

Bachelorarbeit

zur Erlangung des Grades
Bachelor of Science RWTH Aachen University

Log Risiko- und Nutzenfunktionen
für die fraktionale Trading Strategie im
„general framework of portfolio theory“

von

Jannik Henkes

vorgelegt der

Fakultät für Mathematik, Informatik und
Naturwissenschaften

der

Rheinisch-Westfälischen Technischen Hochschule Aachen

eingereicht am

16. September 2021

angefertigt am

Institut für Mathematik

Erstgutachter: Prof. Dr. Stanislaus Maier-Paape

Zweitgutachter: Prof. Dr. Erhard Cramer

Erklärung

Hiermit erkläre ich, Jannik Henkes,

- dass ich meine Bachelorarbeit selbstständig angefertigt habe und keine anderen als die angeführten Hilfen benutzt habe;
- dass ich die Übernahme wörtlicher Zitate, von Tabellen, Bildern und Programmen aus der Literatur oder anderen Quellen sowie die Verwendung der Gedanken anderer Autoren innerhalb der Arbeit erwähnt habe.

Aachen, den 16.09.2021

Ort, Datum

Jannik Henkes

Log Risiko- und Nutzenfunktionen für die fraktionale Trading Strategie im „general framework of portfolio theory“

Jannik Henkes
16. September 2021

Abstract

Ziel dieser Arbeit soll es sein, einen detaillierten Überblick der Portfolio-Optimierung mit logarithmischen (log) Risiko- und Nutzenfunktionen zu verschaffen. Dabei nutzen wir ein Mehr-Perioden-Finanzmarkt-Modell und die fraktionale Trading Strategie, bei der wir eine Aufteilung unseres Kapitals auf $M \in \mathbb{N}$ riskante und eine risikofreie Anlage suchen. Insbesondere verwenden wir Konzepte für allgemeine Trading Strategien aus Platen [12], sowie einige Erkenntnisse aus Brenner [2], werden diese gegenüberstellen und uns um eine einfachere Darstellung bemühen. Die basierend auf der logarithmierten Kapitalentwicklung konstruierten, schon bekannten Funktionen *log-TWR* (TWR = Terminal Wealth Relative) und *Expected log DrawDown* möchten wir um die neue Risikofunktion *Expected log RunDown* ergänzen. Neben theoretischen Untersuchungen werden wir diese Funktionen empirisch analysieren und rückwirkend am realen Finanzmarkt testen.

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung	9
2. Ein-Perioden-Finanzmarkt	12
2.1. Ein-Perioden-Finanzmarkt-Modell	12
2.2. Growth Optimal Portfolio	13
2.3. Leverage Space Portfolio	15
2.4. Eine Betrachtung ohne risikofreie Anlage	17
3. Mehr-Perioden-Finanzmarkt	22
3.1. Mehr-Perioden-Finanzmarkt-Modell	22
3.2. Growth Optimal Trading Strategie	27
3.2.1. Optimierung auf a posteriori zulässigen Mengen	31
3.2.2. Optimierung auf a priori zulässigen Mengen	34
3.3. Maximum log-TWR Optimierungsproblem mit DrawDown	38
3.3.1. Optimierung auf a posteriori zulässigen Mengen	39
3.3.2. Optimierung auf a priori zulässigen Mengen	41
4. Konstruktion und Analyse einer neuen log Risikofunktion	47
4.1. Expected log RunDown Risikofunktion	48
4.2. Optimierungsproblem mit RunDown und DrawDown	49
5. Konsistenz der Optimierungsprobleme	53
5.1. Growth Optimal Portfolio	53
5.2. Growth Optimal Trading Strategie	54
5.3. Maximum log TWR Optimierungsproblem mit Nebenbedingung	55
6. Empirische Untersuchungen	56
6.1. Einführung POEM	56
6.2. Statistische Kennzahlen	57
6.3. Growth Optimal Portfolio	58
6.4. Growth Optimal Trading Strategie	60
6.5. Growth Optimal Trading Strategie mit Nebenbedingung	62
6.6. Reflektion und Kritik der Analysen	64
7. Schlussbetrachtung	65
A. Anhang	66
A.1. Konvexe Analysis	66
A.2. Wahrscheinlichkeitsrechnung	67
A.3. Programmcode	68

1. Einleitung

Der Aktienmarkt bietet Chancen und Risiken. Besonders in den letzten Jahren ist der Anteil der Privatpersonen, die am Markt partizipieren, stark gestiegen. Diese möchten - genauso wie Investmentunternehmen - in eine Auswahl von $M \in \mathbb{N}$ Anlagen investieren und sich damit ein Portfolio zusammenstellen, durch welches sie sich die Erfüllung ihrer Ziele erhoffen. Diese Ziele können von einer sicheren Altersvorsorge bis hin zur reinen Steigerung des Vermögens reichen.

Ein Portfolio ist eine Zusammenstellung von Finanzanlagen und Unternehmensanteilen, und um sich ein solches zusammenzustellen und zu verwalten, wird oft eine Trading Strategie verwendet. Eine weit bekannte Trading Strategie ist beispielsweise *Buy and Hold*, bei der die investierende Person ein Portfolio zusammenstellt und diese Geldanlage langfristig nicht verändert. Wir werden uns überwiegend mit der *fraktionalen Trading Strategie* beschäftigen, d.h. wir überlegen uns vorrangig wie viel Prozent unseres Kapitals wir in eine Anlage investieren und errechnen damit die notwendige Anzahl an Aktien, die gekauft werden müssen. Dann wird das Kapital nach jeder Periode realloziert, sodass in der neuen Periode diese Aufteilung wieder besteht. Dabei ist eine zulässige Aufteilung ein Element aus der Menge

$$\mathcal{A}_1 := \left\{ f \in \mathbb{R}^{M+1} \mid \sum_{i=0}^M f_i = 1 \right\}.$$

Unser Ziel ist es, eine optimale Aufteilung für unser Kapital zu erreichen. Dabei ist zu beachten, dass wir $M \in \mathbb{N}$ riskante Finanzanlagen und eine risikofreie Anlage wie z.B. das Bankkonto betrachten.

Die Entscheidung, wie viel in welche Anlage investiert werden soll, wird oft durch Emotionen der investierenden Person beeinflusst. Im Gegensatz zu den meisten Investmentunternehmen sind Privatpersonen meist besonders anfällig für emotionale Entscheidungen. Daher begannen Wissenschaftler in der Mitte des 20. Jahrhunderts den Aktienmarkt mathematisch zu analysieren, um auf Grundlage von Modellen logische und transparente Entscheidungen zu treffen.

In der Portfoliotheorie ist es von enormer Bedeutung, welche Ziele die investierende Person hat und wie diese den Nutzen und das Risiko eines Portfolios bewertet. Im Allgemeinen wird versucht, den Nutzen eines Portfolios zu maximieren und das Risiko zu minimieren. Oft sind Nutzen und Risiko dabei positiv korreliert, d.h. bei ansteigendem Nutzen steigt auch das Risiko. Unter diesen Umständen ist das Problem nicht lösbar, weshalb wir versuchen werden den Nutzen zu maximieren und gleichzeitig das Risiko zu beschränken.

Um das Risiko und den Nutzen einer Aufteilung $f \in \mathcal{A}_1$ zu messen, werden Risikofunktionen \mathfrak{r} und Nutzenfunktionen u verwendet. Diese müssen bestimmte Eigenschaften erfüllen, damit wir eine Optimierung durchführen können. Beispielsweise sollte \mathfrak{r} konvex und u konkav sein. Ziel ist es dann, wie schon oben erwähnt, das Problem

$$\begin{aligned} \max_{f \in \mathcal{A}} u(f) \\ \text{s.t. } \mathfrak{r}(f) \leq r \end{aligned}$$

für eine Teilmenge $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}_1$ und ein vorgegebenes $r \geq 0$ eindeutig zu lösen. Genauso gut könnte man die Risikofunktion unter der Nebenbedingung, dass die Nutzenfunktion einen bestimmten vorgegebenen Wert überschreitet, minimieren. Diese Analyse ist jedoch analog und wir werden alle notwendigen Eigenschaften der Funktionen nachweisen, sodass eine solche Optimierung ohne Umstände möglich ist.

Eine besondere Stellung in dieser Theorie sind Nutzen- und Risikofunktionen basierend auf dem natürlichen Logarithmus (\log), welche von der logarithmierten Kapitalentwicklung abgeleitet werden. Mit diesen möchten wir uns in dieser Arbeit besonders beschäftigen. Dabei werden wir eine umfassende mathematische Analyse der Funktionen vornehmen und den theoretischen Grundstein für eine Portfolio Optimierung mit diesen legen.

In **Kapitel 2** werden wir als Einführung in das Thema den Ein-Perioden-Finanzmarkt kennenlernen. Dort wird jede Periode einzeln betrachtet, ohne dass ein Zusammenhang zwischen der jetzigen und vorherigen Periode existiert, wobei eine Periode beispielsweise einem Tag, einer Woche oder einem Monat entsprechen kann. Für eine solche Periode werden wir dann die Existenz eines optimalen Portfolios bzgl. der vorgestellten \log Nutzen- und Risikofunktionen nachweisen. Dabei beschäftigen wir uns besonders mit der Theorie rund um das *Growth Optimal Portfolio*.

Dieses Konzept werden wir dann in **Kapitel 3** auf einen Mehr-Perioden-Finanzmarkt mit $N \in \mathbb{N}$ Perioden erweitern. Dabei wird insbesondere das Portfolio zu einer Trading Strategie ausgebaut, denn im Mehr-Perioden-Finanzmarkt wissen wir zu einem Zeitpunkt, was in den vorherigen Perioden passiert ist und können darauf im weiteren Verlauf reagieren. Insbesondere wird dann auch das *Growth Optimal Portfolio* zu einer *Growth Optimal Trading Strategie* erweitert. Dabei wird die Nutzenfunktion \log -TWR (TWR = Terminal Wealth Relative) und die Risikofunktion Expected \log DrawDown eine besondere Rolle spielen (vgl. Abb. 1.1).

