

„neue Formen“ der Portfoliotheorie; Allokation für Portfolios

von

Univ.-Prof. Dr. Stanislaus Maier-Paape
Mitarbeit von René Brenner und Andreas Platen

RWTH Aachen

email: maier@instmath.rwth-aachen.de

Inhalt:

- I. Markowitz Ansatz
- II. Trendfolgefilter im Portfoliomanagement
- III. TWR: multiplikative Returns
- IV. Erwarteter log Drawdown
- V. Fazit, offene Fragen und Literatur

Einleitung

Die grundlegende Frage von Moneymanagement bzw. Asset Allocation ist immer die der „**Positionsgrößenbestimmung**“. Dabei sei folgende **Situation** angenommen:

Gegeben seien M verschiedene **Investmentinstrumente** (z.B. Aktien oder **Trading-Systeme**), deren historische **Trade-Ergebnisse** für N Perioden (etwa tägliche Ergebnisse) bekannt sind. Angenommen diese Trade-Ergebnisse sind auch für die Zukunft charakteristisch, dann lautet die Aufgabe, eine **Aufteilung des Kapitals eines Investors** auf die M verschiedenen Investmentinstrumente so zu bestimmen, dass eine gewisse **Zielfunktion optimiert** wird. Bekannt sind also nur die **relativen Trade>Returns**

$$t_{i,k} = \frac{S_{i+1}^k - S_i^k}{S_i^k} \quad \begin{matrix} 1 \leq k \leq M \\ 1 \leq i \leq N \end{matrix} ,$$

wobei S_i^k = **Kurs** des k -ten **Investments** am i -ten **Tag**.

Die Ergebnisse der M verschiedenen (möglicherweise stochastisch abhängigen) Trading-Systeme ergeben daher durch historische Beobachtung eine gemeinsame Ergebnis-Matrix

$$\mathbf{T} := \left(t_{i,k} \right)_{\substack{1 \leq i \leq N \\ 1 \leq k \leq M}} \in \mathbb{R}^{N \times M}$$

mit Trade Ergebnissen $t_{i,k}$, $1 \leq i \leq N$, $1 \leq k \leq M$ des k -ten Systems/Aktie in der i -ten Periode/Realisierung. Also etwa

Periode	$System Y_1$	$System Y_2$	$\dots$	$System Y_M$
1	$t_{1,1}$	$t_{1,2}$	$\dots$	$t_{1,M}$
2	$t_{2,1}$	$t_{2,2}$	$\dots$	$t_{2,M}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
N	$t_{N,1}$	$t_{N,2}$	$\dots$	$t_{N,M}$

(1)

I. Markowitz–Ansatz

Wir nehmen wieder eine **gemeinsame Ergebnis-Matrix** T der M Aktien oder Trading-Systeme Y_j , $j = 1, \dots, M$ als gegeben an

Periode/Realisierung	<i>System</i> Y_1	<i>System</i> Y_2	$\dots$	<i>System</i> Y_M
1	$t_{1,1}$	$t_{1,2}$	$\dots$	$t_{1,M}$
2	$t_{2,1}$	$t_{2,2}$	$\dots$	$t_{2,M}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
N	$t_{N,1}$	$t_{N,2}$	$\dots$	$t_{N,M}$

Angenommen **jede Realisierung** hat die **gleiche Wahrscheinlichkeit** $p_i = \frac{1}{N}$, dann ist für $j = 1, \dots, M$ der **Erwartungswert** und die **Varianz** des **j -ten Systems** gegeben durch

$$\mu_j := \mathbb{E}(Y_j) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N t_{i,j}, \quad \sigma_j^2 := \text{Var}(Y_j) = \mathbb{E}(Y_j - \mu_j)^2.$$

