $Lu = - \sum_{i,j=1}^n (a_{ij}u_{x_i})_{x_j} + \sum_{i=1}^n b_i u_{x_i} + cu$ **formal adjungierte Operator** L^* sei

$$L^*v := - \sum_{i,j=1}^n (a_{ij}v_{x_j})_{x_i} - \sum_{i=1}^n b_i v_{x_i} + \left(c - \sum_{i=1}^n b_{i,x_i} \right) v.$$

Bemerkung 4.5.2 Sofern die Koeffizientenfunktionen hinreichend glatt sind (z.B. $b_i, a_{ij} \in C_B^1(\Omega)$) gilt

$$\langle Lu, v \rangle_{L^2(\Omega)} = \langle u, L^*v \rangle_{L^2(\Omega)} \quad \text{für alle } u, v \in C_0^\infty(\Omega).$$

Dieser Operator führt uns auf den **adjungierten Lösungsbegriff**. Wir betrachten wie bisher das Dirichlet–Problem

$$\begin{aligned} Lu &= f && \text{in } \Omega \\ u &= 0 && \text{auf } \partial\Omega \end{aligned} \quad (5.1)$$

mit schwacher Lösung $u \in H_0^1(\Omega)$:

$$B(u, \varphi) = \langle f, \varphi \rangle_{L^2(\Omega)} \quad \text{für alle } \varphi \in H_0^1(\Omega). \quad (5.2)$$

Definition 4.5.3 Wir sagen $v \in H_0^1(\Omega)$ ist **schwache Lösung der zu (5.1) adjungierten Gleichung**

$$\begin{aligned} L^*v &= f && \text{in } \Omega \\ v &= 0 && \text{auf } \partial\Omega, \end{aligned} \quad (5.3)$$

falls

$$B^*(v, \varphi) = \langle f, \varphi \rangle_{L^2(\Omega)} \quad \text{für alle } \varphi \in H_0^1(\Omega). \quad (5.4)$$

Dabei ist B^* definiert durch

$$B^*(v, u) := B(u, v), \quad u, v \in H_0^1(\Omega). \quad (5.5)$$

Bemerkung 4.5.4 Die Bilinearform B^* gehört gemäß Definition 4.5.3 zum Differentialoperator L^* , da

$$B^*(v, u) = \int_{\Omega} \left[\sum_{i,j=1}^n a_{ij} v_{x_j} u_{x_i} - \sum_{i=1}^n b_i v_{x_i} u + \left(c - \sum_{i=1}^n b_{i,x_i} \right) vu \right] dx.$$

Satz 4.5.5 (Zweiter Existenzsatz für schwache Lösungen des Dirichlet–Problems)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt und offen, L gleichmäßig elliptisch, $a_{ij}, c \in L^\infty(\Omega)$, $b_i \in W^{1,\infty}(\Omega)$.

Dann gilt:

(i) (**Fredholm–Alternative**):

Es gilt genau eine der Alternativen:

(α) Für jedes $f \in L^2(\Omega)$ existiert genau eine schwache Lösung von (5.1).

oder aber

(β) es existiert eine nichttriviale schwache Lösung $u \neq 0$ der homogenen Gleichung

$$\begin{aligned} Lu &= 0 && \text{in } \Omega \\ u &= 0 && \text{auf } \partial\Omega. \end{aligned} \quad (5.6)$$

(ii) Das homogene Randwertproblem zu L^* ist

$$\begin{aligned} L^*v &= 0 && \text{in } \Omega \\ v &= 0 && \text{auf } \partial\Omega. \end{aligned} \tag{5.7}$$

Wir betrachten die linearen Unterräume:

$$\begin{aligned} N &:= \left\{ u \in H_0^1(\Omega), u \text{ ist schwache Lösung von (5.6)} \right\} \subset H_0^1(\Omega) \\ N^* &:= \left\{ v \in H_0^1(\Omega), v \text{ ist schwache Lösung von (5.7)} \right\}. \end{aligned}$$

Dann gilt: $\dim N = \dim N^* < \infty$.

(iii) (5.1) hat eine schwache Lösung für $f \in L^2(\Omega)$ genau dann, wenn

$$\langle f, v \rangle_{L^2(\Omega)} = 0 \quad \text{für alle } v \in N^*.$$

4.6 Die Eigenwertaufgabe

Eine Motivation für die Eigenwertaufgabe (gesucht: $\lambda \in \mathbb{C}$ bzw. $\lambda \in \mathbb{R}$ und $u \neq 0$)

$$\begin{aligned} Lu - \lambda u &= 0 && \text{in } \Omega \\ u &= 0 && \text{auf } \partial\Omega \end{aligned} \tag{6.1}$$

ist der Ansatz zur Trennung der Variablen zum Lösen von parabolischen bzw. hyperbolischen Differentialgleichungen. Das zugehörige Randwertproblem

$$\begin{aligned} Lu - \lambda u &= f && \text{in } \Omega \\ u &= 0 && \text{auf } \partial\Omega \end{aligned} \tag{6.2}$$

hat nach *Satz 4.2.3* für alle $f \in L^2(\Omega)$ genau eine schwache Lösung, falls

$$-\lambda = \mu \geq \gamma \quad (\gamma \text{ so, dass } D_\gamma \text{ positiv definit ist}).$$

In diesem Fall hat (6.1) keine nichttrivialen Lösungen.

Satz 4.6.1 (Dritter Existenzsatz für schwache Lösungen)

Seien Ω und L wie in Satz 4.5.5. Dann gilt:

Es gibt eine höchstens abzählbare Menge $\tilde{\sigma}(L) =: \Sigma \subset \mathbb{R}$ mit

- (i) für alle $\lambda \notin \Sigma$, $\lambda \in \mathbb{R}$ hat das Randwertproblem (6.2) für jedes $f \in L^2(\Omega)$ genau eine schwache Lösung
- (ii) für alle $\lambda \in \Sigma$ hat (6.1) nichttriviale schwache Lösungen
- (iii) falls $|\Sigma| = \infty$ und $\Sigma = \{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ mit λ_k nichtfallend, dann gilt

$$\lambda_k \longrightarrow \infty \quad (k \rightarrow \infty).$$

Bemerkung 4.6.2 $\tilde{\sigma}(L)$ entspricht dem reellen Teil des Spektrums $\sigma(L)$ falls $L : L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$, $D(L) = H^2(\Omega \cap H_0^1(\Omega))$, mit Hilberträumen über \mathbb{C} .

Beweisidee: Mit Riesz–Schauder Theorie für $K := \gamma L_{\gamma}^{-1} : L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$ kompakt.

$$\lambda \in \Sigma \iff \varrho := \frac{\gamma}{\gamma + \lambda} \text{ ist Eigenwert von } K.$$

Bemerkung 4.6.3 Für die Riesz–Schauder Theorie müssen wir $L^2(\Omega)$ und $H_0^1(\Omega)$ über \mathbb{C} , also für komplexwertige Funktionen betrachten. Sei zu $z = a + bi$ die komplexe Konjugation $\bar{z} = a - bi$. Dann ist

$$\begin{aligned} \langle u, v \rangle_{L^2(\Omega)} &= \int_{\Omega} \bar{u} \cdot v \, dx, & \langle u, v \rangle_{H^1(\Omega)} &= \int_{\Omega} \nabla \bar{u} \cdot \nabla v + \bar{u} \cdot v \, dx \\ B(u, v) &= \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \cdot \bar{u}_{x_i} \cdot v_{x_j} + \sum_{i=1}^n b_i \cdot \bar{u}_{x_i} \cdot v + c \cdot \bar{u} \cdot v \, dx. \end{aligned}$$

$$\text{Wieder gilt } |B(u, v)| \leq \alpha \|u\|_{H^1(\Omega)} \cdot \|v\|_{H^1(\Omega)} \quad \text{für alle } u, v \in H^1(\Omega; \mathbb{C})$$

$$\text{und } \beta \|u\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq \operatorname{Re} B(u, u) + \gamma \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 \quad \text{für alle } u \in H^1(\Omega; \mathbb{C})$$

womit eine Version von Lax–Milgram für komplexwertige Funktionen anwendbar ist und alle Sätze aus den Paragraphen 4.2 bis 4.6 analog gelten.

Beispiel 4.6.4 $\Omega = (0, \pi)^2$. Das Randwertproblem

$$\begin{aligned} -\Delta u &= \lambda u & \text{in } \Omega \\ u &= 0 & \text{auf } \partial\Omega \end{aligned}$$

hat Eigenfunktionen $u_{k_1, k_2}(x_1, x_2) = \sin(k_1 x_1) \cdot \sin(k_2 x_2)$ für $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$ mit Eigenwerten $\lambda_{k_1, k_2} = k_1^2 + k_2^2$ (welche sich nur bei Unendlich häufen).

Umgekehrt ist

$$\begin{aligned} -\Delta u - \lambda u &= f & \text{in } \Omega \\ u &= 0 & \text{auf } \partial\Omega \end{aligned}$$

lösbar für alle $f \in L^2(\Omega)$, falls $\lambda \neq \lambda_{k_1, k_2}$ für alle $(k_1, k_2) \in \mathbb{N}^2$.

Beim Ansatz der Trennung der Variablen war es wichtig, dass man „genügend“ Eigenfunktionen $\{\varphi_\ell\}_{\ell \in \mathbb{N}} = \{\varphi_{\lambda_k}\}_{\lambda_k \in \Sigma}$ von L kennt. Wir werden zeigen, dass die $\{\varphi_\ell\}_{\ell \in \mathbb{N}}$ sogar ein vollständiges Orthonormalsystem in $L^2(\Omega)$ bilden.

Annahme 4.6.5 Die mit $Lu = - \sum_{i,j=1}^n (a_{ij} u_{x_i})_{x_j} + \sum_{i=1}^n b_i u_{x_i} - \sum_{i=1}^n (b_i u)_{x_i} + cu$ assoziierte Bilinearform $B: H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ sei **symmetrisch**, d.h.

$$B(u, v) = \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n a_{ij} u_{x_i} v_{x_j} + \sum_{i=1}^n b_i (u_{x_i} \cdot v + u \cdot v_{x_i}) + c \cdot u \cdot v \, dx \quad (6.3)$$

erfüllt $B(u, v) = B(v, u)$ für alle $u, v \in H_0^1(\Omega)$.