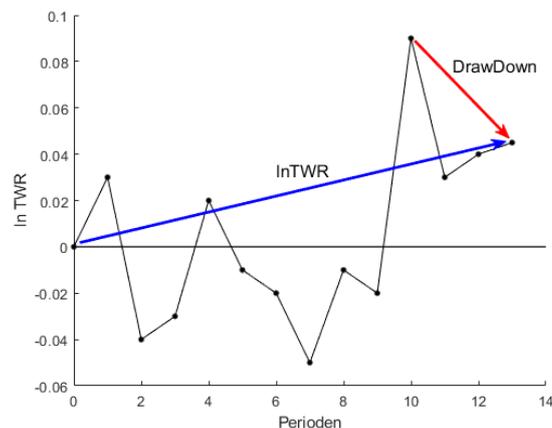


Abbildung 1.1.: Eine beispielhafte Kapitalentwicklung über 13 Perioden mit \log -TWR (\ln TWR) und Expected \log DrawDown (DrawDown)

Für die Optimierung ist es von enormer Bedeutung, auf welchen Mengen sie stattfindet. Natürlich könnten wir versuchen, eine Optimierung auf der gesamten Menge \mathcal{A}_1 durchzuführen. Jedoch müssten wir dann auf einige Eigenschaften verzichten und können das Problem unter Umständen nicht lösen. Daher müssen wir uns auf Teilmengen von \mathcal{A}_1 beschränken. Dabei möchten wir in Kapitel 3 zwei Ansätze gegenüberstellen: einerseits die *a posteriori Optimierung*, welche von Platen in [12] verwendet wird, und andererseits die *a priori Optimierung*, welche von Brenner

in [2] analysiert wird. Diese unterscheiden sich in den Voraussetzungen und Analysen insofern, dass a posteriori die Möglichkeit besteht einzelne Portfolios auszuschließen, durch die wir beispielsweise insolvent gehen würden. Also findet in diesem Szenario die Optimierung nur auf einer Menge statt, bei der wir den Bankrott vermeiden. Dies im Vorhinein zu wissen, ist in der Praxis jedoch nicht möglich, weshalb wir im a priori Ansatz andere Eigenschaften an zulässige Portfolios fordern müssen und damit zwar eine grundsätzlich beliebige Teilmenge von \mathcal{A}_1 verwenden können, diese jedoch andere einschränkende Voraussetzungen erfüllen muss.

Darüber hinaus hat Brenner [2] erkannt, dass sich beim fraktionalen Trading die logarithmierte Kapitalentwicklung einfacher darstellen lässt. Durch seine Konsistenz-Analysen muss eine komplizierte Notation verwendet werden, was seine Arbeit leider sehr technisch macht. Dies ist bei Platen [12] nicht anders, da er größtenteils allgemeine Trading Strategien untersucht hat. Ein Ziel dieser Arbeit soll es daher auch sein, diese Ideen zusammen zu bringen und sich um eine praktischere Darstellung zu bemühen.

Die in Kapitel 3 vorgestellten logarithmischen Nutzen- und Risikofunktionen log-TWR und Expected log DrawDown möchten wir in **Kapitel 4** durch eine neue log Risikofunktion Run-Down ergänzen und weitere Versuche zur Konstruktion neuer log Nutzenfunktionen diskutieren. Dort werden wir auch ein Optimierungsproblem betrachten, welches auf fast alle Resultate aus den vorherigen Kapiteln zurückgreift und eine zusammenfassende mathematische Darstellung zur Optimierung mit den log Risiko- und Nutzenfunktionen bietet.

Kapitel 5 dient zur Vorbereitung der empirischen Untersuchungen. Wir wissen aus den vorangegangenen Kapiteln, dass eine - meist sogar eindeutige - Lösung existiert, jedoch müssen wir diese noch empirisch bestimmen. In Brenner [2] wurde gezeigt, dass Lösungen von empirischen Optimierungsproblemen, falls man sukzessive immer mehr Informationen über den zugrunde liegenden (theoretischen) Markt im Hintergrund erhält, gegen eine Lösung des theoretischen Optimierungsproblems konvergieren. Wir werden uns darauf beschränken, die Idee für eine solche Analyse vorzustellen.

In **Kapitel 6** widmen wir uns dann den empirischen Untersuchungen, bei denen wir die Theorie aus den vorherigen Kapiteln rückwirkend testen möchten. Dabei werden wir sehen, was passiert wäre, wenn wir in den letzten fast 20 Jahren unsere entwickelten Strategien angewendet hätten. Dort wird sich herausstellen, ob das mathematische Modell in der Praxis gut funktioniert und was noch für eine echte Anwendung der Theorie getan werden muss.

Abschließend werden wir die Ergebnisse der Analyse in **Kapitel 7** kurz zusammenfassen und einen weiteren Ausblick geben.

2. Ein-Perioden-Finanzmarkt

In diesem Kapitel betrachten wir einige grundlegende Definitionen und Eigenschaften eines Ein-Perioden-Finanzmarktes. Mit Hilfe dieser wollen wir Existenz und Eindeutigkeit einiger Probleme rund um das Growth Optimal Portfolio beweisen. Das grundlegende Modell und erste Analysen stammen dabei von Maier-Paape und Zhu [11].

2.1. Ein-Perioden-Finanzmarkt-Modell

In einem ersten Ansatz betrachten wir einen Ein-Perioden-Finanzmarkt mit einer endlichen Menge an Ereignissen. Dazu sei $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_L\}$ die Ereignismenge mit $L \in \mathbb{N}$ und (Ω, Σ, P) der dazugehörige Wahrscheinlichkeitsraum, wobei Σ die σ -Algebra von Ω darstellt. Dann beschreiben wir mit $\mathcal{L}^0(\mathbb{R}) := \mathcal{L}^0(\Omega, \Sigma, P; \mathbb{R})$ die Menge aller Zufallsvariablen auf diesem Wahrscheinlichkeitsraum. Diese Zufallsvariablen beschreiben die Auszahlung einer Finanzanlage. Darüber hinaus beschreibt $\mathcal{L}^0(\mathbb{R}_{\geq 0}) := \mathcal{L}^0(\Omega, \Sigma, P; \mathbb{R}_{\geq 0})$ die Menge aller nicht negativen Zufallsvariablen in $\mathcal{L}^0(\mathbb{R})$, $\mathcal{L}^0(\mathbb{R}^M) := \mathcal{L}^0(\Omega, \Sigma, P; \mathbb{R}^M)$ die Menge aller Zufallsvektoren mit Werten in \mathbb{R}^M , wobei jede Komponente ein Element von $\mathcal{L}^0(\mathbb{R})$ ist, und analog definieren wir $\mathcal{L}^0(\mathbb{R}_{\geq 0}^M) := \mathcal{L}^0(\Omega, \Sigma, P; \mathbb{R}_{\geq 0}^M)$.

Definition 2.1.1 (Ein-Perioden-Finanzmarkt, vgl. Maier-Paape und Zhu [11, Def. 1]). Wir nennen $S_t = (S_t^0, S_t^1, \dots, S_t^M)^T$ mit $t \in \{0, 1\}$, einen Ein-Perioden-Finanzmarkt, falls $S_0 \in \mathbb{R}_{>0}^{M+1}$ und $S_1 \in (0, \infty) \times \mathcal{L}^0(\mathbb{R}_{\geq 0}^M)$. Dabei repräsentiert $S_0^0 = 1$, $S_1^0 = R > 0$ eine risikofreie Anlage mit positiver Rendite, falls $R > 1$. Die restlichen Komponenten S_t^m , $m = 1, \dots, M$, stellen den Preis der m -ten riskanten Finanzanlage zur Zeit t dar.

Ein Portfolio ist ein Spaltenvektor $x = (x_0, x_1, \dots, x_M)^T \in \mathbb{R}^{M+1}$, dessen Komponenten x_m die Menge an Anteilen am m -ten Vermögenswert darstellen. Dann ist insbesondere $S_t^m x_m$ der Anteil am investierten Kapital in den m -ten Vermögenswert zum Zeitpunkt t . Wir werden oft die Notation $\hat{S}_t = (S_t^1, \dots, S_t^M)^T$ und $\hat{x} = (x_1, \dots, x_M)^T$ verwenden, falls wir uns nur mit dem riskanten Teil beschäftigen wollen.

Definition 2.1.2 (Zulässige Portfolios, vgl. Maier-Paape und Zhu [11, Def. 2]). Eine Menge $A \subset \mathbb{R}^{M+1}$ nennen wir eine Menge von zulässigen Portfolios, falls A nicht leer, abgeschlossen und konvex ist. Darüber hinaus hat A unit initial cost, falls $S_0^T x = 1$ für alle $x \in A$.

Definition 2.1.3 (Risikolose Portfolios, vgl. Maier-Paape und Zhu [11, Def. 4]). Sei $x \in \mathbb{R}^{M+1}$ ein Portfolio. Dann nennen wir x risikolos, falls es einen mindestens so hohen Ertrag wie die risikofreie Anlage hat, d.h.

$$P\left((S_1 - RS_0)^T x \geq 0\right) = 1.$$

Außerdem ist ein Portfolio trivial, falls $\hat{x} = \hat{0} \in \mathbb{R}^M$.

Es existiert immer das triviale, risikolose Portfolio, indem das gesamte Vermögen in die risikofreie Anlage S_t^0 investiert wird, z.B. $x^* := (1, \hat{0}^T)^T$. Dieses Portfolio hat insbesondere unit initial cost. Im realen Markt wird nicht erwartet, dass es ein nicht triviales risikoloses Portfolio gibt. Daher beschränken wir uns im Folgenden meistens auch auf Märkte, die kein nicht triviales risikoloses Portfolio enthalten.

2.2. Growth Optimal Portfolio

Nun wollen wir uns einem ersten Optimierungsproblem widmen, wobei \ln den natürlichen Logarithmus bezeichnet. Um aus diesem eine Funktion auf ganz \mathbb{R} zu machen, setzen wir $\ln(t) = -\infty$ für alle $t \leq 0$. Damit erhalten wir das Problem

$$\begin{aligned} \max_{x \in \mathbb{R}^{M+1}} E(\ln(S_1^T x)) \\ \text{s.t. } S_0^T x = 1, \end{aligned} \quad (2.2.1)$$

bei dem wir den erwarteten logarithmierten Payoff des Portfolios x maximieren möchten. Dabei gibt uns $S_1^T x$ den Wert unseres Kapitals in der ersten Periode. Eine Lösung dieses Problems würde das schnellste kumulierte Wachstum des Kapitals bieten. Dieses Problem gehört zur Growth Portfolio Theory und wurde von John Lintner in [7] vorgestellt und ist verbunden mit der Arbeit von John L. Kelly in [6]. Doch bevor wir dieses Problem lösen, benötigen wir noch zwei Lemmata.