Investiert man Anteile $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_M)$ in die Systeme $(Y_1, \dots, Y_M)$, erhält man als **additives Portfolio-Ergebnis** $Z = \sum_{j=1}^N \varphi_j Y_j$ mit **Erwartungswert** und **Varianz** des **Portfolios** gegeben durch

$$\mu_z(\varphi) := \mathbb{E}(Z) = \sum_{j=1}^M \varphi_j \mu_j = \varphi_1 \mu_1 + \dots + \varphi_M \mu_M,$$

$$\sigma_z^2(\varphi) := \text{Var}(Z) = \sum_{j,k=1}^M \varphi_j \varphi_k \text{Cov}(Y_j, Y_k)$$

Die typische **Markowitz Fragestellung** ist

$$\left(\begin{array}{l} \mu_z(\varphi) \stackrel{!}{=} \max \\ \text{s.t. } \sigma_z(\varphi) = \text{const} \\ \sum_{j=1}^M \varphi_j = 1 \end{array} \right) \quad \text{oder} \quad \left(\begin{array}{l} \sigma_z(\varphi) \stackrel{!}{=} \min \\ \text{s.t. } \mu_z(\varphi) = \text{const} \\ \sum_{j=1}^M \varphi_j = 1 \end{array} \right)$$

Links: **maximiere die Chance**;

Rechts: **minimiere das Risiko**

Effizienzkurve

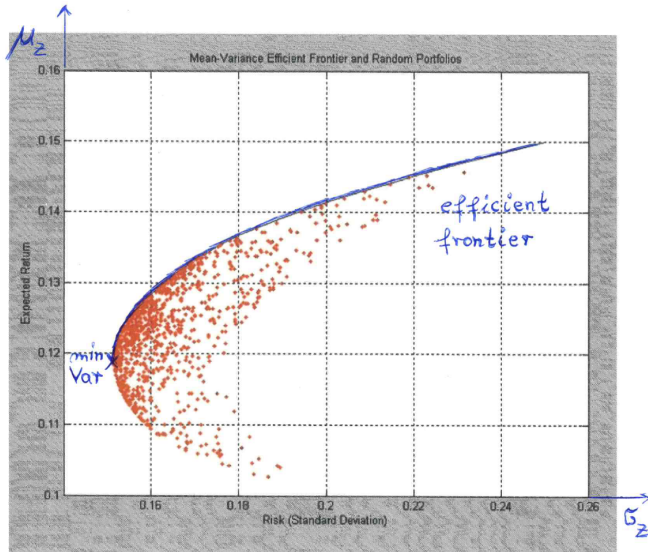


Abbildung: Beispiel einer „Effizienzkurve“ zum Markowitz-Ansatz

Empirisches Beispiel

Performance Indizes des STOXX Europe 600 ($M = 15$ Märkte):

Automobiles & Parts,	Banks,	Basic Resources,
Chemicals,	Construction & Mat.,	Financial Serv.,
Food & Beverages	Healthcare,	Ind.Goods & Serv.,
Insurance	Media,	Oil & Gas,
Technology,	Telecommunication,	Utilities.

Alle Daten vom **1.1.1987** bis **30.08.2017** (**Lernphase** bis Ende **1999**, **Backtest** Start **1.1.2000**).

Verschiedenes:

Nebenbedingung $0\% \leq \varphi_j \leq 20\%$. (zusätzlich zu $\sum_{j=1}^M \varphi_j = 1$)

Benchmarks:

(1) **gleichgewichtetes Portfolio** & (2) **STOXX 600**.

Die **Lösung** φ^{opt} wird am Ende der Lernperiode (Ende 1999) **numerisch** berechnet (z.B. mit der Methode der **steilsten Gradienten**).