Definition 4.6.6 Der **Rayleigh–Quotient** von L ist dann $J: H_0^1(\Omega) \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$

$$J(u) := \frac{B(u, u)}{\langle u, u \rangle_{L^2}}, \quad u \in H_0^1(\Omega), \quad u \neq 0.$$

Ziel: Betrachte die Variationsaufgabe „Minimierung von J “.

Nach Satz 4.2.2 ist

$$B(u, u) \geq \beta \|u\|_{H^1}^2 - \gamma \|u\|_{L^2}^2 \quad \text{für alle } u \in H_0^1(\Omega), \quad (6.4)$$

also J nach unten beschränkt. Somit existiert

$$\sigma := \inf_{u \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}} J(u) \in \mathbb{R}. \quad (6.5)$$

Satz 4.6.7 σ ist **minimaler** Eigenwert von L in $H_0^1(\Omega)$, d.h. es existieren nichttriviale schwache Lösungen von

$$\begin{aligned} Lu - \sigma u &= 0 && \text{in } \Omega \\ u &= 0 && \text{auf } \partial\Omega \end{aligned} \quad (6.6)$$

und σ ist die kleinste Zahl, die das erfüllt.

Beweisidee: Sei dazu $\{u_m\}_{m \in \mathbb{N}} \in H_0^1(\Omega)$ eine Minimalfolge mit (o.B.d.A.)

$$\|u_m\|_{L^2(\Omega)} = 1, \quad \lim_{m \rightarrow \infty} J(u_m) = \sigma.$$

Man kann zeigen, dass eine Teilfolge in $H_0^1(\Omega)$ konvergiert ($u_m \rightarrow u^*$ in $H_0^1(\Omega)$ für $m \rightarrow \infty$) und damit $B(u^*, u^*) = \sigma$.

Setzt man für $v \in H_0^1(\Omega)$ fest

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto J(u^* + tv), \end{aligned}$$

muss also $f'(0) = 0$ gelten. Man rechnet leicht nach, dass

$$f'(0) = \frac{2}{\|u^*\|_{L^2}^2} \left[B(u^*, v) - \sigma \langle u^*, v \rangle_{L^2(\Omega)} \right].$$

Also erfüllt $u^* \in H_0^1(\Omega)$:

$$B(u^*, v) - \sigma \langle u^*, v \rangle_{L^2(\Omega)} = 0 \quad \text{für alle } v \in H_0^1(\Omega),$$

d.h. u^* ist schwache Lösung von (6.6). □

Ordnet man die Eigenwerte von L als $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \dots$ mit normierten Eigenfunktionen $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots$ lassen sich diese wie folgt charakterisieren:

$$\begin{aligned} \lambda_m &= \inf_{u \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}} J(u) \\ &u \perp_{L^2(\Omega)} \text{span} \{ \varphi_1, \dots, \varphi_{m-1} \}. \end{aligned} \tag{6.7}$$

Die Lösbarkeit dieses Variationsproblems wird im Wesentlichen genauso gezeigt wie oben der Fall $m = 1$. Da man auf diese Weise alle Eigenwerte von L schließlich bekommt, bilden die Eigenfunktionen φ_i in (6.7) ein Orthonormalsystem in $L^2(\Omega)$.

Satz 4.6.8 (vollständiges Orthogonalsystem aus Eigenfunktionen)

Sei L wie in Satz 4.5.5 mit symmetrischer Bilinearform $B: H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ (vgl. (6.3)). Dann hat L abzählbar viele Eigenwerte $\{\lambda_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ (charakterisiert durch (6.7)) mit $\lambda_k \rightarrow \infty$ und die zugehörigen Eigenfunktionen $\{\varphi_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ bilden ein **vollständiges Orthonormalsystem** in $L^2(\Omega)$.

Mithin gilt $L^2(\Omega) = \overline{\text{span}\{\varphi_i: i \in \mathbb{N}\}}^{\|\cdot\|_{L^2}}$ und jedes $v \in L^2(\Omega)$ hat eine **Fourier-Darstellung**

$$v = \sum_{i=1}^{\infty} \langle \varphi_i, v \rangle_{L^2(\Omega)} \cdot \varphi_i \quad (\text{Konvergenz in } L^2(\Omega)). \tag{6.8}$$

4.7 Innere Regularität

Motivation:

Bisher sind unter diversen Voraussetzungen (insbesondere L gleichmäßig elliptisch und Ω beschränkt) jeweils schwache Lösungen $u \in H_0^1(\Omega)$ von

$$\left. \begin{array}{l} Lu = f \quad \text{in } \Omega \\ u = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega \end{array} \right\} \iff B(u, v) = \langle f, v \rangle_{L^2(\Omega)} \quad \text{für alle } v \in H_0^1(\Omega)$$

nachgewiesen worden.

Beispiel 4.7.1 $L = -\Delta$ ist auf jedem beschränkten Ω positiv definit, d.h. für ein $\beta > 0$ gilt:

$$B(u, u) \geq \beta \|u\|_{H^1(\Omega)}^2 \quad \text{für alle } u \in H_0^1(\Omega).$$

Damit hat

$$\begin{array}{l} -\Delta u = f \quad \text{in } \Omega \\ u = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega \end{array}$$

nach Satz 4.2.3 für jedes beschränkte Ω und jedes $f \in L^2(\Omega)$ genau eine schwache Lösung.

Andererseits wissen wir aus der Übung, dass in $\Omega = B_1(0) \setminus \{0\} \subset \mathbb{R}^2$ das Dirichlet-Problem für spezielle f **keine** klassische Lösung $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ hat.

Wann also sind schwache Lösungen auch klassische Lösungen?

Wir betrachten im Folgenden schwache Lösungen $u \in H_0^1(\Omega)$ des Dirichlet-Problems

$$Lu = f \quad \text{in } \Omega \tag{7.1}$$

$$u = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega \tag{7.2}$$

mit L in Divergenzform, also

$$Lu = - \sum_{i,j=1}^n (a_{ij}(x) u_{x_i})_{x_j} + \sum_{i=1}^n b_i(x) u_{x_i} + c(x) u. \tag{7.3}$$

Zur Erinnerung:

$$B(u, v) = \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) u_{x_i} v_{x_j} + \sum_{i=1}^n b_i(x) u_{x_i} v + c(x) u v dx.$$

u ist schwache Lösung von (7.1) und (7.2) $\iff u \in H_0^1(\Omega)$ ist Lösung von

$$B(u, v) = \langle f, v \rangle_{L^2(\Omega)} \quad \text{für alle } v \in H_0^1(\Omega). \tag{7.4}$$

Satz 4.7.2 Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt, offen, $a_{ij} \in C^1(\Omega)$, $b_i, c \in L^\infty(\Omega)$, L gleichmäßig elliptisch und $f \in L^2(\Omega)$.

Sei weiterhin $u \in H^1(\Omega)$ eine „schwache Lösung“ von $Lu = f$ in Ω in dem Sinne, dass (7.4) erfüllt sei. Dann gilt bereits

$$u \in H_{loc}^2(\Omega) = \left\{ u: \Omega \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm \infty\} \mid u|_V \in H^2(V) \text{ für alle } V \subset\subset \Omega \right\}$$

und für jedes $V \subset\subset \Omega$ gilt die a priori Abschätzung

$$\|u\|_{H^2(V)} \leq C \left(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)} \right) \quad (7.5)$$

mit einer Konstante $C = C(V, \Omega, \text{Koeffizienten von } L)$.

Bemerkung 4.7.3 (i) Wir setzen **nicht** $u \in H_0^1(\Omega)$ voraus, weshalb wir Satz 4.7.2 auch für das schwache Neumann–Problem anwenden können.

(ii) da $u \in H_{loc}^2(\Omega)$ gilt $Lu = f$ fast überall in Ω .

Beweisidee:

1. Setup: Sei $V \subset\subset \Omega$ fest gewählt. Es genügt zu zeigen, dass $u \in H^2(V)$ und dass (7.5) gilt. Wähle dazu ein offenes W mit $V \subset\subset W \subset\subset \Omega$ und eine glatte Abschneidefunktion $\zeta \in C_0^\infty(\Omega)$ mit

$$\zeta \equiv 1 \text{ auf } V, \quad \zeta \equiv 0 \text{ auf } \mathbb{R}^n \setminus W, \quad 0 \leq \zeta \leq 1. \quad (7.6)$$

2. Schwache Lösungen: Nach Voraussetzung gilt (7.4)

$$B(u, v) = \langle f, v \rangle_{L^2(\Omega)} \quad \text{für alle } v \in H_0^1(\Omega).$$

Dann gilt:

$$\sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} a_{ij} u_{x_i} v_{x_j} dx = \int_{\Omega} \tilde{f} \cdot v dx \quad \text{für alle } v \in H_0^1(\Omega), \quad (7.7)$$

$$\text{wobei } \tilde{f} := f - \sum_{i=1}^n b_i u_{x_i} - c \cdot u \in L^2(\Omega). \quad (7.8)$$

3. Differenzenquotienten: Wir betrachten (7.6) mit

$$\tilde{v} := -\nabla_{-h,k} \left[\zeta^2 \cdot \nabla_{h,k} u \right] \in H_0^1(\Omega) \quad \text{für } |h| \neq 0.$$

Man beachte, dass wegen (7.6) $u \in H^1(\Omega)$ genügt, dass $\tilde{v} \in H_0^1(\Omega)$. Also

$$A := \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} a_{ij} u_{x_i} \tilde{v}_{x_j} dx = \int_{\Omega} \tilde{f} \cdot \tilde{v} dx =: B.$$

4. Abschätzungen: Man kann zeigen:

$$(\alpha) \quad A \geq \frac{\Theta}{2} \int_{\Omega} \zeta^2 |\nabla_{h,k}(\nabla u)|^2 dx - C \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx$$

mit $C = C(V, \Omega, \text{Koeffizienten})$ und $\Theta = \text{Elliptizitätskonstante von } (EL)$ und $0 < |h| \leq \text{dist}(W, \partial\Omega)$. Sowie

$$(\beta) \quad |B| \leq \frac{\Theta}{4} \int_{\Omega} \zeta^2 |\nabla_{h,k}(\nabla u)|^2 dx + C \cdot \int_{\Omega} (f^2 + u^2 + |\nabla u|^2) dx.$$

Aus $A = B$ folgt dann

$$\begin{aligned} \int_V |\nabla_{h,k}(\nabla u)|^2 dx &\leq \int_{\Omega} \zeta^2 |\nabla_{h,k}(\nabla u)|^2 dx \\ &\leq C \cdot \int_{\Omega} (f^2 + u^2 + |\nabla u|^2) dx \end{aligned}$$

für alle $V \subset\subset \Omega$, $k = 1, \dots, n$ und $|h| \neq 0$ hinreichend klein.