Lemma 2.2.1 (Strenge Konkavität, vgl. Maier-Paape und Zhu [11, Prop. 6]). *Sei S_t ein Ein-Perioden-Finanzmarkt wie in Def. 2.1.1, welcher kein nicht triviales risikoloses Portfolio enthält (vgl. Def. 2.1.3) und sei A eine Menge von zulässigen Portfolios mit unit initial cost (siehe Def. 2.1.2). Dann ist die Funktion $x \mapsto E(\ln(S_1^T x))$ streng konkav auf A (siehe Def. A.1.1).*

Beweis. Seien $x^1 \neq x^2$ zwei Portfolios aus A . Dann unterscheiden sich die Portfolios ebenfalls im riskanten Teil, d.h. $\hat{x}^1 \neq \hat{x}^2$. Denn angenommen, es gilt $\hat{x}^1 = \hat{x}^2$, dann folgt

$$1 = S_0^T x^i = S_0^0 x_0^i + \widehat{S}_0^T \hat{x}^i, \quad i \in \{1, 2\},$$

auf Grund der unit initial cost-Bedingung und wir erhalten mit $S_0^0 = 1$

$$x_0^1 = 1 - \widehat{S}_0^T \hat{x}^1 = 1 - \widehat{S}_0^T \hat{x}^2 = x_0^2.$$

Damit sind auch die risikofreien Anlagen gleich und es würde $x^1 = x^2$ gelten, was ein Widerspruch zur Annahme darstellt. Nun wollen wir noch zeigen, dass für $x^1 \neq x^2$ immer $S_1^T x^1 \neq S_1^T x^2$ gilt. Denn dann folgt die Behauptung auf Grund der strengen Konkavität des natürlichen Logarithmus und der Linearität des Erwartungswertes. Dazu definieren wir die folgende Matrix

$$G := \begin{bmatrix} S_1^1(\omega_1) - RS_0^1 & S_1^2(\omega_1) - RS_0^2 & \dots & S_1^M(\omega_1) - RS_0^M \\ S_1^1(\omega_2) - RS_0^1 & S_1^2(\omega_2) - RS_0^2 & \dots & S_1^M(\omega_2) - RS_0^M \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ S_1^1(\omega_L) - RS_0^1 & S_1^2(\omega_L) - RS_0^2 & \dots & S_1^M(\omega_L) - RS_0^M \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{L \times M}$$

und stellen fest, dass diese vollen Rang hat. Denn angenommen, G hat nicht vollen Rang, dann existiert ein $\hat{x} \in \mathbb{R}^M \setminus \{0\}$ mit $G\hat{x} = 0$. Dies impliziert jedoch

$$(\widehat{S}_1(\omega_i) - R\widehat{S}_0)^T \hat{x} = 0, \quad i = \{1, \dots, L\},$$

womit $x := (x_0, \hat{x}) \in \mathbb{R}^{M+1}$ ein nicht triviales risikoloses Portfolio wäre. Dabei wählen wir $x_0 \in \mathbb{R}$ als $x_0 := 1 - \widehat{S}_0^T \hat{x}$, sodass die unit initial cost-Bedingung erfüllt ist. Damit erhalten wir einen Widerspruch zu der Annahme, es existiere kein nicht triviales risikoloses Portfolio. Weiter folgt wieder mit der unit initial cost Bedingung

$$\begin{aligned} R + (\widehat{S}_1 - R\widehat{S}_0)^T \hat{x} &= R + \widehat{S}_1^T \hat{x} - R\widehat{S}_0^T \hat{x} = R + \widehat{S}_1^T \hat{x} - R(1 - S_0^0 x_0^i) \\ &= \widehat{S}_1^T \hat{x} + RS_0^0 x_0^i = \widehat{S}_1^T \hat{x} + S_1^0 x_0^i = S_1^T x^i. \end{aligned}$$

Da G vollen Rang hat und $\hat{x}^1 \neq \hat{x}^2$ gilt, folgt auch $G\hat{x}^1 \neq G\hat{x}^2$ und wir schließen wie behauptet auf $S_1^T x^1 \neq S_1^T x^2$, denn es gilt

$$S_1^T x^1 = R + (\hat{S}_1 - R\hat{S}_0)^T \hat{x}^1 \neq R + (\hat{S}_1 - R\hat{S}_0)^T \hat{x}^2 = S_1^T x^2.$$

□

Lemma 2.2.2 (Kompakte Superlevels, vgl. Maier-Paape und Zhu [11, Lemma 2]). *Sei S_t ein Ein-Perioden-Finanzmarkt wie in Def. 2.1.1, welcher kein nicht triviales risikoloses Portfolio enthält (vgl. Def. 2.1.3). Dann ist*

$$B_\mu := \left\{ x \in \mathbb{R}^{M+1} \mid E(\ln(S_1^T x)) \geq \mu, S_0^T x = 1 \right\}$$

für alle $\mu \in \mathbb{R}$ kompakt.

Beweis. Da \mathbb{R}^{M+1} endlich-dimensional ist, beweisen wir Abgeschlossenheit und Beschränktheit der Menge B_μ für ein $\mu \in \mathbb{R}$ beliebig aber fest. Zuerst zeigen wir die Abgeschlossenheit. Sei dazu $(x^n)_{n \in \mathbb{N}} \in B_\mu^\mathbb{N}$ eine Folge, die gegen einen Grenzwert $x^* \in \mathbb{R}^{M+1}$ konvergiert. Dann gilt einerseits

$$S_0^T x^* = \lim_{n \rightarrow \infty} S_0^T x^n = 1$$

und andererseits auf Grund der Oberhalbstetigkeit (siehe Def. A.1.3) des natürlichen Logarithmus'

$$E(\ln(S_1^T x^*)) \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} E(\ln(S_1^T x^n)) \geq \mu.$$

Damit ist $x^* \in B_\mu$ und B_μ abgeschlossen. Alternativ folgt diese Aussage direkt mit Theorem A.1.4.

Nehmen wir nun an, die Menge sei unbeschränkt. Dann existiert eine Folge von Portfolios $(x^n)_{n \in \mathbb{N}} \in B_\mu^\mathbb{N}$ mit $\|x^n\| \rightarrow \infty$ für $n \rightarrow \infty$ und

$$S_0^T x^n = 1, \tag{2.2.2}$$

$$E(\ln(S_1^T x^n)) \geq \mu \tag{2.2.3}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Aus (2.2.2) folgt insbesondere $\hat{S}_0^T \hat{x}^n = 1 - S_0^0 x^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und damit muss $\|\hat{x}^n\| \rightarrow \infty$ für $n \rightarrow \infty$ gelten. Weiter stellen wir fest, dass

$$y^n := \frac{x^n}{\|\hat{x}^n\|} = \left(\frac{x_0^n}{\|\hat{x}^n\|}, \frac{\hat{x}^n}{\|\hat{x}^n\|} \right)^T = \left(\frac{1 - \hat{S}_0^T \hat{x}^n}{\|\hat{x}^n\|}, \frac{\hat{x}^n}{\|\hat{x}^n\|} \right)^T = \left(\frac{1}{\|\hat{x}^n\|} - \hat{S}_0^T \frac{\hat{x}^n}{\|\hat{x}^n\|}, \frac{\hat{x}^n}{\|\hat{x}^n\|} \right)^T$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt und $(y^n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Teilfolge besitzt, welche für $n \rightarrow \infty$ gegen ein Portfolio $x^* = (x_0^*, (\hat{x}^*)^T)^T$ mit $\|\hat{x}^*\| = 1$ konvergiert. Dies impliziert $\hat{x}^* \neq \hat{0}$ und damit ist \hat{x}^* nicht trivial. Außerdem gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$S_1^T x^n \geq 0 \quad \text{P-f.s.} \tag{2.2.4}$$

Denn angenommen, es existiert ein $\omega \in \Omega$ mit $P(\{\omega\}) > 0$ und ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $S(\omega)_1^T x^{n_0} < 0$, dann ist $\ln(S(\omega)_1^T x^{n_0}) = -\infty < \mu$, was ein Widerspruch zu (2.2.3) darstellt. Teilen wir nun (2.2.2) und (2.2.4) durch $\|\hat{x}^n\|$ und bilden den Grenzwert für $n \rightarrow \infty$, erhalten wir

$$S_0^T x^* = 0 \quad \text{und} \quad S_1^T x^* \geq 0 \quad \text{P-f.s..}$$

Damit folgt nun insgesamt

$$(S_1 - RS_0)^T x^* \geq 0 \quad \text{P-f.s.}, \tag{2.2.5}$$

d.h. x^* ist ein nicht triviales risikoloses Portfolio. Dies steht im Widerspruch zu den Voraussetzungen. Damit ist die Menge B_μ beschränkt und es folgt die Kompaktheit. □

Wenn wir jetzt noch einmal das Optimierungsproblem aus (2.2.1) betrachten, stellen wir fest, dass aus Lemma 2.2.1 die Eindeutigkeit und mit Lemma 2.2.2 die Existenz einer Lösung folgt, falls die Menge B_μ nicht leer ist. Dies wollen wir im folgenden Theorem etwas genauer fassen.

Theorem 2.2.3 (Growth Optimal Portfolio, vgl. Maier-Paape und Zhu [11, Theorem 12]). *Sei S_t ein Ein-Perioden-Finanzmarkt wie in Def. 2.1.1, welcher kein nicht triviales risikoloses Portfolio enthält (vgl. Def. 2.1.3). Dann ist das Problem (2.2.1) eindeutig lösbar. Dieses eindeutige Portfolio nennen wir auch das Growth Optimal Portfolio und bezeichnen es mit $\kappa \in \mathbb{R}^{M+1}$.*

Beweis. Zuerst zeigen wir die Existenz einer Lösung, indem wir die Menge

$$B_{\ln(R)} = \left\{ x \in \mathbb{R}^{M+1} \mid E(\ln(S_1^T x)) \geq \ln(R), S_0^T x = 1 \right\}$$

betrachten, wobei $S_1^0 = R$ der Payoff der risikofreien Anlage war. Dann erkennen wir, dass das triviale risikolose Portfolio $x^* = (1, \widehat{0}^T)^T \in \mathbb{R}^{M+1}$ ein Element von $B_{\ln(R)}$ ist, denn

$$E(\ln(S_1^T x^*)) = E(\ln(S_1^T(1, \widehat{0}^T)^T)) = E(\ln(S_1^0 + \widehat{S}_1^T \widehat{0})) = E(\ln(R)) = \ln(R).$$

Außerdem gilt $S_0^T x^* = S_0^T(1, \widehat{0}^T)^T = 1$. Also ist $B_{\ln(R)}$ nicht leer und nach Lemma 2.2.2 ist diese Menge kompakt. Damit folgt die Existenz einer Lösung mit

$$\mu_{\max} := \max_{x \in \mathbb{R}^{M+1}} \left\{ E(\ln(S_1^T x)) \mid S_0^T x = 1 \right\} < \infty$$

von (2.2.1). Nach Lemma 2.2.1 angewendet auf $A_1 := \{x \in \mathbb{R}^{M+1} : S_0^T x = 1\}$ ist $x \mapsto E(\ln(S_1^T x))$ streng konkav auf A_1 . Die Eigenschaften einer Menge an zulässigen Portfolios lassen sich bei A_1 durch einfaches Nachrechnen verifizieren. Sollte es zwei optimale Lösungen geben, dann würde mit der strengen Konkavität ein Punkt zwischen diesen Lösungen einen größeren Zielfunktionswert besitzen und dies wäre ein Widerspruch zur Optimalität. Dieses Argument werden wir im Beweis von Theorem 2.3.1 noch einmal genauer betrachten. \square

Das Growth Optimal Portfolio ist unabhängig davon, welche Risikofunktion wir verwenden. Dabei erfüllt es eine sehr natürliche Eigenschaft, die beispielsweise das Markowitz' Portfolio nicht erfüllt: Wir erhalten einen maximal möglichen, zu erwartenden log Payoff, welcher auch mit dem Eingehen eines höheren Risikos nicht gesteigert werden kann. Im Gegensatz dazu ist es im Markowitz' Portfolio möglich einen unbegrenzten Gewinn zu erhalten (vgl. Maier-Paape und Zhu [11, Kapitel 4]).