Empirisches Beispiel

Equity Kurven für Markowitz Portfolios „Buy and Hold“ Daten

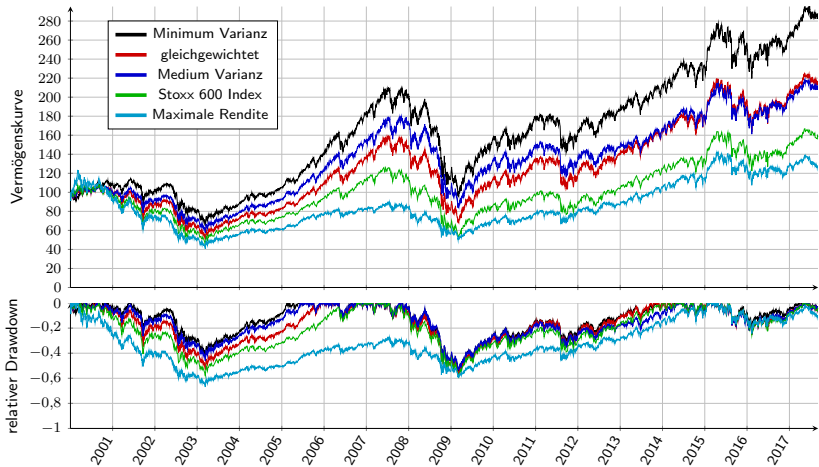


Abbildung: Markowitz Portfolios „Buy and Hold“ Daten

II. Trendfolgefiter im Portfoliomanagement

Da in der bisherigen Anwendung der „Buy and Hold“-Daten enorme **Drawdowns** beobachtet wurden, sollen die Daten der **15 Märkte** mit einem Trading-System ergänzt werden. Wir verwenden „**Moving-Average mit Envelope**“.



Abbildung: 3% **Schlauch** um den Moving Average (200 Tage); DAX Chart (2007-2016)

Empirisches Beispiel

Equity Kurven für **Markowitz Portfolios** auf **Trendfolger Daten**; MA 100 Tage, 3% Envelope

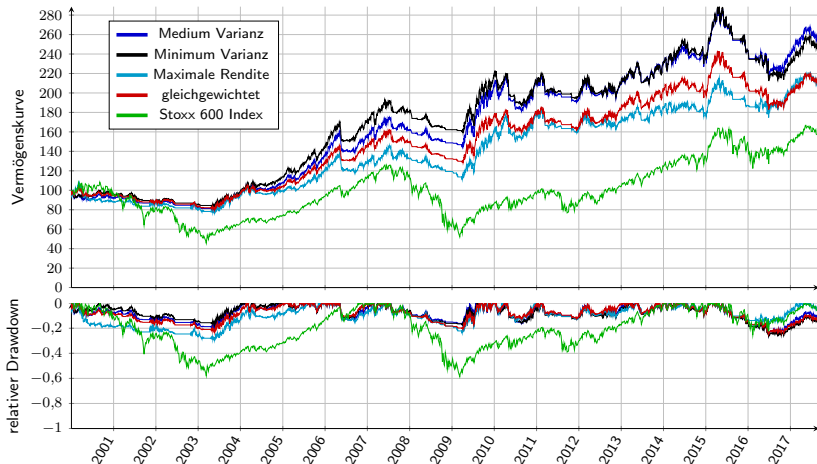


Abbildung: Markowitz Portfolios Trendfolger Daten

Empirisches Beispiel

Tabelle: Kennzahlen **Markowitz „Buy and Hold“** vs **Trendfolger Daten**;
MA 100 Tage, 3% Envelope

Handelssystem	Portfolio	Rendite p.a.	Ø rel DD	Max rel DD
Buy and Hold	gleichgewichtet	4,49%	16,68%	57,28%
	Min Varianz	6,17%	12,84%	54,26%
	Medium Varianz	4,36%	15,10%	53,47%
	Max Rendite	1,42%	32,82%	66,96%
Trendfolger	gleichgewichtet	4,35%	8,38%	24,77%
	Min Varianz	5,28%	7,82%	26,48%
	Medium Varianz	5,50%	8,01%	25,55%
	Max Rendite	4,40%	10,21%	29,55%

III. TWR: multiplikative Returns

Der Ertrag des Portfolios wird bei Markowitz über „additive“ Returns berechnet. Um Zinseszins-Effekte aber zu berücksichtigen, müssen die Portfolio>Returns „multiplikativ“ angesetzt werden. Wir nehmen wieder an, dass die täglichen Returns unserer M Trading-Systeme in einer Trade-Return Matrix

$$T := \left(t_{i,k} \right)_{\substack{1 \leq i \leq N \\ 1 \leq k \leq M}}$$

gegeben sind.