Verwenden wir *Lemma 3.6.3*, erhalten wir $u_{x_i x_k} \in L^2(V)$, also $u \in H_{loc}^2(\Omega)$ mit der Abschätzung

$$\|u\|_{H^2(V)} \leq C \cdot (\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{H^1(\Omega)}) \quad (7.9)$$

und $C = C(V, \Omega, \text{Koeffizienten})$.

Das ist leider noch nicht ganz (7.5), lässt sich aber mit weiteren Argumenten zu (7.5) verbessern. □

Weiteres Ziel wird sein, obiges Argument zu „iterieren“, um die Lösung in immer höhere Sobolev-Räume zu liften (bootstrap Argument).

Satz 4.7.4 Sei $f \in H^m(\Omega)$, $m \in \mathbb{N}_0$ und $a_{ij}, b_i, c \in C^{m+1}(\Omega)$, L gleichmäßig elliptisch.

Ist $u \in H^1(\Omega)$ eine „schwache Lösung“ der elliptischen Differentialgleichung $Lu = f$ in Ω (d.h. (7.4) gilt). Dann ist $u \in H_{loc}^{m+2}(\Omega)$ und für jedes $V \subset\subset \Omega$ gilt

$$\|u\|_{H^{m+2}(V)} \leq C \cdot (\|f\|_{H^m(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)}),$$

wobei $C = C(m, \Omega, V, \text{Koeffizienten von } L)$.

Beweisidee: Induktion nach m , wobei $m = 0$ genau *Satz 4.7.2* entspricht.

Verwendet man jetzt noch den Sobolev’schen Einbettungssatz, erhält man (bei hinreichend glatten Koeffizientenfunktionen) sogar im Inneren von Ω klassische Lösungen (**Weyl’sches Lemma**).

4.8 Randregularität

Satz 4.8.1 (*a priori Abschätzung*)

Sei $a_{ij} \in C_B^1(\Omega)$, $b_i, c \in L^\infty(\Omega)$ und $f \in L^2(\Omega)$, wobei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt und offen, $\partial\Omega$ von der Klasse C^2 . Ist dann $u \in H_0^1(\Omega)$ eine schwache Lösung von

$$\begin{aligned} Lu &= f & \text{in } \Omega \\ u &= 0 & \text{auf } \partial\Omega, \end{aligned} \tag{8.1}$$

so ist bereits $u \in H^2(\Omega)$ und es gilt die *a priori* Abschätzung

$$\|u\|_{H^2(\Omega)} \leq C \left(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)} \right)$$

mit $C = C(\Omega, \text{Koeffizienten von } L) > 0$.

Bemerkung 4.8.2 Im Gegensatz von Satz 4.7.2 verlangen wir jetzt $u \in H_0^1(\Omega)$, also insbesondere $\text{Spur}(u) = 0 \in L^2(\partial\Omega)$.

Bemerkung 4.8.3 Analog gilt für $u \in H_0^1(\Omega)$ schwache Lösung von

$$\begin{aligned} Lu - \lambda u &= f & \text{in } \Omega & \quad (\lambda \in \mathbb{R}) \\ u &= 0 & \text{auf } \partial\Omega, \end{aligned} \tag{8.2}$$

dass $u \in H^2(\Omega)$ mit

$$\begin{aligned} \|u\|_{H^2(\Omega)} &\leq C \left(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)} \right) \\ &\leq \tilde{C}_\lambda \|f\|_{L^2(\Omega)} \left(\text{nur falls } \lambda \notin \Sigma \text{ (vgl. Satz 4.6.1)} \right). \end{aligned} \tag{8.3}$$

Da zu $\lambda \notin \Sigma$ das Randwertproblem (8.1) zu gegebenem $f \in L^2(\Omega)$ eine eindeutige Lösung $u_f \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ besitzt (vgl. Satz 4.6.1, 4.8.1), ist also $(L - \lambda): H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$ stetig und invertierbar. Mit $u = (L - \lambda)^{-1}f$, in (8.3) ist damit $(L - \lambda)^{-1}: L^2(\Omega) \rightarrow H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ ebenfalls ein stetiger Operator.

Mit einem zu Satz 4.7.4 analogen bootstrap Argument beweist man:

Satz 4.8.4 Seien $a_{ij}, b_i, c \in C^{m+1}(\bar{\Omega})$, $f \in H^m(\Omega)$ und $\partial\Omega$ von der Klasse C^{m+2} .

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ sei offen und beschränkt. Ist $u \in H_0^1(\Omega)$ schwache Lösung von

$$\begin{cases} Lu = f & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{auf } \partial\Omega, \end{cases} \tag{8.4}$$

dann ist $u \in H^{m+2}(\Omega)$ und

$$\|u\|_{H^{m+2}(\Omega)} \leq C \left(\|f\|_{H^m(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)} \right) \tag{8.5}$$

mit $C = C(m, \Omega, \text{Koeffizienten von } L) > 0$.

Bemerkung 4.8.5 (analog Bemerkung 4.8.3) Ist u die eindeutige Lösung von (8.2), so gilt

$$\|u\|_{H^{m+2}(\Omega)} \leq C \|f\|_{H^m(\Omega)}.$$

Korollar 4.8.6 (Unendliche Differenzierbarkeit)

Ist $a_{ij}, b_i, c \in C^\infty(\overline{\Omega})$, $f \in C^\infty(\overline{\Omega})$, Ω offen und beschränkt, und $\partial\Omega$ von der Klasse C^∞ , so ist jede schwache Lösung $u \in H_0^1(\Omega)$ von (8.1) bereits in $C^\infty(\overline{\Omega})$.

Neben dem hier präsentierten Zugang über schwache Lösungen gibt es auch eine „direkte“ Theorie für Regularität, die sogenannte Schauder Theorie oder C^α -Theorie. $C^\alpha(\overline{\Omega})$ sei der Raum der α -Hölder stetigen Funktionen auf $\overline{\Omega}$ ($0 < \alpha \leq 1$).

Wir setzen $C^{2,\alpha}(\overline{\Omega}) := \left\{ v \in C^2(\overline{\Omega}) : D_{x_i x_j} v \in C^\alpha(\overline{\Omega}) \right\}$.

Satz 4.8.7 (Fredholm-Alternative für C^α -Theorie):

Sei $Lu = \sum a_{ij}(x) u_{x_i x_j} + \sum b_i u_{x_i} + cu$ ein gleichmäßig elliptischer Differentialoperator mit Koeffizienten in $C^\alpha(\overline{\Omega})$ und Rand $\partial\Omega$ von der Klasse $C^{2,\alpha}$. Dann gilt die Alternative

(a) Das homogene Problem

$$\begin{aligned} Lu &= 0 && \text{in } \Omega \\ u &= 0 && \text{auf } \partial\Omega \end{aligned} \tag{8.6}$$

hat nur die triviale Lösung. In diesem Fall hat

$$\begin{aligned} Lu &= f && \text{in } \Omega \\ u &= \varphi && \text{auf } \partial\Omega \end{aligned} \tag{8.7}$$

immer eine eindeutige Lösung $u \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ für jedes $f \in C^\alpha(\overline{\Omega})$ und $\varphi \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$.

(b) Das homogene Problem (8.6) hat nichttriviale Lösungen, welche einen endlich-dimensionalen Unterraum von $C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ bilden.

Beweis: Gilbarg & Trudinger, Theorem 6.15

Bemerkung 4.8.8 Es gibt **keine** $C^2(\Omega)$ Theorie! Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt mit Rand von der Klasse C^2 . Dann gibt es stetige rechte Seiten $f \in C(\Omega)$, so dass das Dirichlet-Problem

$$\begin{aligned} \Delta u &= f && \text{in } \Omega \\ u &= 0 && \text{auf } \partial\Omega \end{aligned}$$

keine Lösung $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ besitzt. (vgl. Gilbarg /Trudinger S. 25/26)

Bemerkung 4.8.9 (nicht glatter Rand)

Hat der Rand $\partial\Omega$ Ecken (z.B. Lipschitz-Rand) ist Randregularität ein heikles Thema.

Es gibt aber Ausnahmen:

Ist z.B. Ω Rechteck oder gleichseitiges Dreieck und

$$Lu = -\Delta u + c \cdot u = f \quad \text{in } \Omega \quad (8.8)$$

mit Neumann (N) oder Dirichlet (D) Randbedingungen, $c > 0$, so hat (8.8) für $f \in C^\alpha(\bar{\Omega})$ (bzw. $H^m(\Omega)$) immer Lösungen $u \in C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$ (bzw. $H^{m+2}(\Omega)$).

Satz 4.8.10 Sei $L: L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$, $D(L) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ gleichmäßig elliptisch (mit (EL)) und in Divergenzform, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ sei offen und beschränkt, $\partial\Omega \in C^2$, $a_{ij} \in C_B^1(\Omega)$, $b_i, c \in L^\infty(\Omega)$. Dann ist L ein abgeschlossener Operator, d.h. der Graph von L , $G(L) := \{(u, Lu) \mid u \in D(L)\}$, ist eine abgeschlossene Menge in $L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$.

Bemerkung 4.8.11 Der zu $T: L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$, $D(T) \subset L^2(\Omega)$ adjungierte Operator

$$T^*: L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega), \quad D(T^*) \subset L^2(\Omega) \text{ ist wie folgt definiert.}$$

Falls zu $w \in L^2(\Omega)$ ein $w^* \in L^2(\Omega)$ existiert mit

$$\langle Tu, w \rangle_{L^2(\Omega)} = \langle u, w^* \rangle_{L^2(\Omega)} \quad \text{für alle } u \in D(T),$$

dann ist $w \in D(T^*)$ und $T^*w := w^*$.

Satz 4.8.12 Sei L wie Satz 4.8.10 und zusätzlich formal selbstadjungiert, also z.B.

$$Lu = - \sum_{i,j=1}^n \left(a_{ij}(x) u_{x_i} \right)_{x_j} + c \cdot u. \quad (8.9)$$

Dann ist L symmetrisch, d.h.

$$\langle Lu, v \rangle_{L^2(\Omega)} = \langle u, Lv \rangle_{L^2(\Omega)} \quad \text{für alle } u, v \in D(L) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \quad (\text{Notation: } L \subset L^*)$$

und sogar selbstadjungiert ($L = L^*$), also insbesondere auch $D(L) = D(L^*)$.