2.3. Leverage Space Portfolio

Nun ist das Growth Optimal Portfolio in der Praxis mit einem sehr hohen Risiko verbunden, da es das größtmögliche Wachstum unseres Kapitals erreichen möchte. Um dieses Risiko a priori zu beschränken, wurde von Ralph Vince in [14] das *Leverage Space Portfolio* vorgestellt. Weitere ähnliche Analysen dazu lassen sich in de Prado, Vince und Zhu [8] und Vince und Zhu [16] finden.

Dazu betrachten wir im Folgenden eine unterhalbstetige und konvexe Risikofunktion $\tau : A \rightarrow [0, \infty]$ (vgl. Def. A.1.1 und Def. A.1.3), die nur von dem riskanten Teil eines Portfolios abhängig ist, d.h. $\tau(x) = \widehat{\tau}(\widehat{x})$ für alle $x = (x_0, \widehat{x}^T)^T \in A$, wobei A eine zulässige Menge von Portfolios mit unit initial cost ist (siehe Def. 2.1.2). Außerdem soll $\tau(x) = 0$ genau dann gelten, wenn $\widehat{x} = \widehat{0} \in \mathbb{R}^M$ gilt. Damit erhalten wir folgende Funktion

$$\nu : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\}, r \mapsto \max \left\{ E(\ln(S_1^T x)) \mid \tau(x) = \widehat{\tau}(\widehat{x}) \leq r, S_0^T x = 1 \text{ und } x \in A \right\}, \quad (2.3.1)$$

deren Graph wir uns später in einem Beispiel noch im Risiko-Nutzen-Raum anschauen werden. Weiter werden wir im Folgenden die Menge A explizit angeben.

Theorem 2.3.1 (Leverage Space Portfolio, vgl. Maier-Paape und Zhu [11, Theorem 13]). Sei S_t ein Ein-Perioden-Finanzmarkt wie in Def. 2.1.1, welcher kein nicht triviales risikoloses Portfolio enthält (vgl. Def. 2.1.3), $A_1 := \{x \in \mathbb{R}^{M+1} \mid S_0^T x = 1\}$ und $\tau : A_1 \rightarrow [0, \infty]$ eine unterhalbstetige und konvexe Funktion (vgl. Def. A.1.1 und Def. A.1.3), die nur von dem riskanten Teil eines Portfolios abhängig ist, d.h. $\tau(x) = \widehat{\tau}(\widehat{x})$ für alle $x \in A_1$. Dann hat das Problem

$$\begin{aligned} \max_{x \in A_1} E(\ln(S_1^T x)) & \quad (2.3.2) \\ \text{s.t. } \tau(x) = \widehat{\tau}(\widehat{x}) & \leq r \end{aligned}$$

für alle $r \geq 0$ eine eindeutige Lösung. Dabei gibt uns die Funktion ν aus (2.3.1) für $A = A_1$ das Maximum von $E(\ln(S_1^T x))$ unter den obigen Restriktionen in Abhängigkeit von r in (2.3.2).

Beweis. Sei $r \geq 0$ vorgegeben. Zu Beginn stellen wir fest, dass durch A_1 eine Menge von zulässigen Portfolios mit unit initial cost (vgl. Def. 2.1.2) gegeben ist. Ähnlich zu dem Beweis von Theorem 2.2.3 folgt die Existenz aus Lemma 2.2.2. Dazu betrachten wir wieder die kompakte Menge

$$B_{\ln(R)} = \left\{ x \in \mathbb{R}^{M+1} \mid E(\ln(S_1^T x)) \geq \ln(R), S_0^T x = 1 \right\} \subset A_1$$

und erkennen, dass die folgende Teilmenge

$$\left\{ x \in \mathbb{R}^{M+1} \mid \widehat{\tau}(\widehat{x}) \leq r, E(\ln(S_1^T x)) \geq \ln(R), S_0^T x = 1 \right\} \subset B_{\ln(R)}$$

ebenfalls auf Grund der Unterhalbstetigkeit von τ und der Oberhalbstetigkeit von $x \mapsto E(\ln(S_1^T x))$ abgeschlossen (vgl. Theorem A.1.4) und als Teilmenge einer beschränkten Menge auch beschränkt ist (vgl. Theorem 2.2.3). Damit ist sie kompakt und darüber hinaus nicht leer, da das triviale risikofreie Portfolio $x^* = (1, \widehat{0}^T)^T$ offensichtlich ein Element der Menge ist. Denn es gilt

$$\tau(x^*) = 0 \leq r \quad \text{und} \quad E(\ln(S_1^T x^*)) = \ln(R).$$

Daher folgt die Existenz einer Lösung von (2.3.2) (vgl. Theorem A.1.5).

Um die Eindeutigkeit zu zeigen, nehmen wir an, es existieren zwei Lösungen $x^1 \neq x^2$ mit

$$\widehat{\tau}(\widehat{x}^i) \leq r \quad \text{und} \quad E(\ln(S_1^T x^i)) = \nu(r)$$

für $i \in \{1, 2\}$ (vgl. (2.3.1)). Dann gilt für $x^* := (x^1 + x^2)/2$ auf Grund der Konvexität von τ

$$S_0^T x^* = \frac{1}{2} S_0^T x^1 + \frac{1}{2} S_0^T x^2 = 1, \quad \widehat{\tau}(\widehat{x}^*) \leq \frac{1}{2} \widehat{\tau}(\widehat{x}^1) + \frac{1}{2} \widehat{\tau}(\widehat{x}^2) \leq r$$

und wegen der strengen Konkavität von $x \mapsto E(\ln(S_1^T x))$ (vgl. Lemma 2.2.1) gilt

$$E(\ln(S_1^T x^*)) > \frac{1}{2} E(\ln(S_1^T x^1)) + \frac{1}{2} E(\ln(S_1^T x^2)) = \nu(r).$$

Dies ist ein Widerspruch zur Definition von ν und zur Optimalität der Lösungen x^1 und x^2 . Insgesamt erhalten wir die Existenz einer eindeutigen Lösung. \square

Bemerkung 2.3.2. Maier-Paape und Zhu halten in [11, Theorem 13] noch weitere Eigenschaften für ν fest, die wir für unsere Zwecke nicht benötigen. Beispielsweise ist die Einschränkung von ν auf das Intervall $[0, \tau(\kappa)]$, wobei κ das Growth Optimal Portfolio darstellt, streng monoton wachsend und stetig.

Jede Risikofunktion generiert einen Weg zwischen dem trivialen risikofreien Portfolio $x^* = (1, \widehat{0}^T)^T$ mit zu erwartendem log Payoff $\ln(R)$ und dem Optimal Growth Portfolio κ . Auf diesem Weg gibt es interessante Punkte, wie zum Beispiel den Wendepunkt und den Punkt, der das Nutzen-Risiko Verhältnis maximiert. Genauere Analysen dazu finden sich in de Prado, Vince und Zhu [8] und Vince und Zhu [16].

2.4. Eine Betrachtung ohne risikofreie Anlage

Wir betrachten im Folgenden das Growth Optimal Portfolio und das Leverage Space Portfolio ohne die risikofreie Anlage, d.h. wir investieren unser gesamtes Kapital in die riskanten Anlagen. Um hier die Existenz einer Lösung zu erhalten, brauchen wir noch eine weitere Bedingung, die wir mit der risikofreien Anlage nicht gebraucht hätten.

Theorem 2.4.1 (Growth Optimal Portfolio ohne risikofreie Anlage, vgl. Maier-Paape und Zhu [11, Theorem 14]). *Sei S_t ein Ein-Perioden-Finanzmarkt wie in Def. 2.1.1, welcher kein nicht triviales risikoloses Portfolio enthält (vgl. Def. 2.1.3) und $L = |\Omega| \in \mathbb{N}$. Angenommen der Preis jeder Finanzanlage ist in jedem Szenario echt größer null, d.h. für alle $i \in \{1, \dots, L\}$ und $j \in \{1, \dots, M\}$ gilt*

$$S_1^j(\omega_i) > 0.$$

Dann hat das Problem

$$\begin{aligned} \max_{\hat{x} \in \mathbb{R}^M} E(\ln(\widehat{S}_1^T \hat{x})) \\ \text{s.t. } \widehat{S}_0^T \hat{x} = 1 \end{aligned} \quad (2.4.1)$$

eine Lösung.

Beweis. Wir wollen wieder Lemma 2.2.2 verwenden, um auf Kompaktheit einer Teilmenge schließen zu können. Dazu müssen wir sicherstellen, dass diese Teilmenge nicht leer ist. Definiere

$$K := \sum_{j=1}^M S_0^j$$

und betrachte das Portfolio $x^* := (0, (\hat{x}^*)^T)^T \in \mathbb{R}^{M+1}$ mit $\hat{x}^* := (1/K, \dots, 1/K)^T \in \mathbb{R}^M$, d.h. wir investieren in jede riskante Finanzanlage den gleichen Anteil des Kapitals. Damit gilt einerseits

$$S_0^T x^* = \widehat{S}_0^T \hat{x}^* = \sum_{j=1}^M S_0^j \frac{1}{K} = \frac{1}{K} \sum_{j=1}^M S_0^j = 1$$

und andererseits

$$E(\ln(\widehat{S}_1^T \hat{x}^*)) = \sum_{j=1}^L P(\{w_j\}) \ln(\widehat{S}_1^T(\omega_j) \hat{x}^*) =: \mu^* > -\infty,$$

da $\widehat{S}_1^T(\omega_j) \hat{x}^* > 0$ für alle $j \in \{1, \dots, L\}$. Damit gilt

$$\begin{aligned} x^* \in \left\{ x \in \mathbb{R}^{M+1} \mid E(\ln(S_1^T x)) \geq \mu^*, S_0^T x = 1, x_0 = 0 \right\} \\ \subset \left\{ x \in \mathbb{R}^{M+1} \mid E(\ln(S_1^T x)) \geq \mu^*, S_0^T x = 1 \right\} \end{aligned}$$

und, da nach Lemma 2.2.2 die Obermenge kompakt ist, folgt mit analoger Begründung wie im Beweis von Theorem 2.3.1 die Kompaktheit der Teilmenge. Daraus folgt wieder die Existenz einer Lösung (vgl. Theorem A.1.5). \square

Um uns zu verdeutlichen, warum wir in diesem Problem keine Eindeutigkeit erhalten, analysieren wir folgendes Gegenbeispiel.