Wird wieder mit den Anteilen $\varphi := (\varphi_1, \dots, \varphi_M)^\top$, $\varphi_k \in \mathbb{R}$, investiert, definiert die Holding Period Return (HPR) der i -ten Periode

$$\text{HPR}_i(\varphi) := 1 + \sum_{k=1}^M \varphi_k t_{i,k}, \quad 1 \leq i \leq N \quad (2)$$

gerade den Faktor der Kapitaländerung in der i -ten Periode.

Terminal Wealth Relative (TWR)

Der **Terminal Wealth Relative (TWR)**, der das Verhältnis „**Endkapital/Anfangskapital**“ nach N Perioden angibt, wenn in allen Perioden jeweils die **Anteile** φ_k im **System** k investiert werden, ist dann gegeben durch

$$\begin{aligned} \text{TWR}_N(\varphi) &:= \prod_{i=1}^N \text{HPR}_i(\varphi) = \text{HPR}_1(\varphi) \cdot \text{HPR}_2(\varphi) \cdots \text{HPR}_N(\varphi) \\ &= \prod_{i=1}^N \left(1 + \sum_{k=1}^M \varphi_k t_{i,k} \right). \end{aligned} \quad (3)$$

Wollte man möglichst **viel Eintrag**, müsste dieser **maximiert** werden

$$\begin{aligned} \text{TWR}_N(\varphi) &\stackrel{!}{=} \max \\ \text{s.t. } \sum_{j=1}^M \varphi_j &= 1 \text{ und } 0 \leq \varphi_j \leq 20\% \end{aligned} \quad (4)$$

Arithmetisches gegen geometrisches Mittel

Vergleicht man die **Ziel-Funktion** der **Portfolio Erträge** des **TWR** und von **Markowitz**

$$\mu_z(\varphi) = \sum_{j=1}^M \varphi_j \mu_j = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left(\sum_{j=1}^M \varphi_j t_{i,j} \right) \quad (\text{Markowitz})$$

$$\Gamma(\varphi) = \left(\text{TWR}(\varphi) \right)^{1/N} = \prod_{i=1}^N \left(1 + \sum_{j=1}^M \varphi_j t_{i,j} \right)^{1/N} \quad (\text{TWR})$$

kann man sehen, dass der **wesentliche Unterschied** ist, dass die Ergebnisse einmal **arithmetisch** und einmal **geometrisch** (im Sinne von **Zinseszins**) gewichtet werden.

Empirisches Beispiel

Equity Kurven für **max TWR** und **max Rendite** Portfolios auf **Trendfolger Daten**; MA 100 Tage, 3% Envelope

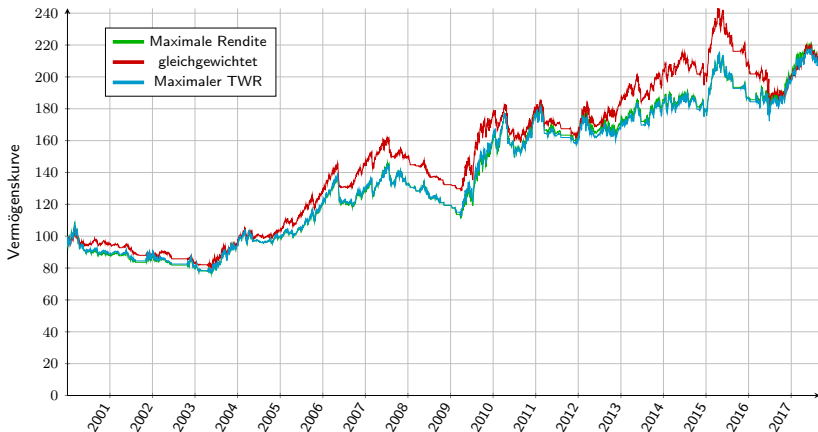


Abbildung: max TWR und max Rendite Portfolios Trendfolger Daten

IV. Erwarteter log Drawdown

Markowitz Portfolio Theorie benutzt $\sigma_z =$ Standard-Abweichung des Portfolios als Risiko-Maß. Ein viel relevanteres Risiko-Maß ist z.B. der W(ochen)-Drawdown der Portfolio Vermögenskurve.