Beweisidee: Nur „ $L \subset L^*$ “. Symmetrie von L folgt aus der Symmetrie von B und $\langle Lu, v \rangle_{L^2(\Omega)} = B(u, v)$. Damit ist automatisch L^* eine Erweiterung von L und $D(L) \subset D(L^*)$, denn $\langle Lu, v \rangle_{L^2(\Omega)} = \langle u, L^*v \rangle_{L^2(\Omega)}$ für alle $u \in D(L)$, $v \in D(L^*)$.

□

Definition 4.8.13 Ein abgeschlossener, dicht definierter (d.h. $\overline{D(A)} = X$) Operator $A: X \rightarrow X$ ($X =$ Banachraum) heißt **Fredholm-Operator**, falls

- (i) $\dim N(A) < \infty$
- (ii) $\operatorname{codim} R(A) < \infty$
- (iii) $R(A)$ ist abgeschlossen.

Korollar 4.8.14 Sei L wie in Satz 4.8.10. Dann gilt:

- (a) $R(L)$ ist abgeschlossen
- (b) $R(L) = N(L^*)^\perp$
- (c) L ist Fredholm-Operator vom **Index Null**:

$$\operatorname{ind}(L) := \dim N(L) - \operatorname{codim} R(L) = 0.$$

Ist zusätzlich L formal selbstadjungiert (vgl. z.B. (8.9)), so gilt

- (d) $N(L) \perp R(L)$ und $L^2(\Omega) = N(L) \oplus R(L)$.

Beweisidee: Satz 4.5.5 liefert $R(L) = (N^*)^\perp$, also ist $R(L)$ abgeschlossen, d.h. (a).

Damit ist der Satz vom abgeschlossenen Wertebereich anwendbar, und weil L ein abgeschlossener Operator ist, folgt (b).

□

4.9 Eigenfunktionen und Eigenwerte

Wir beginnen mit einer kleinen Wiederholung der Ergebnisse aus Section 4.6. Sei Ω beschränkt und offen, L symmetrischer, gleichmäßig elliptischer Operator mit zugehöriger symmetrischer Bilinearform $B: H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ ($a_{ij}, b_i, c \in L^\infty(\Omega)$)

$$B(u, v) = \int_{\Omega} \Sigma a_{ij} u_{x_i} v_{x_j} + \Sigma b_i (u_{x_i} v + uv_{x_i}) - cuv \, dx. \quad (9.1)$$

Dann gilt:

- Es existieren nur abzählbar viele Eigenwerte $\{\lambda_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ mit $\lambda_k \rightarrow \infty$ mit zugehörigen Eigenfunktionen $\{\varphi_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset H_0^1(\Omega)$, d.h.

$$B(\varphi_k, v) = \lambda_k \langle \varphi_k, v \rangle_{L^2(\Omega)} \quad \text{für alle } v \in H_0^1(\Omega). \quad (9.2)$$

- $\{\varphi_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ bilden ein VONS in $L^2(\Omega)$, d.h. jedes $v \in L^2(\Omega)$ hat eine eindeutige Fourierdarstellung

$$v = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \varphi_k \quad \text{in } L^2(\Omega), \quad \text{wobei} \quad \alpha_k = \langle \varphi_k, v \rangle_{L^2(\Omega)} \quad \text{und} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^2 < \infty.$$

- Variationelle Charakterisierung der Eigenwerte

$$\lambda_1 = \min_{0 \neq u \in H_0^1(\Omega)} \frac{B(u,u)}{\|u\|_{L^2(\Omega)}^2} = \min \{ B(u,u) \mid u \in H_0^1(\Omega), \|u\|_{L^2} = 1 \}$$

$$\lambda_n = \min_{u \in W_n} \frac{B(u,u)}{\|u\|_{L^2(\Omega)}^2}, \quad W_n := \left\{ 0 \neq u \in H_0^1(\Omega) : u \perp_{L^2} \text{span}\{\varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}\} \right\}.$$

Der Einfachheit halber sei im Folgenden $b_i = c = 0$, also B positiv definit. Wegen (EL) und Poincaré ist die $H^1(\Omega)$ -Seminorm auf $H_0^1(\Omega)$ eine äquivalente Norm

$$B(u,u) \geq \Theta \|\nabla u\|_{L^2}^2 \cong \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2. \quad (9.3)$$

Satz 4.9.1 Sei Ω offen und beschränkt, L gleichmäßig elliptisch mit B wie in (9.1) mit $b_i = c = 0$. Dann ist

$$\left(\frac{\varphi_k}{\lambda_k^{1/2}} \right)_{k \in \mathbb{N}} \text{ vollständiges ONS in } \left(H_0^1(\Omega), B(\cdot, \cdot) \right) \cong \left(H_0^1(\Omega), \|\cdot\|_1 \right) \cong \left(H_0^1(\Omega), \|\nabla \cdot\|_{L^2} \right)$$

und mit

$$X = \left\{ u \in L^2(\Omega) \mid \|u\|_X := \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^2 \lambda_k < \infty, \alpha_k = (u, \varphi_k)_{L^2(\Omega)} \right\}$$

gilt, dass $(H_0^1(\Omega), \|\cdot\|_1) \cong (X, \|\cdot\|_X)$ algebraisch und topologisch isomorph sind.

Zusatz: (a) $\lambda_1 > 0$. Außerdem gilt $B(u,u) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^2$ für $u \in X$.

Wir erinnern an ein Lemma aus Section 4.6.

Lemma 4.9.2 Sei L wie am Anfang des Paragraphen. Dann gilt: Für $u \in H_0^1(\Omega)$ mit $\|u\|_{L^2(\Omega)} = 1$ sind äquivalent

$$\left[u \text{ ist schwache Lösung von } \begin{cases} Lu = \lambda_1 u & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{auf } \partial\Omega \end{cases} \right] \iff B(u,u) = \lambda_1.$$

Satz 4.9.3 (Eigenschaften der ersten Eigenfunktion)

Sei L, Ω in Satz 4.9.1, also $L = -\sum (a_{ij}u_{x_i})_{x_j}$, mit $\partial\Omega$ und Koeffizienten hinreichend glatt, so dass schwache Lösungen $u \in H_0^1(\Omega)$ von

$$B(u, v) = \lambda_1 \langle u, v \rangle_{L^2} \quad \text{für alle } v \in H_0^1(\Omega) \quad (9.4)$$

immer in $C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ sind und B positiv definit ist. Zusätzlich sei Ω zusammenhängend. Dann gilt:

(a) Das Minimum in

$$\lambda_1 = \min \{ B(u, u) \mid u \in H_0^1(\Omega), \|u\|_{L^2} = 1 \}$$

wird von einer positiven Funktion $\varphi_1 \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ ($\varphi_1 > 0$ in Ω) angenommen und $w = \varphi_1$ löst

$$\begin{aligned} Lw &= \lambda_1 w && \text{in } \Omega \quad (\text{punktweise}) \\ w &= 0 && \text{auf } \partial\Omega. \end{aligned} \quad (9.5)$$

(b) Jede schwache Lösung $w \in H_0^1(\Omega)$ von (9.5), $B(w, v) = \lambda_1 \langle w, v \rangle_{L^2}$ für alle $v \in H_0^1(\Omega)$, ist Vielfaches von φ_1 .

Bemerkung 4.9.4 λ_1 (der erste Eigenwert) heißt auf Englisch „principle eigenvalue“. Nach obigem Satz ist er immer einfach, also $0 < \lambda_1 < \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \dots$.

Beweisidee von Satz 4.9.3: Für jede schwache Lösung $u \in H_0^1(\Omega)$ von (9.5) ist mit

$$\begin{aligned} u^+ &= \max \{ u, 0 \} \geq 0 \\ u^- &= \min \{ u, 0 \} \leq 0 \\ u &= u^+ + u^- \end{aligned}$$

wegen $B(u^+, u^-) = 0$ auch $w = u^\pm \in H_0^1(\Omega)$ ebenfalls schwache Lösung von (9.5). Das geht nur wenn $u > 0$ oder $u < 0$ in Ω .

□

Das Maximum–Minimum Prinzip von Courant–Fischer–Weyl

Sei wieder L gleichmäßig elliptisch mit beschränkten Koeffizienten, B symmetrisch, Ω offen und beschränkt. Dann ist bekannt, dass

$$\lambda_n = \lambda_n(\Omega) = \min_{u \in W_n} \left\{ \frac{B(u, u)}{\|u\|_{L^2(\Omega)}^2} \right\} \quad (9.6)$$

$$W_n := \left\{ 0 \neq u \in H_0^1(\Omega) : \langle \varphi_i, u \rangle_{L^2(\Omega)} = 0, \quad \text{für } i = 1, \dots, n-1 \right\}$$

und $\varphi_n = \varphi_n(\Omega)$ schwache Eigenwerte ($\lambda_n \leq \lambda_k$ für $n \leq k$) und schwache Eigenfunktionen von

$$B(\varphi, u) = \lambda \langle \varphi, u \rangle_{L^2(\Omega)} \quad \text{für alle } u \in H_0^1(\Omega) \quad (9.7)$$

sind. Wir schreiben die Abhängigkeit von $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um diese zu betonen.

Satz 4.9.5 (Minimax-Prinzip)

Unter den Voraussetzungen von Satz 4.6.8, so dass also abzählbar viele Eigenwerte $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ($\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \rightarrow \infty$, $n \in \mathbb{N}$) mit Eigenfunktionen $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ (VONS in $L^2(\Omega)$) existieren, gilt:

Seien $v_1, \dots, v_{n-1} \in H^1(\Omega)$ beliebig und $V_{n-1} := \text{span}\{v_1, \dots, v_{n-1}\}$ mit $\dim V_{n-1} \leq n-1$.

Dann existiert

$$d(V_{n-1}) := \min_{0 \neq u \in H_0^1(\Omega), u \perp_{L^2} V_{n-1}} \left\{ \frac{B(u, u)}{\|u\|_{L^2(\Omega)}^2} \right\}, \quad (9.8)$$

und es gilt ,

$$\lambda_n = \max_{V_{n-1} \subset H^1(\Omega), \dim V_{n-1} \leq n-1} \{d(V_{n-1})\}, \quad (9.9)$$

wobei das Maximum für $V_{n-1}^* = \text{span}\{\varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}\} \subset H_0^1(\Omega) \subset H^1(\Omega)$ angenommen wird.