Beispiel 2.4.2 (Gegenbeispiel strenge Konkavität). Wir betrachten zwei riskante Finanzanlagen mit jeweils Einstiegspreis 1, d.h. es gilt $M = 2$ und $\widehat{S}_0^T = (1, 1)^T$. Weiter nehmen wir an, dass zum Zeitpunkt $t = 1$ beide Anlagen mit 90-prozentiger Wahrscheinlichkeit den Wert 2 und mit 10-prozentiger Wahrscheinlichkeit den Wert 0.5 haben. Dies impliziert $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$, $\widehat{S}_1(\omega_1) = (2, 2)^T$ und $\widehat{S}_1(\omega_2) = (0.5, 0.5)^T$. Dann stellen wir fest, dass sowohl $\widehat{x}^1 := (1, 0)^T$ als auch $\widehat{x}^2 := (0, 1)^T$ Lösungen von (2.4.1) sind. Dabei gilt

$$\mu_{\max} := E(\ln(\widehat{S}_1^T \widehat{x}^i)) = 0.9 \cdot \ln(2) + 0.1 \cdot \ln(0.5)$$

für $i \in \{1, 2\}$. Insbesondere stellt dieses Beispiel ein Gegenbeispiel zur strikten Konkavität von $\widehat{x} \mapsto E(\ln(\widehat{S}_1^T \widehat{x}))$ dar, weshalb der Beweis zur Eindeutigkeit aus Theorem 2.2.3 in Theorem 2.4.1 nicht anwendbar ist.

Mit Hilfe des Theorems 2.4.1 können wir feststellen, dass das Leverage Space Portfolio ohne die risikofreie Anlage mindestens ein effizientes Portfolio enthält. Dazu benötigen wir folgende Definition.

Definition 2.4.3 (Effiziente Portfolios, vgl. Maier-Paape und Zhu [11, Def. 5]). Sei A eine Menge an zulässigen Portfolios (siehe Def. 2.1.2) und $\tau : A \rightarrow [0, \infty]$ eine Risikofunktion. Dann nennen wir $x \in A$ ein effizientes Portfolio, falls kein Portfolio $\tilde{x} \in A$ existiert, sodass entweder

$$\tau(\tilde{x}) \leq \tau(x) \quad \text{und} \quad E(\ln(S_1^T \tilde{x})) > E(\ln(S_1^T x))$$

oder

$$\tau(\tilde{x}) < \tau(x) \quad \text{und} \quad E(\ln(S_1^T \tilde{x})) \geq E(\ln(S_1^T x))$$

gilt. Insbesondere nennen wir dann $(r, \mu) := (\tau(x), E(\ln(S_1^T x)))$ einen effizienten Punkt.

Ein effizientes Portfolio stellt sicher, dass wir einerseits nicht mit gleichem oder geringerem Risiko einen höheren zu erwartenden log Payoff erhalten und andererseits, dass wir nicht mit einem geringeren Risiko einen gleich hohen oder sogar höheren log Payoff bekommen.

Neben den Voraussetzungen aus Theorem 2.4.1 müssen wir anders als im Theorem 2.3.1 eine weitere Einschränkung einführen. Wollen wir nämlich das Problem (2.3.2) ohne risikofreie Anlage betrachten, dann wissen wir unter den Voraussetzungen von Theorem 2.3.1 nicht, inwiefern die Risikofunktion endliche Werte annimmt. Daher werden wir im folgenden Theorem eine stetige Risikofunktion $\tau : A \rightarrow [0, \infty)$ fordern. Die Menge A werden wir auch im folgenden Theorem explizit angeben können, diese unterscheidet sich aber auf Grund des Wegfalls der risikofreien Anlage zu der Wahl in Theorem 2.3.1.

Theorem 2.4.4 (Leverage Space Portfolio ohne risikofreie Anlage). Sei S_t ein Ein-Perioden-Finanzmarkt wie in Def. 2.1.1 mit $L = |\Omega| \in \mathbb{N}$, welcher kein nicht triviales risikoloses Portfolio enthält (vgl. Def. 2.1.3), $\widehat{A}_1 := \{x \in \mathbb{R}^{M+1} \mid \widehat{S}_0^T \widehat{x} = 1 \text{ und } x_0 = 0\}$ und $\tau : \widehat{A}_1 \rightarrow [0, \infty)$ eine stetige und konvexe Funktion (vgl. Def. A.1.1 und Def. A.1.3), die nur von dem riskanten Teil eines Portfolios abhängig ist, d.h. $\tau(x) = \widehat{\tau}(\widehat{x})$ für alle $x \in \widehat{A}_1$. Angenommen, der Preis jeder Finanzanlage ist in jedem Szenario echt größer null, d.h. für alle $i \in \{1, \dots, L\}$ und $j \in \{1, \dots, M\}$ gilt

$$S_1^j(\omega_i) > 0$$

und für jede Folge $(x^n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \widehat{A}_1$ mit $\|\widehat{x}^n\| \rightarrow \infty$ für $n \rightarrow \infty$ existiert eine Teilfolge $(x^{n_j})_{j \in \mathbb{N}}$ mit

$$\widehat{\tau}(\widehat{x}^{n_j}) \rightarrow \infty \quad \text{für } j \rightarrow \infty. \quad (2.4.2)$$

Dann existiert mindestens ein $r \geq 0$, zu dem das Problem

$$\begin{aligned} & \sup_{x=(x_0, \hat{x}^T)^T \in \hat{A}_1} E(\ln(\hat{S}_1^T \hat{x})) \\ & \text{s.t. } \hat{\tau}(\hat{x}) \leq r \end{aligned} \quad (2.4.3)$$

ein effizientes Portfolio als Lösung besitzt.

Beweis. Wir stellen wieder fest, dass durch \hat{A}_1 eine Menge von zulässigen Portfolios mit unit initial cost (vgl. Def. 2.1.2) gegeben ist. Mit Theorem 2.4.1 folgt die Existenz von Lösungen des Problems (2.4.1). Dazu definieren wir durch \mathcal{L} die Menge aller solcher Lösungen.

Erster Fall: $|\mathcal{L}| < \infty$, d.h. wir können \mathcal{L} schreiben als $\mathcal{L} = \{\hat{x}^1, \dots, \hat{x}^l\}$ mit $l \in \mathbb{N}$. Dann nehmen wir von diesen Portfolios eines mit dem geringsten Risiko, d.h. sei $\hat{x}^* \in \mathcal{L}$ mit

$$\hat{\tau}(\hat{x}^*) \leq \hat{\tau}(\hat{x}^i) < \infty \quad \forall i \in \{1, \dots, l\}.$$

Dieses Portfolio ist ein effizientes Portfolio mit Risiko $r := \hat{\tau}(\hat{x}^*)$ und zu erwartendem log Payoff $\mu_{\max} := E(\ln(\hat{S}_1^T \hat{x}^*))$. Denn sowohl eine Erhöhung des log Payoffs als auch eine Verringerung des Risikos würde im Widerspruch zu den Annahmen stehen.

Zweiter Fall: $|\mathcal{L}| = \infty$. Dann definieren wir

$$r := \inf \{ \hat{\tau}(\hat{x}) \mid \hat{x} \in \mathcal{L} \} < \infty$$

und passend dazu die Minimalfolge $(\hat{x}^n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{L}^{\mathbb{N}}$, d.h.

$$\hat{\tau}(\hat{x}^n) \searrow r \quad \text{für } n \rightarrow \infty.$$

Mit Voraussetzung (2.4.2) muss die Folge $(\hat{x}^n)_{n \in \mathbb{N}}$ beschränkt sein und damit existiert eine Teilfolge $(\hat{x}^{n_j})_{j \in \mathbb{N}}$, die gegen ein Grenzwert $\hat{x}^* \in \mathbb{R}^M$ konvergiert. Wegen der Stetigkeit von $\hat{\tau}$ gilt insbesondere $\hat{\tau}(\hat{x}^*) = r$, $S_0^T \hat{x}^* = 1$ und

$$E\left(\ln(\hat{S}_1^T \hat{x}^*)\right) \geq \limsup_{j \rightarrow \infty} E\left(\ln(\hat{S}_1^T \hat{x}^{n_j})\right) = \mu_{\max},$$

wobei μ_{\max} der optimale Zielfunktionswert der Lösungen aus \mathcal{L} ist. Also gilt $\hat{x}^* \in \mathcal{L}$ und mit derselben Begründung wie im ersten Fall, folgt die Behauptung. \square

Alternativ zu der Forderung, dass die Risikofunktion endliche Werte annehmen muss, könnte man genauso gut die Existenz einer Lösung \hat{x}^* des Problems (2.4.1) mit $\tau(\hat{x}^*) < \infty$ fordern. Zum Abschluss dieses Kapitels analysieren wir noch ein Beispiel, welches die Resultate aus diesem Kapitel noch einmal veranschaulichen soll.

Beispiel 2.4.5 (Maier-Paape und Zhu [11, Bsp. 4]). Angenommen, wir haben eine riskante Finanzanlage $M = 1$ und zwei mögliche Zustände $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$ mit Eintrittswahrscheinlichkeit $P(\{\omega_1\}) = 0.45$ und $P(\{\omega_2\}) = 0.55$. Insbesondere lassen wir die risikofreie Anlage wieder zu und dort wollen wir genau das nach einer Periode erhalten, was wir eingesetzt haben, also gilt $R = 1$. Die riskante Finanzanlage hat den Einstiegspreis $S_0^1 = 1$ und folgende Preise in den jeweiligen Zuständen

$$S_1^1(\omega_1) = 0.5 \quad \text{und} \quad S_1^1(\omega_2) = 1 + \alpha,$$

wobei $\alpha > 9/22$ beliebig gewählt werden kann. Also verlieren wir im Zustand ω_1 die Hälfte unseres in S_0^1 investierten Kapitals und in Zustand ω_2 erhalten wir einen Kursgewinn von α . Mit dieser Wahl von α gilt insbesondere

$$E(S_1^1) = 0.45 \cdot 0.5 + 0.55 \cdot (1 + \alpha) = 0.775 + 0.55\alpha > 0.775 + 0.55 \cdot \frac{9}{22} = 1 = S_0^1.$$

Also stehen unsere Chancen, im Erwartungswert einen Gewinn mit der riskanten Finanzanlage zu erzielen, nicht schlecht. Als Risikofunktion verwenden wir eine Approximation des Draw-Downs $\tau(x_0, x_1) := |x_1|$. Genauere Analysen zu dieser Risikofunktion finden sich in Vince und Zhu [16] und auch wir werden uns in Kapitel 3.3 einer Form des DrawDowns widmen.