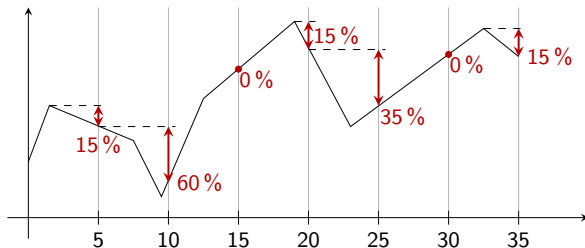


Abbildung: $\text{drawdown}(\varphi, i)$, $i =$ Nummer der Woche
(1 Woche $\hat{=}$ 5 Handelstage)

Für feste Anteile $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_M)$ die in die Systeme $(Y_1, \dots, Y_M)$ investiert werden, definiert man den (erwarteten) mittleren W-Drawdown

$$\text{woDD}(\varphi) := \mathbb{E}(\text{drawdown}(\varphi, \bullet)) \quad (5)$$

Empirische Anwendung (MP, Brenner, Platen)

In unserer nächsten Anwendung wollen wir das **Risiko minimieren** (statt die Chancen (TWR) zu maximieren). Für eine feste Konstante $c > 0$ betrachten wir

$$\begin{aligned} \text{woDD}(\varphi) &\stackrel{!}{=} \min \\ \text{s.t.} \quad \text{TWR}(\varphi) &= c, \quad \sum_{j=1}^M \varphi_j = 1 \text{ und } \quad 0 \leq \varphi_j \leq 20\% \end{aligned} \tag{6}$$

Um den **mittleren Wochen-Drawdown woDD**(φ) zu berechnen, verwendeten wir den mittleren Drawdown aller Wochen der Lernperiode. Die Lösung φ^{opt} am Ende der Lernperiode (Ende 1999) wurde wieder numerisch berechnet (wegen der fehlenden Differenzierbarkeit von woDD mit der **Subgradienten-Methode**).