Satz 4.9.6 (Schwache Anti-Monotonie der Eigenwerte in Abhängigkeit vom Gebiet)

Voraussetzungen seien wie im Satz vorher an $\tilde{\Omega}$ und Ω mit $\tilde{\Omega} \subset \Omega$. (L sei auf Ω definiert!)

Dann gilt $\lambda_n(\Omega) \leq \lambda_n(\tilde{\Omega})$ für alle Eigenwerte $n \in \mathbb{N}$.

Beweis mit Minimax-Prinzip.

□

Weiteres Ziel ist die „Starke Anti-Monotonie“ der Eigenwerte in Abhängigkeit vom Gebiet. Dies gilt, falls $\tilde{\Omega} \subset \Omega$ und $\text{int}(\Omega \setminus \tilde{\Omega}) \neq \emptyset$.

Zum Beweis benötigen wir eine Verschärfung einer früheren Übungsaufgabe.

Satz 4.9.7 Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt, offen und zusammenhängend. Dann hat zu jeder Lösung $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ von

$$\begin{aligned} Lu &= 0 & \text{in } \Omega \\ u &= 0 & \text{auf } \partial\Omega \end{aligned}$$

die Knotenmenge $K = \{x \in \Omega \mid u(x) = 0\}$ leeres Inneres $\left(\overset{\circ}{K} = \emptyset\right)$ oder $u \equiv 0$.

Beweis: Hardt & Simon [HS89]: Nodal sets for solutions of elliptic equations.

Satz 4.9.8 (Starke Anti-Monotonie der Eigenwerte in Abhängigkeit vom Gebiet)

Es gelten die Voraussetzungen von Satz 4.6.8 auf $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ (insbesondere B symmetrisch), so dass also abzählbar viele schwache Eigenwerte $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit Eigenfunktion $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von

$$\begin{aligned} Lu &= \lambda u & \text{in } \Omega \\ u &= 0 & \text{auf } \partial\Omega \end{aligned}$$

existieren. Zusätzlich gelte, dass $\varphi_n(\Omega) \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ (mit Regularitätstheorie für Ω).

Eine Teilmenge $\tilde{\Omega} \subset \Omega$ sei ebenfalls offen und beschränkt und Ω sei zusammenhängend mit $\text{int}(\Omega \setminus \tilde{\Omega}) \neq \emptyset$. Dann gilt:

$$\lambda_n(\Omega) < \lambda_n(\tilde{\Omega}) \quad \text{für } n \in \mathbb{N}.$$

Bemerkung 4.9.9 Der Satz ist falsch für Ω unzusammenhängend, weil dort das Eigenwertproblem in Eigenwertprobleme auf den Komponenten zerfällt. Ist z.B. $\Omega = \Omega_1 \dot{\cup} \Omega_2$ mit zwei Komponenten Ω_i , dann liefern die Eigenwerte $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}} \cup (\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$,

$$\begin{aligned} Lu &= \lambda u & \text{in } \Omega_1 & & Lu &= \mu u & \text{in } \Omega_2 \\ u &= 0 & \text{auf } \partial\Omega_1 & & u &= 0 & \text{auf } \partial\Omega_2 \end{aligned}$$

auch Eigenwerte auf Ω (Eigenfunktion jeweils $\equiv 0$ auf Ω_1 oder Ω_2).

Vergrößert man nur Ω_1 und lässt Ω_2 fest, ändern sich natürlich nur die $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Ein **Knotengebiet** von u ist eine zusammenhängende Komponente von $\{x \in \Omega \mid u(x) \neq 0\}$.

Korollar 4.9.10 Sei L, Ω wie in Satz 4.9.8 (wieder Ω zusammenhängend), so dass $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Eigenwerte und $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}} \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ Eigenfunktionen zu

$$\begin{aligned} Lu &= \lambda u & \text{in } \Omega \\ u &= 0 & \text{auf } \partial\Omega \end{aligned}$$

existieren. Dann besitzt φ_n höchstens n Knotengebiete.

Beweisidee: Die Annahme von mindestens $n + 1$ Knotengebiete führt zum Widerspruch mit der starken Anti-Monotonie der Eigenwerte.

□

4.10 Resolventenabschätzung für elliptische Operatoren

Motivation: Betrachte das „Cauchy–Problem“ für $u = u(t) \in D(L) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$

$$\frac{du}{dt} + Lu = 0 \quad \text{für } t > 0 \quad (10.1)$$

$$u(0) = u_0 \in L^2(\Omega), \quad (10.2)$$

wobei (10.1) eine Gleichung in $L^2(\Omega)$ ist. L sei gleichmäßig elliptischer Operator.

Setze $u(t) := T(t)u_0$, wobei $T(t): L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$ für jedes $t \geq 0$ ein linearer Operator sein soll, der $T(0) = Id$, $T(t)T(s) = T(t+s)$ für $t, s \geq 0$ und

$$\frac{d}{dt}T(t)u = (-L)T(t)u \quad \text{für } u \in D(L) \quad \text{und } t \geq 0 \quad (10.3)$$

erfüllt. In Anlehnung an die reelle Exponentialfunktion schreibt man deshalb auch oft $T(t) = e^{-Lt}$. $(T(t))_{t \geq 0}$ heißt **Halbgruppe beschränkter linearer Operatoren**.

Dann gilt für $u_0 \in D(L)$

$$\frac{du}{dt}(t) = \frac{d}{dt}T(t)u_0 = (-L)T(t)u_0 = -Lu(t)$$

und $u(0) = T(0)u_0 = u_0$. Die Existenz der Operatorfamilie $(T(t))_{t \geq 0}$ wird zum Studium von Evolutionsgleichungen wichtig sein. Wir werden einen Satz beweisen, dass für einen „sektoriellen“ Operator L der Operator $-L$ eine (analytische) Halbgruppe gemäß oben erzeugt.

Definition 4.10.1 (sektorieller Operator)

Sei $A: X \rightarrow X$ linearer, dicht definierter und abgeschlossener Operator auf einem Banachraum X (über \mathbb{C}). A heißt **sektoriell**, falls $\phi \in (0, \frac{\pi}{2})$, $M_0 > 0$ und $r_0 > 0$ existieren, so dass für das sektorartige Gebiet

$$\Lambda = \Lambda_{r_0, \phi} = \left\{ \lambda \in \mathbb{C} : \phi \leq |\arg(\lambda)| \leq \pi, |\lambda| > r_0 \right\}$$

gilt, dass $\Lambda \subset \rho(A)$ und

$$\|(\lambda Id - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X, X)} \leq \frac{M_0}{|\lambda|} \quad \text{für alle } \lambda \in \Lambda. \quad (10.4)$$

Bemerkung 4.10.2 Für $A_z = A - z \cdot Id$ und $A: X \rightarrow X$ wie oben mit dichtem Definitionsbereich $D(A) \subset X$ erfüllt die Resolventenmenge von A

$$\begin{aligned} \rho(A) &= \{z \in \mathbb{C} \mid A_z: D(A) \longrightarrow X \text{ ist injektiv, } R(A_z) \text{ ist dicht, und } A_z^{-1} \text{ ist stetig}\} \\ &= \{z \in \mathbb{C} \mid A_z: D(A) \longrightarrow X \text{ ist bijektiv und } A_z^{-1} \in \mathcal{L}(X, X)\}. \end{aligned}$$

Unser kurzfristiges Ziel ist zu zeigen, dass $A = L$ (gleichmäßig elliptischer Operator) sektoriell ist.

Beispiel 4.10.3 Für $L =$ gleichmäßig elliptisch und symmetrisch ist nach Satz 4.6.8 des Spektrum $\sigma(L) = \{\lambda_n, n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}$ mit $\lambda_n \rightarrow \infty$ für $n \rightarrow \infty$. Also existiert Λ mit $\Lambda \subset \rho(L)$. Was fehlt ist die Resolventenabschätzung (10.4).

Zunächst wollen wir aber die lineare elliptische Theorie auf komplexwertige Funktionenräume liften, damit Spektraltheorie Sinn macht. Sei dazu

$$Lu = - \sum_{i,j=1}^n (a_{ij}(x) u_{x_i})_{x_j} + \sum_{i=1}^n b_i(x) u_{x_i} + c(x) u \quad (10.5)$$

mit $a_{ij} \in C^1(\overline{\Omega}) = C^1(\overline{\Omega}; \mathbb{C})$, $b_i, c \in L^\infty(\Omega) = L^\infty(\Omega; \mathbb{C})$, welche komplexwertig sind und $a_{ij} = a_{ji}$ erfüllen (vgl. (1.4)).

Definition 4.10.4 L aus (10.5) heißt **(komplex) gleichmäßig elliptisch**, falls ein $\Theta > 0$ existiert mit

$$\operatorname{Re} \left[\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \cdot \overline{\eta_i} \eta_j \right] \geq \Theta \cdot \|\eta\|^2 \text{ für alle } \eta \in \mathbb{C}^n \text{ und } x \in \Omega, \quad \|\cdot\| = \|\cdot\|_{2,\mathbb{C}^n} \quad (EL)$$

Bemerkung 4.10.5 L (reell) gleichmäßig elliptisch mit $a_{ij} = a_{ji}$ impliziert, L (komplex) gleichmäßig elliptisch.

Seien $H^k(\Omega) = H^k(\Omega; \mathbb{C})$ und $H_0^k(\Omega) = H_0^k(\Omega; \mathbb{C})$ die Sobolev-Räume komplexwertiger Funktionen, also Hilberträume über \mathbb{C} mit L^2 -Skalarprodukt (für alle Ableitungen)

$$\int_{\Omega} \overline{u}(x) v(x) dx,$$

dann lässt sich das Randwertproblem

$$\begin{aligned} Lu &= f && \text{in } \Omega \\ u &= 0 && \text{auf } \partial\Omega \end{aligned} \quad (10.6)$$

wieder schwach formulieren. Mit $B : H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{C}$ (jetzt Sesquilinearform, die im ersten Argument nur semilinear ist; vgl. [MP18], Definition 4.1.1 (U4)).

$$B(u, v) := \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \overline{u_{x_i}} v_{x_j} + \sum_{i=1}^n b_i(x) \overline{u_{x_i}} \cdot v + c(x) \overline{u} v dx$$

gilt

$$\langle Lu, v \rangle_{L^2(\Omega)} = B(u, v) \quad \text{für alle } u, v \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega).$$

Schwache Formulierungen von (10.6): Gesucht ist $u \in H_0^1(\Omega)$ mit

$$B(u, v) = \langle f, v \rangle_{L^2(\Omega)} \quad \text{für alle } v \in H_0^1(\Omega).$$

Energieabschätzungen analog *Satz 4.2.2* liefern

$$\operatorname{Re} B(u, u) \geq \beta \|u\|_{H^1(\Omega)}^2 - \gamma \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 \quad \text{für alle } u \in H^1(\Omega). \quad (10.7)$$

Also $B_\gamma(u, v) = B(u, v) + \gamma \int_\Omega \bar{u} v \, dx$ ist stetig und koerziv (positiv definit) mit $\operatorname{Re} B_\gamma(u, u) \geq \beta \|u\|_{H^1(\Omega)}^2$. Der Satz von Lax–Milgram im Komplexen (z.B. Alt [Alt92], *Satz 4.7*) garantiert Existenz schwacher Lösungen (usw.).