Die Eigenschaften, die wir in Theorem 2.3.1 von einer Risikofunktion verlangt haben, können leicht nachgerechnet werden. Mit diesen Voraussetzungen können wir die Funktion ν aus (2.3.1) für $A = A_1 := \{x \in \mathbb{R}^{M+1} \mid S_0^T x = 1\}$ folgendermaßen herleiten. Sei dazu erst einmal $x = (x_0, x_1)^T \in \mathbb{R}^2$ beliebig mit $1 = S_0^T x = x_0 + x_1$. Dann gilt

$$\begin{aligned} E(\ln(S_1^T x)) &= 0.45 \ln(S_1^T(\omega_1)x) + 0.55 \ln(S_1^T(\omega_2)x) \\ &= 0.45 \ln(x_0 + 0.5x_1) + 0.55 \ln(x_0 + (1 + \alpha)x_1). \end{aligned}$$

Setzen wir nun $x_0 = 1 - x_1$ in die Gleichung ein, erhalten wir

$$0.45 \ln(x_0 + 0.5x_1) + 0.55 \ln(x_0 + (1 + \alpha)x_1) = 0.45 \ln(1 - 0.5x_1) + 0.55 \ln(1 + \alpha x_1).$$

Um nun ν zu erhalten, müssen wir unter der Nebenbedingung $\tau(x) = |x_1| \leq r$ die obige Funktion maximieren, sodass sich

$$\nu(r) = 0.45 \ln(1 - 0.5r) + 0.55 \ln(1 + \alpha r)$$

ergibt. Dabei muss r im Intervall $[0, r_{\max}^\alpha]$ liegen, wobei r_{\max}^α das Risiko des Growth Optimal Portfolios widerspiegelt. Da ν in $[0, r_{\max}^\alpha]$ monoton wachsend ist, erhalten wir r_{\max}^α als Maximalstelle von ν , d.h. $r = r_{\max}^\alpha$ muss

$$\nu'(r) = -0.225 \frac{1}{1 - 0.5r} + 0.55\alpha \frac{1}{1 + \alpha r} \stackrel{!}{=} 0$$

erfüllen. Mit diesem Ansatz gilt $r_{\max}^\alpha = \frac{22\alpha - 9}{20\alpha}$. Damit erkennen wir, dass das eindeutige, optimale Portfolio zu (2.3.2) in Abhängigkeit von $r \in [0, r_{\max}^\alpha]$ durch $x_{\max}^* = (1 - r, r)^T$ gegeben ist. Dabei hat es Risiko r und zu erwartenden log Payoff $\nu(r)$. Für $r = r_{\max}^\alpha$ erhalten wir das Growth Optimal Portfolio.

Betrachten wir das Problem (2.4.3), d.h. ab jetzt gilt wieder $x_0 = 0$. Dann erkennen wir, dass wir auf Grund der unit initial cost-Bedingung nur den effizienten Punkt $\{(1, \nu(1))\}$ erhalten, wobei $\nu(1) = 0.55 \ln(1 + \alpha) - 0.45 \ln(2)$ analog zu oben gilt.

Ist $\alpha \in (9/22, 9/2)$, so haben beide Probleme kein gemeinsames effizientes Portfolio. Dies wird in der Abbildung 2.1a illustriert. Dort ist die Funktion ν in blau dargestellt und verbindet den Nullpunkt mit dem Growth Optimal Portfolio, welches durch den roten Kreis erkennbar ist. Der blaue Kreis stellt das effiziente Portfolio zu dem Punkt $\{(1, \nu(1))\}$ dar, denn es gilt $r_{\max}^\alpha = 1$ genau dann, wenn $\alpha = 9/2$ erfüllt ist.

In Abbildung 2.1b erkennen wir den Spezialfall $\alpha = 9/2$. Denn in diesem Fall schneiden sich die Lösungen in genau einem Punkt und dieser Punkt ist das Growth Optimal Portfolio. Je mehr wir nun $\alpha > 9/2$ vergrößern (damit gilt $r_{\max}^\alpha > 1$), desto weiter entfernt sich der Punkt $\{(1, \nu(1))\}$ vom Growth Optimal Portfolio und bewegt sich entlang des Weges zwischen dem Nullpunkt und dem Growth Optimal Portfolio in Richtung des Nullpunktes. Dies sehen wir in Abbildung 2.1c. Darüber hinaus erkennen wir, dass dies nur sehr langsam passiert. Denn in der Abbildung wurde $\alpha = 7$ gewählt, das bedeutet, dass wir mit 55-prozentiger Wahrscheinlichkeit einen Gewinn von 700% erhalten.

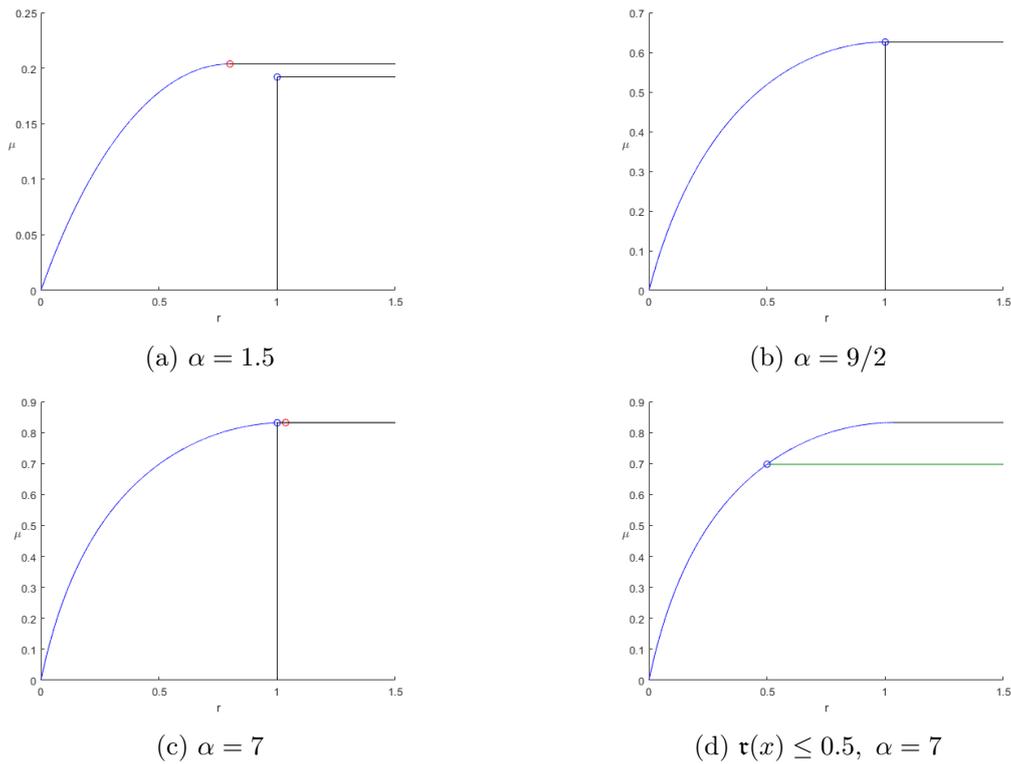


Abbildung 2.1.: Darstellung effizienter Portfolios im Risiko-Nutzen-Raum

In der Praxis erweist es sich oft als sinnvoll, das Risiko a-priori zu beschränken. In Abbildung 2.1d wurden die effizienten Punkte durch $\tau(x) \leq 0.5$ beschränkt. Diese Beschränkung lässt sich durch die grüne Linie erkennen. Insbesondere befindet sich dort die optimale Lösung am Schnittpunkt zwischen der Funktion ν mit der Restriktion.

3. Mehr-Perioden-Finanzmarkt

In diesem Kapitel wollen wir das Ein-Perioden-Finanzmarkt-Modell zu einem Mehr-Perioden-Finanzmarkt erweitern. Dabei werden wir feststellen, dass uns einige Resultate im Mehr-Perioden-Finanzmarkt erhalten bleiben. Jedoch werden wir teilweise stärkere und manchmal auch schwächere Restriktionen fordern. Ziel dieses Kapitels ist es, die Idee der optimalen Portfolios aus Kapitel 2.2 und 2.3 zu Trading Strategien über mehrere Perioden zu erweitern. Diese Erweiterungen werden ausführlich in Platen [12] diskutiert.

3.1. Mehr-Perioden-Finanzmarkt-Modell

Im Ein-Perioden-Finanzmarkt-Modell beschränken wir uns auf eine endliche Ereignismenge. Diese Restriktion wollen wir lösen und betrachten im Folgenden einen beliebigen Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, Σ, P) . Auf diesem definieren wir die Menge aller Zufallsvariablen, deren p -tes Moment für $p \in \mathbb{N}_0$ existiert durch

$$\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^M) := \mathcal{L}^p(\Omega, \Sigma, P; \mathbb{R}^M) := \{X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^M \mid E(|X|^p) < \infty\}.$$

für $M \in \mathbb{N}$. Um die zukünftigen Preise für $N \in \mathbb{N}$ Perioden zu modellieren, nutzen wir einen stochastischen Prozess auf dem filtrierten Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \Sigma, \{\mathcal{F}_n\}_{0 \leq n \leq N}, P)$ mit Filtration $\{\mathcal{F}_n\}_{0 \leq n \leq N}$, die

$$\{\emptyset, \Omega\} =: \mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_1 \subset \dots \subset \mathcal{F}_N := \Sigma$$

erfüllt. Damit erhalten wir die Menge aller Preis-Prozesse für M Finanzanlagen und N Perioden durch

$$\mathcal{L}^p(N; \mathbb{R}^M) := \mathcal{L}^p(\Omega, \Sigma, \{\mathcal{F}_n\}_{0 \leq n \leq N}, P; \mathbb{R}^M) := \bigtimes_{n=0}^N \mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{F}_n, P; \mathbb{R}^M).$$

Weiter definieren wir $\mathcal{L}^p(N) := \mathcal{L}^p(N; \mathbb{R})$ und analog zu obiger Definition die Menge aller nicht negativen Preis-Prozesse notiert durch $\mathcal{L}^p(N; \mathbb{R}_{>0}^M) \subset \mathcal{L}^p(N; \mathbb{R}^M)$. Beachte, dass für die Wahl $p = 0$ die Menge $\mathcal{L}^0(\mathbb{R})$ alle reellen Zufallsvariablen auf dem Wahrscheinlichkeitsraum enthält. Wir werden uns im Folgenden mit der Wahl $p \in \{0, 1, 2\}$ beschäftigen. Um den Mehr-Perioden-Finanzmarkt einführen zu können, müssen wir zuerst definieren, was wir unter einer risikofreien Anlage verstehen.