Empirisches Beispiel

Equity **min woDD** Portfolios „Buy and Hold“ Daten

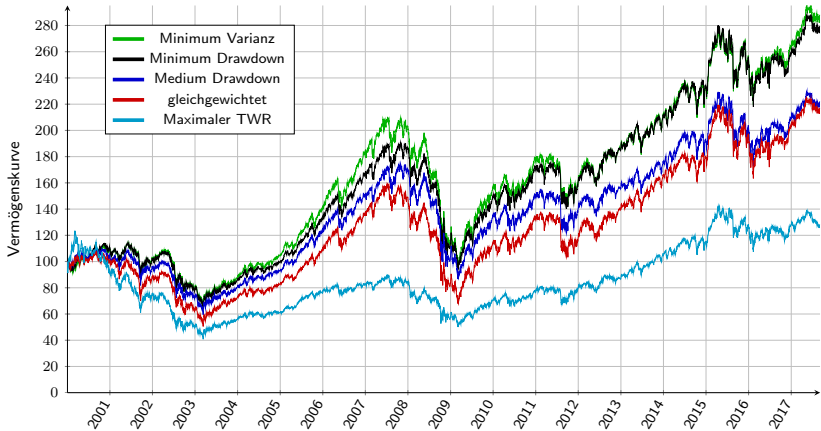


Abbildung: min woDD Portfolios „Buy and Hold“ Daten

Empirisches Beispiel

Equity **min woDD** Portfolios **Trendfolger Daten**; MA 100 Tage, 3% Envelope

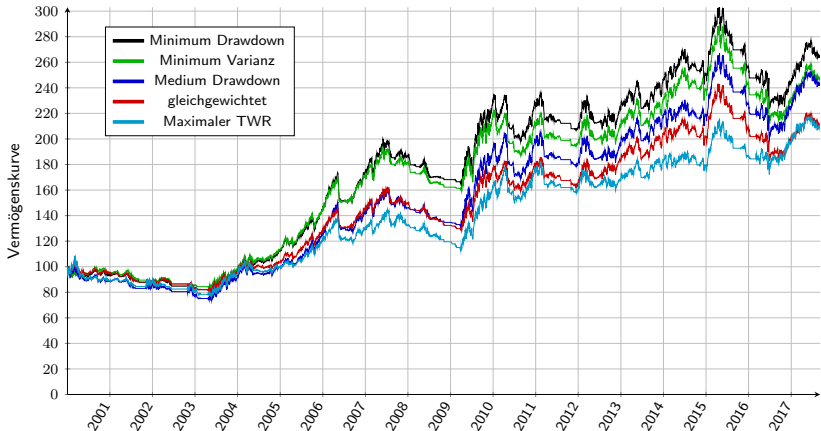


Abbildung: min woDD Portfolios Trendfolger Daten

Empirisches Beispiel

Tabelle: Kennzahlen für **max TWR** und **min woDD** Portfolios; „Buy and Hold“ vs **Trendfolger Daten**; MA 100 Tage, 3% Envelope

Handelssystem	Portfolio	Rendite p.a.	Ø rel DD	Max rel DD
Buy and Hold	gleichgewichtet	4,49%	16,68%	57,28%
	Min Varianz	6,17%	12,84%	54,26%
	Min woDD	5,99%	11,85%	50,45%
	Medium woDD	4,62%	13,46%	50,33%
	Max TWR	1,42%	32,83%	66,96%
Trendfolger	gleichgewichtet	4,35%	8,38%	24,77%
	Min Varianz	5,28%	7,82%	26,48%
	Min woDD	5,69%	8,09%	26,20%
	Medium woDD	5,18%	9,22%	26,76%
	Max TWR	4,33%	9,93%	28,95%

V. Fazit, offene Fragen und Literatur

Fazit

- Risikominimierung funktioniert deutlich besser als Renditemaximierung
- Trendfolgefilter schützen effektiv vor Finanzkrisen und großem maximalen relativen Drawdown
- min Varianz und min woDD (Wochen-Drawdown) sind (zumindest für die untersuchten Daten) in etwa gleichwertig gut, aber mit leichtem Vorsprung für min woDD

Offene Fragen

Weiteres Ziel: Umfangreiche Studie mit einem **echten Aktienportfolio** und eventuell **Vorselektion** der Aktien des Portfolios nach **Low/Medium Vola** und/oder **Momentum** Kriterien.

Literatur:

- [Maier-Paape, Zhu], A general framework for portfolio theory.
Part I.: theory and various models
- [Maier-Paape, Zhu], A general framework for portfolio theory.
Part II.: drawdown risk measures
- [Maier-Paape & Hermes], Existence and uniqueness for the multivariate discrete terminal wealth relative, Preprint, (2017)
- [Vince], The Mathematics of Money Management,
Risk Analysis Techniques for Traders, (1992)
- [Vince], The Leverage Space Trading Model: Reconciling Portfolio
Management, Strategies and Economic Theory, (2009)

vgl. auch www.instmath.rwth-aachen.de/preprints/home für meine Artikel

Kontakt: maier@instmath.rwth-aachen.de

Backup: Trading-System Donchian Channel

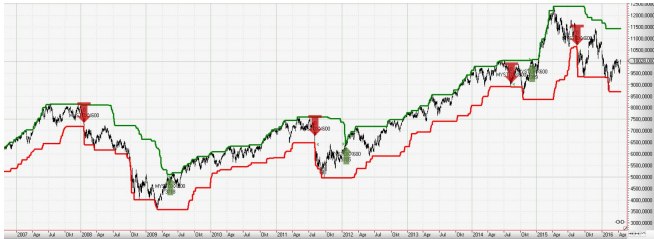


Abbildung: Breakout Trading-System („highest high“ Linie und „lowest low“ Line für $x = 120$ Tage); DAX Chart (2007-2016)

Das Donchian Trading-System ist auch Parameter abhängig (x Tage) und langzeit-trendfolgend, wobei wieder nur Long-Signale gehandelt werden.