Falls B hermitesch, d.h. $B(u, v) = \overline{B(v, u)}$, so ist $B(u, u) \in \mathbb{R}$. Damit machen Variationsmethoden Sinn.

Alle reellen Beweise lassen sich ins Komplexe übertragen, insbesondere gilt die **a priori Abschätzung** (für $a_{ij} \in C^1(\bar{\Omega})$, $b_i, c \in C(\bar{\Omega})$, $\partial\Omega$ von der Klasse C^2).

Schwache Lösungen u von

$$\begin{aligned} Lu &= f & \text{in } \Omega \\ u &= 0 & \text{auf } \partial\Omega \end{aligned}$$

mit $f \in L^2(\Omega)$ sind bereits in $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ und es gilt

$$\|u\|_{H^2(\Omega)} \leq C \left(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)} \right) \quad (10.8)$$

für ein $C = C(\Omega, \text{Koeffizienten von } L)$ (vgl. Regularitätstheorie aus *Sektion 4.8*).

Lemma 4.10.6 *Sei L komplex gleichmäßig elliptisch mit hinreichend glatten Koeffizienten und $\partial\Omega$ von der Klasse C^2 (so dass die a-priori Abschätzung (10.8) gilt).*

Dann gilt: Zu jedem $\delta \in (0, \frac{\pi}{2})$ existieren Konstanten $K_0, r_0 > 0$, so dass mit $\arg z \in (-\pi, \pi]$,

$$\Lambda = \Lambda_{\delta, r_0} := \left\{ z \in \mathbb{C} \mid |z| \geq r_0, \frac{\pi}{2} + \delta \leq |\arg z| \leq \pi \right\}$$

die Abschätzung

$$|\lambda| \|u\|_{L^2(\Omega)} + |\lambda|^{1/2} \|u\|_{H^1(\Omega)} + \|u\|_{H^2(\Omega)} \leq K_0 \|(\lambda \operatorname{Id} - L)u\|_{L^2(\Omega)}$$

für alle $\lambda \in \Lambda$ und $u \in D(L) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ gilt.

Bemerkung 4.10.7 *Das Lemma ist offensichtlich falsch für λ Eigenwert von L !*

Beweisidee von Lemma 4.10.6: Der Operator $L_1 := L - e^{i\kappa} \frac{\partial^2}{\partial t^2}$ ($|\kappa| \leq \frac{\pi}{2} - \delta$) ist komplex gleichmäßig elliptisch im Zylinder $\Omega_T = \Omega \times (-T, T) \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Die a-priori Abschätzung (10.8) für L_1 führt zur Behauptung. □

Korollar 4.10.8 Sei L wie im Lemma 4.10.6, aber mit **reellwertigen** Koeffizienten. Dann gilt: Zu gegebenem $\delta \in (0, \frac{\pi}{2})$ existieren $r_0 = r_0(\delta) > 0$, $K_0 = K_0(\delta) > 0$, so dass die Abschätzung von Lemma 4.10.6

$$|\lambda| \|u\|_{L^2(\Omega)} + |\lambda|^{1/2} \|u\|_{H^1(\Omega)} + \|u\|_{H^2(\Omega)} \leq K_0 \|(\lambda Id - L)u\|_{L^2(\Omega)} \quad (10.9)$$

für alle $\lambda \in \Lambda_{-\delta, r_0} = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid |z| \geq r_0, \frac{\pi}{2} - \delta \leq |\arg z| \leq \pi \right\}$ und alle $u \in D(L)$ gilt.

Satz 4.10.9 Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt und offen, $\partial\Omega$ von der Klasse C^2 , L reell gleichmäßig elliptisch mit $a_{ij} \in C_B^1(\Omega)$, $b_i, c \in C(\overline{\Omega})$. Dann ist $L: L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$ mit

$$D(L) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$$

ein sektorieller Operator.

Beweisidee: Für $\lambda \in \Lambda_{-\delta, r_0}$ gilt nach Korollar 4.10.8

$$|\lambda| \|u\|_{L^2(\Omega)} \leq K_0 \|(\lambda Id - L)u\|_{L^2(\Omega)} \quad \text{für alle } u \in D(L).$$

□

Anhang A

Beispiele für Differentialgleichungen

Im Folgenden ist eine (unvollständige) Liste mehrerer physikalisch relevanter Differentialgleichungen zusammengestellt.

Gesucht ist jeweils: $u = u(x)$, $u: G \rightarrow \mathbb{R}$ mit $G \subset \mathbb{R}^n$ bzw. $u = u(t, x)$, $u: \mathbb{R} \times G \rightarrow \mathbb{R}$. Treten neben u, x und t Koeffizientenfunktionen auf, sind diese immer als gegeben anzusehen.

(a) Lineare Gleichungen

1. Laplace-Gleichung oder Potentialgleichung

$$\Delta u = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} u = 0.$$

2. Poisson-Gleichung $\Delta u = f$ ($f: G \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben)

3. Helmholtz-Gleichung oder Eigenwertgleichung $-\Delta u = \lambda u$ (λ Eigenwert).

4. Biharmonische Gleichung oder Plattengleichung

$$\Delta^2 u = \Delta(\Delta u) = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} u = 0.$$

5. Lineare Transportgleichung

$$\frac{\partial}{\partial t} u + \sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial}{\partial x_i} u = 0 \quad (b_i: \mathbb{R} \times G \rightarrow \mathbb{R} \text{ gegeben})$$

6. Liouville-Gleichung

$$\frac{\partial}{\partial t} u - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} (b_i u) = 0.$$

7. Wärmeleitungs- oder Diffusionsgleichung

$$\frac{\partial}{\partial t} u - \Delta u = 0.$$

8. Schrödinger-Gleichung

$$\frac{\partial}{\partial t} u = i\Delta u.$$

9. Kolmogorov-Gleichung oder allgemeine Diffusionsgleichung

$$\frac{\partial}{\partial t} u - \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} u - \sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial}{\partial x_i} u = 0 \quad (a_{ij}, b_i: \mathbb{R} \times G \longrightarrow \mathbb{R} \text{ gegeben}).$$

10. Fokker-Planck-Gleichung

$$\frac{\partial}{\partial t} u - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} (a_{ij}u) - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} (b_i u) = 0.$$

11. Wellengleichung

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} u - \Delta u = 0.$$

12. Telegraphengleichung

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} u + d \frac{\partial}{\partial t} u - \frac{\partial^2}{\partial x^2} u = 0 \quad (n = 1, d: \mathbb{R} \times G \rightarrow \mathbb{R}).$$

13. Allgemeine Wellengleichung

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} u - \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} u - \sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial}{\partial x_i} u = 0.$$

(b) Nichtlineare Gleichungen

1. Nichtlineare Poisson-Gleichung

$$-\Delta u = g(u) \quad (g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ gegeben})$$

2. Minimalflächengleichung

$$\operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{(1 + |\nabla u|^2)^{1/2}} \right) = 0.$$

3. Monge-Ampère-Gleichung

$$\det(D(\nabla u)) = f \quad (D(\nabla u) = \text{Hesse-Matrix von } u, f: G \longrightarrow \mathbb{R} \text{ gegeben}).$$

4. Hamilton–Jacobi–Gleichung

$$\frac{\partial}{\partial t} u + H(\nabla u) = 0 \quad (H: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} \text{ gegeben}).$$

5. Skalares Erhaltungsgesetz

$$\frac{\partial}{\partial t} u + \operatorname{div} F(u) = 0 \quad (F: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n \text{ gegeben}).$$

6. Burgers–Gleichung

$$\frac{\partial}{\partial t} u + u \frac{\partial}{\partial x} u = 0 \quad (n = 1).$$

7. Scalare Reactions–Diffusionsgleichung

$$\frac{\partial}{\partial t} u - \Delta u = g(u) \quad (g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \text{ gegeben}).$$

8. Porous Medium–Gleichung

$$\frac{\partial}{\partial t} u - \Delta(u^\gamma) = 0 \quad (\gamma > 0 \text{ gegeben}).$$

9. Nichtlineare Wellengleichung

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} u - \Delta u = g(u) \quad (g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \text{ gegeben}),$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} u - \operatorname{div} \nabla F(\nabla u) = 0 \quad (F: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} \text{ gegeben}).$$

10. Korteweg–de Vries Gleichung (kgV)

$$\frac{\partial}{\partial t} u + u \frac{\partial}{\partial x} u + \frac{\partial^3}{\partial x^3} u = 0 \quad (n = 1).$$

Anhang B

Eigenschaften von Sobolev-Räumen

(Literatur: Adams [Ada75])

Es sei jeweils $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $1 \leq p < \infty$ und $k, n \in \mathbb{N}$.

Dichtheitsaussagen

Meyers & Serrin: $C^\infty(\Omega) \cap W^{k,p}(\Omega)$ ist dicht in $W^{k,p}(\Omega)$.

Agmon: $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)|_\Omega$ ist dicht in $W^{k,p}(\Omega)$, Ω mit Segmenteigenschaft.

Definition: $C_0^\infty(\Omega)$ ist dicht in $W_0^{k,p}(\Omega)$.

Sobolev: Stetige Einbettungen auf Ω (vergl. [Ada75], Theorem 5.4)

Jeweils Ω mit Kegelbedingung:

$$(A) \quad k > \frac{n}{p}: W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow C_B(\Omega).$$

$$(B) \quad k = \frac{n}{p}: W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), \quad \text{für alle } q: p \leq q < \infty.$$

$$(C) \quad k < \frac{n}{p}: W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), \quad \text{für alle } q: p \leq q \leq p^* := \frac{np}{n-kp}.$$

Sobolev: Stetige Einbettungen auf $\bar{\Omega}$

$$(D) \quad k > \frac{n}{p}: W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow C(\bar{\Omega}), \quad \Omega \text{ mit Kegelbedingung \& Segmenteigenschaft.} \quad (0.1)$$

Alle Aussagen (A) bis (D) gelten entsprechend für $W_0^{k,p}(\Omega)$ anstatt $W^{k,p}(\Omega)$ ohne weitere Voraussetzungen an $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen.