Definition 3.1.1 (Risikofreie Anlage, vgl. Platen [12, Def. 2.1.3]). Der stochastische Prozess $Z = (Z_0, \dots, Z_N) \in \mathcal{L}^2(N)$ heißt risikofrei, falls Z_n für $n = 0, \dots, N$ fast sicher konstant ist und $Z_n \geq Z_{n-1} > 0$ für alle $n = 1, \dots, N$ fast sicher gilt.

Mit dieser Definition können wir das Mehr-Perioden-Finanzmarkt-Modell einführen.

Definition 3.1.2 (Mehr-Perioden-Finanzmarkt, vgl. Platen [12, Def. 2.1.4] und Föllmer und Schied [5, Kapitel 5.1]). Für $M, N \in \mathbb{N}$ sei $S := (S_n)_{0 \leq n \leq N} \in \mathcal{L}^2(N; \mathbb{R}_{>0}^{M+1})$ ein stochastischer Prozess mit

$$S_n := (S_n^0, S_n^1, \dots, S_n^M)^T \in \mathbb{R}_{>0} \times \mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{F}_n, P; \mathbb{R}_{>0}^M) \subset \mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{F}_n, P; \mathbb{R}^{M+1})$$

für $n = 1, \dots, N$, wobei $(S_0^0, S_0^1, \dots, S_0^M) \in \mathcal{L}^2(N)$ eine risikofreie Anlage darstellt (siehe Def. 3.1.1). Dann nennen wir S einen Mehr-Perioden-Finanzmarkt der Größe $M + 1$ mit N Perioden.

Im Ein-Perioden-Finanzmarkt haben wir ein Portfolio als Spaltenvektor kennengelernt, welcher uns die Gewichtung der Finanzanlagen angibt. Im Mehr-Perioden-Finanzmarkt haben wir die Möglichkeit, nach jedem Zeitschritt unser Portfolio neu zu allokatieren.

Definition 3.1.3 (Trading Strategie, vgl. Platen [12, Def. 2.2.1]). Sei $S := (S_n)_{0 \leq n \leq N} \in \mathcal{L}^2(N; \mathbb{R}_{>0}^{M+1})$ ein Mehr-Perioden-Finanzmarkt wie in Def. 3.1.2. Dann definiert $X := (x_n)_{1 \leq n \leq N} \in \mathcal{L}^0(N-1; \mathbb{R}^{M+1})$ mit

$$x_n := (x_n^0, x_n^1, \dots, x_n^M)^T \in \mathcal{L}^0(\Omega, \Sigma, \mathcal{F}_{n-1}, P; \mathbb{R}^{M+1})$$

für $n = 1, \dots, N$ eine Trading Strategie.

Machen wir uns einmal klar, in welchem Zusammenhang die Trading Strategie X zu dem Mehr-Perioden-Finanzmarkt-Modell S steht und wie wir dies interpretieren können. S_n^i gibt uns den Preis der i -ten Finanzanlage zum Zeitpunkt n und x_n^i die Anzahl der Anteile an der i -ten Finanzanlage beim Zeitschritt $n-1$ zu n . Dabei darf x_n logischerweise nur von den Preisen $S_{\{<n\}}$ abhängen. Dann gibt uns $S_{n-1}^i x_n^i$ das Kapital, welches wir zum Zeitpunkt $n-1$ für den Zeitschritt $n-1$ zu n in die i -te Finanzanlage investieren. Den Payoff, welchen wir mit dieser Investition zum Zeitpunkt n erhalten, wird durch $S_n^i x_n^i$ dargestellt. Dann würden wir wieder überlegen, wie viel wir in diese Finanzanlage für den nächsten Schritt investieren wollen und erhalten x_{n+1} .

Mit diesen Interpretationen können wir die Kapitalentwicklung einer Trading Strategie definieren.

Definition 3.1.4 (Kapitalentwicklung, vgl. Platen [12, Def. 2.2.2]). Sei $S \in \mathcal{L}^2(N; \mathbb{R}_{>0}^{M+1})$ ein Mehr-Perioden-Finanzmarkt wie in Def. 3.1.2, $X \in \mathcal{L}^0(N-1; \mathbb{R}^{M+1})$ eine Trading Strategie (siehe Def. 3.1.3) und $\mathcal{W}_0 > 0$ das zu Beginn verfügbare Anfangskapital. $\mathcal{W}(X) \in \mathcal{L}^0(N)$ definiert durch

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_0(X) &:= \mathcal{W}_0, \\ \mathcal{W}_n(X) &:= \mathcal{W}_{n-1}(X) + (S_n - S_{n-1})^T x_n = \mathcal{W}_0 + \sum_{k=1}^n (S_k - S_{k-1})^T x_k \end{aligned}$$

für $n = 1, \dots, N$ heißt Kapitalentwicklung der Trading Strategie X .

Die Kapitalentwicklung gibt uns also die Entwicklung unseres Kapitals über N Perioden. Um den Bankrott zu vermeiden, betrachten wir die folgende Definition ähnlich zu Def. 2.1.2.

Definition 3.1.5 (Zulässige Trading Strategien, vgl. Platen [12, Def. 2.2.6]). Eine Trading Strategie $X \in \mathcal{L}^0(N-1; \mathbb{R}^{M+1})$ wie in Def. 3.1.3 heißt zulässig, falls für alle $n = 1, \dots, N$, $\mathcal{W}_n(X) > 0$ fast sicher gilt.

Als letzte Definition in der Einführung des Mehr-Perioden-Finanzmarkt-Modells erhalten wir die Verallgemeinerung der Def. 2.1.3 auf N Perioden.

Definition 3.1.6 (Risikofreie Trading Strategie, vgl. Platen [12, Def. 2.2.22]). Sei $S \in \mathcal{L}^2(N; \mathbb{R}_{>0}^{M+1})$ ein Mehr-Perioden-Finanzmarkt wie in Def. 3.1.2 und $X \in \mathcal{L}^0(N-1; \mathbb{R}^{M+1})$ eine Trading Strategie (siehe Def. 3.1.3). Dann ist X risikofrei, falls

$$S_{n-1}^T x_n \leq \mathcal{W}_{n-1}(X) \tag{3.1.1}$$

fast sicher für alle $n = 1, \dots, N$ und

$$\mathcal{W}_N(X) \geq \mathcal{W}_0 \frac{S_N^0}{S_0^0} \tag{3.1.2}$$

fast sicher gilt. Wir sagen S enthält keine nicht triviale risikofreie Trading Strategie, falls keine risikofreie Trading Strategie X existiert mit $\widehat{X} \neq 0$ P-f.s., wobei $\widehat{X} := (\widehat{x}_n)_{1 \leq n \leq N}$ durch $\widehat{x}_n := (x_n^1, \dots, x_n^M)^T$ gegeben ist.

Die erste Bedingung (3.1.1) an eine risikofreie Trading Strategie stellt sicher, dass in dem Zeitschritt $n - 1$ zu n nicht mehr Kapital investiert wird, als vorhanden ist und die zweite Bedingung (3.1.2) bedeutet, dass unser Kapital nach N Perioden mindestens so groß ist, wie wenn wir unser gesamtes Vermögen zu Beginn in die risikofreie Anlage investiert hätten.

Die Annahme, es existiere keine nicht triviale risikofreie Trading Strategie, impliziert die folgenden beiden Aussagen.

Lemma 3.1.7 (Keine nicht triviale risikofreie Trading Strategie 1, vgl. Platen [12, Theorem 2.2.23]). *Sei $S \in \mathcal{L}^2(N; \mathbb{R}_{>0}^{M+1})$ ein Mehr-Perioden-Finanzmarkt wie in Def. 3.1.2, welcher keine nicht triviale risikofreie Trading Strategie enthält (vgl. Def. 3.1.6). Dann besteht in jeder Periode n und für jedes nicht triviale Investment η_n von Periode $n - 1$ nach n eine positive Wahrscheinlichkeit, einen geringeren Ertrag als die risikofreie Anlage zu erhalten, d.h. für alle $n = 1, \dots, N$ und alle $\eta_n \in \mathcal{L}^0(\Omega, \mathcal{F}_{n-1}, P; \mathbb{R}^{M+1})$ mit $\widehat{\eta}_n \neq \widehat{0}$ gilt*

$$P\left(\left(S_n - \frac{S_n^0}{S_{n-1}^0} S_{n-1}\right)^T \eta_n < 0\right) > 0.$$

Beweis. Angenommen, es existieren ein $n_0 \in \{1, \dots, N\}$ und $\eta^* \in \mathcal{L}^0(\Omega, \mathcal{F}_{n_0-1}, P; \mathbb{R}^{M+1})$ mit $\widehat{\eta}^* \neq \widehat{0}$, sodass

$$P\left(\left(S_{n_0} - \frac{S_{n_0}^0}{S_{n_0-1}^0} S_{n_0-1}\right)^T \eta^* \geq 0\right) = 1$$

gilt. Dies ist jedoch äquivalent zu

$$S_{n_0}^T \eta^* \geq \frac{S_{n_0}^0}{S_{n_0-1}^0} S_{n_0-1} \eta^* \quad \text{P-f.s.} \quad (3.1.3)$$

und wir stellen fest, dass η^* unabhängig von der risikofreien Anlage ist. Sei nun $Z := (z_n)_{1 \leq n \leq N}$ die Trading Strategie, welche die risikofreie Anlage widerspiegelt, d.h. es gilt

$$z_n := \left(\frac{W_0}{S_0^0}, 0, \dots, 0\right)^T$$

für $n = 1, \dots, N$. Damit erhalten wir die folgende Kapitalentwicklung

$$\mathcal{W}_n(Z) = \mathcal{W}_0 + \sum_{k=1}^n (S_k - S_{k-1})^T z_k = \mathcal{W}_0 \cdot \left(1 + \frac{1}{S_0^0} \sum_{k=1}^n (S_k^0 - S_{k-1}^0)\right).$$