Stetige Randwerte

Sei jeweils Ω beschränkt, $\partial\Omega$ Klasse C^1 :

Nullrandwerte: $k > \frac{n}{p}$: $W_0^{1,p}(\Omega) \cap W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow C(\overline{\Omega}) \cap \{u = 0 \text{ auf } \partial\Omega\}$.

Spuroperator S : $W^{1,p}(\Omega) \longrightarrow L^p(\partial\Omega)$ ist stetig, aber nicht injektiv.

Kompakte Einbettungen

Sei jeweils Ω beschränkt:

- **Rellich–Kondrachov:** $W^{k+1,p}(\Omega) \subset\subset W^{k,p}(\Omega)$, für Ω mit Segmenteigenschaft.
- **Rellich:** $W_0^{k+1,p}(\Omega) \subset\subset W_0^{k,p}(\Omega)$.

Die meisten der Einbettungen **(A)** bis **(D)** von oben sind für beschränktes Ω sogar kompakt (vergl. [Ada75], Theorem 6.2).

Anhang C

Ausgewählte Sätze aus der Funktionalanalysis

C.1 Elementare Begriffe

Ein zentraler Begriff der Funktionalanalysis ist die Vollständigkeit, welche mittels Cauchy-Folgen definiert ist.

Definition C.1.1 (Cauchy-Folge)

Sei (X, d) ein Vektorraum mit Metrik $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$, dann heißt eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ eine **Cauchy-Folge**, falls

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}, \quad \text{so dass} \quad d(x_n, x_m) < \varepsilon \quad \forall n, m > N.$$

Definition C.1.2 Falls jede Cauchy-Folge konvergent ist, dann heißt der Vektorraum **vollständig**.

Definition C.1.3 (a) Ein vollständiger normierter Raum $(X, \|\cdot\|)$ heißt **Banachraum**.

(b) Ein vollständiger Skalarproduktraum $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ heißt **Hilbertraum**.

Jeder Skalarproduktraum $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ist in natürlicher Weise auch ein normierter Raum mit der Norm

$$\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}, \quad x \in H.$$

Ebenso ist jeder normierte Raum $(X, \|\cdot\|)$ in natürlicher Weise auch ein metrischer linearer Raum mit der Metrik

$$d(x_1, x_2) := \|x_1 - x_2\|, \quad x_1, x_2 \in X.$$

C.2 Stetige lineare Funktionale

Von besonderer Bedeutung in der Funktionalanalysis sind die linearen, stetigen Funktionale, d.h. Abbildungen aus

$$X' = \mathcal{L}(X, \mathbb{R}) := \{F: X \rightarrow \mathbb{R} \mid F \text{ ist linear und stetig}\}.$$

X' heißt **Dualraum** von X .

Satz C.2.1 Ist $(X, \|\cdot\|)$ normierter Raum und F linear. Dann gilt:

$$F \text{ ist stetig} \iff \exists C > 0 \text{ mit } |F(x)| \leq C \cdot \|x\| \quad \forall x \in X \quad (\text{d.h. } F \text{ ist } \mathbf{beschränkt}).$$

Satz C.2.2 Ist $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum, dann ist auch $\mathcal{L}(X, \mathbb{R})$ ein normierter Raum vermöge

$$\|F\|_{\mathcal{L}(X, \mathbb{R})} = \sup_{\substack{\|x\| \leq 1 \\ x \in X}} |F(x)| \quad \text{für } F \in \mathcal{L}(X, \mathbb{R}).$$

$\mathcal{L}(X, \mathbb{R})$ ist vollständig und damit ein Banachraum, selbst wenn X nicht vollständig ist.

Literatur: [Yos80], Kapitel IV, §7, Theorem 1

Unter gewissen Bedingungen haben stetige lineare Funktionale, die nur auf einem Teilraum definiert sind, eine stetige Fortsetzung auf dem ganzen Raum.

Satz C.2.3 (Hahn–Banach):

Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter linearer Raum. $M \subset X$ sei ein linearer Teilraum und $F: M \rightarrow \mathbb{R}$ sei linear und stetig. Dann existiert eine lineare, stetige **Fortsetzung** $\tilde{F}: X \rightarrow \mathbb{R}$ von F mit

$$\|\tilde{F}\|_{\mathcal{L}(X, \mathbb{R})} = \|F\|_{\mathcal{L}(M, \mathbb{R})}.$$

Literatur: [Yos80], Kapitel IV, §5, Theorem 1

Satz C.2.4 (Riesz'scher Darstellungssatz)

Sei $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein Hilbertraum und $F \in \mathcal{L}(X, \mathbb{R})$. Dann existiert genau ein Element $x_F \in X$, so dass $F(x) = \langle x_F, x \rangle \quad \forall x \in X$ und es gilt $\|F\|_{\mathcal{L}(X, \mathbb{R})} = \|x_F\|$.

Literatur: [Yos80], Kapitel III, §6, Theorem (Riesz)

C.3 Schwache Konvergenz

Definition C.3.1 (*schwach konvergent*)

Sei $(X, \|\cdot\|)$ normierter Raum und X' sein Dualraum. Eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ heißt **schwach konvergent** gegen $x \in X$, falls

$$\lim_{n \rightarrow \infty} h(x_n) = h(x) \quad \forall h \in X' \quad (\text{Konvergenz in } \mathbb{R}) \quad (*)$$

Notation: $x_n \rightharpoonup x \quad (n \rightarrow \infty)$

Zur Abgrenzung bezeichnet man die Normkonvergenz

$$x_n \longrightarrow x \quad (n \rightarrow \infty) : \iff \|x_n - x\| \longrightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

auch als **starke** Konvergenz.

Eigenschaften:

- (i) der schwache Grenzwert $x \in X$ in (*) ist eindeutig (falls er existiert)
- (ii) $x_n \longrightarrow x \quad (n \rightarrow \infty) \implies x_n \rightharpoonup x \quad (n \rightarrow \infty)$,
d.h. starke Konvergenz impliziert schwache Konvergenz.

Mit $X'' := \mathcal{L}(X', \mathbb{R})$ bezeichnet man den **Bidualraum** von X . Ist $x \in X$, so kann auf kanonische Weise eine Abbildung $i(x) \in X''$ vermöge

$$i(x): X' \longrightarrow \mathbb{R}, \quad i(x)[x'] := x'(x) \quad \text{für } x' \in X' \quad (3.1)$$

definiert werden. Damit ist X kanonisch nach X'' eingebettet.

Satz C.3.2 Die Abbildung $i: X \longrightarrow X''$ aus (3.1) ist eine (im Allgemeinen nicht surjektive) lineare Isometrie.

Literatur: [Wer00], Satz III, 3.1

Definition C.3.3 Ein Banachraum $(X, \|\cdot\|)$ heißt **reflexiv**, wenn die kanonische Abbildung i von X surjektiv ist.

Beispiele:

- (i) ℓ^p (Folgenraum), $L^p(\Omega)$, $W^{k,p}(\Omega)$, $1 < p < \infty$ sind reflexiv
- (ii) Hilberträume sind reflexiv

Satz C.3.4 In einem reflexiven Raum $(X, \|\cdot\|)$ besitzt jede beschränkte Folge eine schwach konvergente Teilfolge.

Literatur: [Wer00], Satz IV, 3.7

C.4 Satz von der offenen Abbildung und Folgerungen

Definition C.4.1 *Eine Abbildung zwischen metrischen Räumen heißt **offen**, wenn sie offene Mengen auf offene Mengen abbildet.*

Offensichtlich ist eine offene lineare Abbildung immer surjektiv. Folgender Satz von Banach garantiert bei vollständigen Räumen die Umkehrung. Er ist einer der wichtigsten Sätze der Funktionalanalysis.

Satz C.4.2 (Satz von der offenen Abbildung)

Sind X und Y Banachräume und $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ surjektiv, dann ist T offen.

Beweis: Mit dem Baireschen Categoriesatz, siehe [Wer00], Satz IV. 3.3

Ist T zusätzlich bijektiv, liefert die Offenheit, dass Urbilder offenerer Mengen unter T^{-1} wieder offen sind, d.h. T^{-1} ist stetig.

Korollar C.4.3 *Sind X und Y Banachräume und ist $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ bijektiv, dann ist auch $T^{-1}: Y \rightarrow X$ stetig, d.h. T ist ein Isomorphismus.*

Index

- C^α -Theorie, 70
- Überdeckung
 - lokal endliche, 39
- $O(n)$ -Äquivarianz, 25
- „Moving plane“-Methode, 24
- a priori Abschätzung, 54, 69, 79
 - innere, 67
- A priori Schranken, 22
- adjungierte Gleichung, 61
- adjungierter Operator, 59
- Allen-Cahn Gleichung, 14, 15, 21
- Allgemeine Wellengleichung, 82
- Anfangsbedingung, 4
- Anfangsrandwertproblem, 3, 6
- beschränkt
 - wesentlich, 31
- Biharmonische Gleichung, 81
- Bilanzgleichung
 - skalare, 10
- Bilanzgleichungen
 - vektorwertig, 12
- bootstrap, 68
- Burgers-Gleichung, 83
- Cauchy-Problem, 77
- Courant-Fischer-Weyl, 74
- D'Alembert, 4
- diffeomorph, 44
- Differentialgleichung
 - elliptisch, 8
 - hyperbolisch, 8
 - linear, 81
 - nichtlinear, 82
 - parabolisch, 8
- Differentialoperator
 - Divergenzform, 49
 - elliptisch, 17
 - Normalform, 49
 - parabolisch, 25
- Differenzenquotient, 46
- Diffusionsgleichung, 6, 81
- dynamisch, 2
- Eigenfunktion
 - erste, 74
- Eigenvektor, 60
- Eigenwert, 60
 - minimaler, 64
- Eigenwertaufgabe, 62
- Eigenwerte
 - Anti-Monotonie Gebiet
 - schwache, 75
 - starke, 76
 - Charakterisierung, 65, 73
- Eigenwertgleichung, 81
- Einbettung, 32
 - Rellich-Kondrachov, 86
 - Sobolev, 85
- Einbettungssatz, 30, 40
 - Rellich, 41
 - Sobolev, 42
- Eindeutigkeitsresultat
 - elliptisch, 19
- EL, 50, 78
- Elastischer Körper, 13
- Elastodynamik, 13
- Elektrizität, 9
- Energie Ungleichung, 14
- Erhaltungsgesetz
 - skalares, 83
- Erhaltungssätze, 9
- Erweiterung von $W^{1,p}(\Omega)$ -Funktionen, 46
- Evolutionsgleichung, 25
- Faltung, 34
- Finite-Differenzen-Methode, 15
- Fokker-Planck-Gleichung, 82
- formal adjungierte, 60
- Fourier'sches Gesetz, 12
- Fourier-Darstellung, 65
- Fredholm-Alternative
 - Dirichlet, 61
 - kompakte Operatoren, 59
- Fredholm-Operator, 72
 - Index, 72
- Friedrichs-Ungleichung, 48
- Garding'sche Ungleichung, 52
- gemischte Randwerte, 57
- gleichmäßig elliptisch
 - komplex, 78
 - reell, 50

- Halbgruppe, 77
- Hamilton–Jacobi–Gleichung, 83
- harmonisch, 19
- Helmholtz–Gleichung, 81
- Hooke’sches Materialgesetz, 13
- Hopf’sches Randlemma, 19
- im Mittel gleichgradig stetig, 40
- Impulsbilanz, 13
- innere Kugelbedingung, 20
- Kegelbedingung, 42
- Kettenregel, 37
- Kirchhoff’sche Gesetze, 9
- klassische Lösung, 55
- Knotengebiete, 76
- Knotenmenge, 75
- Kolmogorov–Gleichung, 82
- kompakt, 40
 - enthalten, 33
 - folgen–, 40
 - Operator, 41
 - relativ, 40
- Konstitutives Gesetz, 9
- Kontinuitätsgleichung, 11
- Konvergenz
 - fast überall, 32
- Korteweg–de Vries Gleichung, 83
- Lösungen
 - klassische, 3
 - schwach, 51
 - schwache, 3
- Lamé’sches Materialgesetz, 13
- Laplace–Gleichung, 81
- Lebesgue–Räume, 31
- Leibniz–Formel, 38
- Liapunov–Funktional, 14
- Lineare Transportgleichung, 81
- Liouville–Gleichung, 81
- Massenerhaltung, 11
- Maximum–Minimum Prinzip, 74
- Maximumprinzip
 - schwach
 - elliptisch, 18
 - parabolisch, 25
 - stark
 - elliptisch, 20
 - parabolisch, 26
- Mechanik, 9
- Membran
 - rechteckige, 5
- Minimalflächengleichung, 82
- Minimax–Prinzip, 75
- Monge–Ampère–Gleichung, 82
- natürlicher Randoperator, 55, 57
- Navier–Stokes Gleichung, 11
- Nichtlineare Wellengleichung, 83
- Nullrandbedingungen, 45
- Nullrandwerte, 86
- Oberlösung, 19
- Orthonormalsystem
 - vollständiges, 65, 73
- parabolischer Rand, 25
- PDE
 - linear, 2
 - Ordnung, 1
 - quasilinear, 2
 - semilinear, 2
 - Systeme, 2
 - voll nichtlinear, 2
- Phasentrennung, 14
- Plattengleichung, 81
- Poincaré–Ungleichung, 48
- Poisson–Gleichung, 81
 - Nichtlineare, 82
- Porous Medium–Gleichung, 83
- Potentialgleichung, 8, 81
- Produktregel, 36
- Punktspektrum, 60
- Rand
 - Lipschitz, 71
 - nicht glatter, 71
- Randbedingung, 4
 - Dirichlet, 4
 - Neumann, 4
 - periodische, 4
- Randwerte, 30
- Randwertproblem
 - Dirichlet, 49
 - Neumann, 55
- Rayleigh–Quotient, 64
- Reaktions–Diffusionsgleichung, 14, 83
- Regularität, 30
- Resolventenabschätzung, 79
- Resolventenmenge, 60, 77
- Robin–Problem, 57
- Satz von
 - Agmon, 43, 85
 - Fatou, 32
 - Fischer–Riesz, 32
 - Fréchet–Kolmogorov, 40
 - Lax–Milgram, 52
 - Meyers–Serrin, 38, 39, 85
 - Riesz–Schauder, 60, 63
 - Weyl’sches Lemma, 68
- Schauder Theorie, 70
- Schrödinger–Gleichung, 82
- schwache
 - Ableitung, 36

- schwache Lösung, 51
 - Dirichlet, 63
 - im Distributionssinne, 51
 - Neumann, 56
- Schwingung einer Saite, 13
- Segmenteigenschaft, 43
- sektorieller Operator, 77, 80
- selbstadjungiert, 71
- Separationsansatz, 4, 6
- Sobolev-Räume, 30, 37
- Spannungstensor, 13
- Spektraltheorie, 78
- Spektrum, 60
 - kompakter Operatoren, 60
- Spuroperator, 45, 86
- stationär, 2
- Stokes-Gleichung, 11
- subharmonisch, 19
- superharmonisch, 19
- Superpositionsprinzip, 4
- Symmetrie, 23
- symmetrisch, 71

- Telegraphengleichung, 82
- Testfunktion, 29
- Testfunktionen, 33
- Träger, 33

- Ungleichung
 - Friedrichs, 48
 - Hölder, 31
 - Minkowski, 31
 - Poincaré, 48
- Unterlösung, 19

- Vergleichsprinzip
 - elliptisch, 18

- Wärmeleitungsgleichung, 6, 81
- Wellengleichung, 3, 13, 82

- Zerlegung der Eins, 39
- zero number, 28

Literaturverzeichnis

- [Ada75] R. Adams. *Sobolev Spaces*. Academic Press, New York, 1975.
- [Alt92] H.W. Alt. *Lineare Funktionalanalysis*. Springer, Berlin, 1992.
- [Ama95] H. Amann. *Linear and Quasilinear Parabolic Problems. Abstract Linear Theory. Vol. I*. Birkhäuser, 1995.
- [BHW93] K. Burg, H. Haf, and F. Wille. *Höhere Mathematik für Ingenieure. Band V*. Teubner, Stuttgart, 1993.
- [CH68] R. Courant and D. Hilbert. *Methoden der Mathematischen Physik I*. Springer, Berlin, 1968.
- [Eva98] L. C. Evans. *Partial Differential Equations*, volume 19 of *Graduate Studies in Math*. AMS, 1998.
- [Eva10] L. C. Evans. *Partial Differential Equations*, volume 19 of *Graduate Studies in Math, 2nd edition*. AMS, 2010.
- [For84] O. Forster. *Analysis 3*. Vieweg, Braunschweig, 1984.
- [Fri69] A. Friedman. *Partial Differential Equations*. Holt, Rinehart & Winston, 1969.
- [GNN79] B. Gidas, W. M. Ni, and L. Nirenberg. *Positive solutions on symmetric domains are symmetric*. *Communication Math. Phys.* 1979.
- [GT83] D. Gilbarg and N. Trudinger. *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*. Springer, Berlin, 1983.
- [GZZZ95] G. Grosche, V. Ziegler, D. Ziegler, and E. Zeidler. *Teubner-Taschenbuch der Mathematik, Teil II*. Teubner, Stuttgart, 1995.
- [Hen81] D. Henry. *Geometric Theory of Semilinear Parabolic Equations*. Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1981.
- [HMO84] J. Hale, L. T. Magalhaes, and W. M. Oliva. *An introduction to infinite dimensional dynamical systems - geometric theory.*, volume 47 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer, 1984.
- [HS89] R. Hardt and L. Simon. *Nodal sets of solutions of elliptic equations*, volume 30(2):505-522. *Journal of Differential Geometry*, 1989.
- [Joh82] F. John. *Partial Differential Equations*, volume 1 of *App. Math. Sci.* Springer, Berlin, New York, 1982.

- [Lad85] O. A. Ladyzhenskaya. *The Boundary Value Problems of Mathematical Physics*, volume 49 of *App. Math. Sci.* Springer, 1985.
- [LM72a] J.L. Lions and E. Magenes. *Non-Homogeneous Boundary Value Problems and Applications Vol I.* Springer, Berlin, 1972.
- [LM72b] J.L. Lions and E. Magenes. *Non-Homogeneous Boundary Value Problems and Applications Vol II.* Springer, Berlin, 1972.
- [LM73] J.L. Lions and E. Magenes. *Non-Homogeneous Boundary Value Problems and Applications Vol III.* Springer, Berlin, 1973.
- [LU68] O. A. Ladyzhenskaya and N. Uraltseva. *Linear and Quasilinear Elliptic Equations.* Academic Press, New York, 1968.
- [Mic78] S. G. Michlin. *Partielle Differentialgleichungen in der mathematischen Physik.* Akademie Verlag, 1978.
- [MP18] S. Maier-Pappe. *Funktionalanalysis.* Skript zur Vorlesung. 2018.
- [Neč83] J. Nečas. *Introduction to the Theory of Nonlinear Elliptic Equations.* Teubner-Texte, Leipzig, 1983.
- [Paz83] A. Pazy. *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations.* Springer, Berlin, 1983.
- [PW84] M. H. Protter and H. F. Weinberger. *Maximum Principles in Differential Equations.* Springer, Berlin, 1984.
- [Rau91] J. Rauch. *Partial Differential Equations.* Springer, Berlin, 1991.
- [RR93] M. Renardy and R. Rogers. *An Introduction to Partial Differential Equations*, volume 13 of *Texts in Applied Mathematics.* Springer, New York, 1993.
- [Sch77] M. Schechter. *Modern Methods in Partial Differential Equations.* McGraw-Hill, 1977.
- [Sho75] R. Showalter. *Hilbert Space Methods in Partial Differential Equations.* Pitman, Boston, 1975.
- [Smo83] J. Smoller. *Shock Waves and Reaction-Diffusion Equations*, volume 258 of *Comprehensive Studies in Mathematics.* Springer, Berlin, 1983.
- [Str95] W.A. Strauss. *Partielle Differentialgleichungen.* Vieweg, Braunschweig, 1995.
- [Wei74] H. F. Weinberger. *Variational Methods for Eigenvalue Approximation.* CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics. SIAM, Philadelphia, 1974.
- [Wer00] D. Werner. *Funktionalanalysis.* Springer, Berlin, 2000.
- [Wlo82] J. Wloka. *Partielle Differentialgleichungen.* Teubner, Stuttgart, 1982.
- [Yos80] K. Yosida. *Functional Analysis.* Springer, Berlin, 1980.