Diese Summe ist jedoch eine Teleskopsumme und es folgt

$$\mathcal{W}_n(Z) = \mathcal{W}_0 \cdot \left(1 + \frac{1}{S_0^0} \sum_{k=1}^n (S_k^0 - S_{k-1}^0)\right) = \mathcal{W}_0 \cdot \left(1 + \frac{1}{S_0^0} (S_n^0 - S_0^0)\right) = \mathcal{W}_0 \frac{S_n^0}{S_0^0} = S_n^T z_k \quad (3.1.4)$$

für alle $n, k = 1, \dots, N$. Mit Hilfe dieser Trading Strategie und η^* wollen wir uns nun eine nicht triviale risikofreie Trading Strategie definieren (vgl. Def. 3.1.6). Sei dazu $Y := (y_n)_{1 \leq n \leq N}$ mit

$$y_{n_0} := \eta^* \quad \text{und} \quad y_n := z_n \quad (3.1.5)$$

für $n \neq n_0$. Dann gilt $\mathcal{W}_n(Y) = \mathcal{W}_n(Z)$ für $n \in \{1, \dots, n_0 - 1\}$. Da η^* unabhängig von der risikofreien Anlage ist, wählen wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit den risikofreien Teil als

$$\eta^0 = \frac{\mathcal{W}_{n_0-1}(Y) - \widehat{S}_{n_0-1}^T \widehat{\eta}^*}{S_{n_0-1}^0} \quad (3.1.6)$$

und fügen wir diese Erkenntnisse zusammen, stellen wir folgendes fest:

$$S_{n_0-1}^T y_{n_0} \stackrel{(3.1.5)}{=} S_{n_0-1}^T \eta^* = S_{n_0-1}^0 \eta^0 + \widehat{S}_{n_0-1}^T \widehat{\eta}^* \stackrel{(3.1.6)}{=} \mathcal{W}_{n_0-1}(Y) \stackrel{(3.1.5)}{=} \mathcal{W}_{n_0-1}(Z) \stackrel{(3.1.4)}{=} S_{n_0-1}^T z_{n_0}. \quad (3.1.7)$$

Damit gilt zusammen mit der Definition der y_n ,

$$S_{n-1}^T y_n = S_{n-1}^T z_n \quad (3.1.8)$$

für alle $n = 1, \dots, N$. Um den Beweis zu beenden, müssen wir die Kapitalentwicklung von Y gegenüber der von Z abschätzen. Diese sind fast gleich, lediglich im Zeitschritt $n_0 - 1$ zu n_0 ergibt sich ein Unterschied, d.h.

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_n(Y) &= \mathcal{W}_n(Z) - (S_{n_0} - S_{n_0-1})^T z_{n_0} + (S_{n_0} - S_{n_0-1})^T \eta^* \\ &= \mathcal{W}_n(Z) - \mathcal{W}_0 \frac{S_{n_0}^0 - S_{n_0-1}^0}{S_0^0} + S_{n_0}^T \eta^* - S_{n_0-1}^T \eta^*. \end{aligned}$$

Dann schätzen wir die rechte Seite mit der Hilfe von Gleichung (3.1.3) ab und erhalten

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_n(Z) - \mathcal{W}_0 \frac{S_{n_0}^0 - S_{n_0-1}^0}{S_0^0} + S_{n_0}^T \eta^* - S_{n_0-1}^T \eta^* \\ \geq \mathcal{W}_n(Z) - \mathcal{W}_0 \frac{S_{n_0}^0 - S_{n_0-1}^0}{S_0^0} + \frac{S_{n_0}^0}{S_{n_0-1}^0} S_{n_0-1}^T \eta^* - S_{n_0-1}^T \eta^* \end{aligned} \quad (3.1.9)$$

P-f.s. Mit Gleichung (3.1.7) gilt $S_{n_0-1}^T \eta^* = S_{n_0-1}^T z_{n_0} = \mathcal{W}_0 S_{n_0-1}^0 / S_0^0$. Dies setzen wir in (3.1.9) ein und bekommen

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_n(Z) - \mathcal{W}_0 \frac{S_{n_0}^0 - S_{n_0-1}^0}{S_0^0} + \frac{S_{n_0}^0}{S_{n_0-1}^0} \frac{S_{n_0-1}^0}{S_0^0} \mathcal{W}_0 - \frac{S_{n_0-1}^0}{S_0^0} \mathcal{W}_0 \\ = \mathcal{W}_n(Z) - \mathcal{W}_0 \frac{S_{n_0}^0 - S_{n_0-1}^0}{S_0^0} + \frac{S_{n_0}^0 - S_{n_0-1}^0}{S_0^0} \mathcal{W}_0 \\ = \mathcal{W}_n(Z). \end{aligned}$$

Also haben wir für alle $n = 1, \dots, N$

$$\mathcal{W}_n(Y) \geq \mathcal{W}_n(Z) \quad \text{P-f.s.} \quad (3.1.10)$$

gezeigt. Fügen wir all dies zusammen, erhalten wir

$$S_{n-1}^T y_n \stackrel{(3.1.8)}{=} S_{n-1}^T z_n \stackrel{(3.1.4)}{=} \mathcal{W}_{n-1}(Z) \stackrel{(3.1.10)}{\leq} \mathcal{W}_{n-1}(Y)$$

für $n = 1, \dots, N$ und

$$\mathcal{W}_N(Y) \stackrel{(3.1.10)}{\geq} \mathcal{W}_N(Z) \stackrel{(3.1.4)}{=} \mathcal{W}_0 \frac{S_N^0}{S_0^0}.$$

Damit ist Y eine nicht triviale risikofreie Trading Strategie, was ein Widerspruch zur Annahme darstellt und es folgt die Behauptung. \square

Lemma 3.1.8 (Keine nicht triviale risikofreie Trading Strategie 2, vgl. Platen [12, Theorem 2.2.23]). Sei $S \in \mathcal{L}^2(N; \mathbb{R}_{>0}^{M+1})$ ein Mehr-Perioden-Finanzmarkt wie in Def. 3.1.2, welcher keine nicht triviale risikofreie Trading Strategie enthält (vgl. Def. 3.1.6). Dann gilt für alle Trading Strategien X und Y ,

$$\mathcal{W}(X) = \mathcal{W}(Y) \quad P\text{-f.s.} \quad \implies \quad \widehat{X} = \widehat{Y},$$

d.h. die Abbildung $\mathcal{W} \in \mathcal{L}^0(N)$ ist injektiv im riskanten Teil.

Beweis. Angenommen, es existieren zwei Trading Strategien $X = (x_n)_{1 \leq n \leq N}$ und $Y = (y_n)_{1 \leq n \leq N}$ mit $\mathcal{W}(X) = \mathcal{W}(Y)$ P-f.s. und $P(\widehat{X} \neq \widehat{Y}) > 0$. Dann gilt

$$\mathcal{W}_n(X) - \mathcal{W}_{n-1}(X) = \mathcal{W}_n(Y) - \mathcal{W}_{n-1}(Y)$$

für alle $n = 1, \dots, N$ und mit der Definition der \mathcal{W} folgt

$$(S_n - S_{n-1})^T x_n = \mathcal{W}_n(X) - \mathcal{W}_{n-1}(X) = (S_n - S_{n-1})^T y_n. \quad (3.1.11)$$

Ziel ist es nun eine nicht triviale Trading Strategie zu finden, die denselben Ertrag wie die risikofreie Anlage hat. Diese Strategie wäre damit insbesondere eine nicht triviale risikofreie Trading Strategie. Definiere $Z \in \mathcal{L}^0(N-1; \mathbb{R}^{M+1})$ durch

$$z_n := \begin{cases} x_n - y_n, & S_{n-1}^T(x_n - y_n) < 0 \\ y_n - x_n, & S_{n-1}^T(x_n - y_n) \geq 0 \end{cases}$$

für $n = 1, \dots, N$. Dann gilt bei Konstruktion $P(\widehat{Z} \neq 0) > 0$, also ist Z nicht trivial, $S_{n-1}^T z_n \leq 0$ und

$$\mathcal{W}_n(Z) = \mathcal{W}_0 + \sum_{k=1}^n (S_k - S_{k-1})^T z_k \stackrel{(3.1.11)}{=} \mathcal{W}_0$$

für alle $n = 1, \dots, N$. Um nun eine Trading Strategie mit den gewünschten Eigenschaften zu erhalten, übernehmen wir den riskanten Teil von Z , aber ändern das Investment in die risikofreie Anlage, d.h. wir definieren Ξ durch $\widehat{\Xi} := \widehat{Z}$ und $\xi_n^0 := z_n^0 + \mathcal{W}_0/S_0^0$ für $n = 1, \dots, N$. Dann gilt für die Kapitalentwicklung von Ξ

$$\mathcal{W}_n(\Xi) = \mathcal{W}_0 + \sum_{k=1}^n (S_k - S_{k-1})^T \xi_k.$$

Da aber per Konstruktion und nach Gleichung (3.1.11) die meisten Summanden wegfallen, gilt

$$\mathcal{W}_0 + \sum_{k=1}^n (S_k - S_{k-1})^T \xi_k = \mathcal{W}_0 + \sum_{k=1}^n (S_k^0 - S_{k-1}^0) \frac{\mathcal{W}_0}{S_0^0}$$

und dies ist wieder eine Teleskopsumme. Also erhalten wir insgesamt

$$\mathcal{W}_n(\Xi) = \mathcal{W}_0 + \sum_{k=1}^n (S_k^0 - S_{k-1}^0) \frac{\mathcal{W}_0}{S_0^0} = \mathcal{W}_0 + (S_n^0 - S_0^0) \frac{\mathcal{W}_0}{S_0^0} = \frac{S_n^0}{S_0^0} \mathcal{W}_0 \quad (3.1.12)$$

für alle $n = 1, \dots, N$, d.h. die Kapitalentwicklung von Ξ ist gleich dem Ertrag in der risikofreien Anlage. Bleibt zu überprüfen, ob das Investment zulässig im Sinne von (3.1.1) ist. Dazu betrachten wir

$$S_{n-1}^T \xi_n = S_{n-1}^0 z_n^0 + S_{n-1}^0 \frac{\mathcal{W}_0}{S_0^0} + \widehat{S}_{n-1} \widehat{z}_n = S_{n-1}^T z_n + \frac{S_{n-1}^0}{S_0^0} \mathcal{W}_0.$$

Es gilt jedoch per Konstruktion $S_{n-1}^T z_n \leq 0$. Nutzen wir dies zum Abschätzen der obigen Gleichung, erhalten wir

$$S_{n-1}^T \xi_n = S_{n-1}^T z_n + \frac{S_{n-1}^0}{S_0^0} \mathcal{W}_0 \leq \frac{S_{n-1}^0}{S_0^0} \mathcal{W}_0 \stackrel{(3.1.12)}{=} \mathcal{W}_{n-1}(\Xi)$$

Also ist Ξ eine nicht triviale risikofreie Trading Strategie und dies steht im Widerspruch zu der Annahme. \square

Es ist noch interessant zu erwähnen, dass die Folgerungen aus Lemma 3.1.7 und Lemma 3.1.8 nicht nur notwendige, sondern sogar hinreichende Bedingung für die Annahme, es existiere keine nicht triviale risikofreie Trading Strategie, darstellen. Also erhalten wir in beiden Lemmata Äquivalenz. Da wir die Rückrichtung im Folgenden nicht benötigen, verzichten wir auf den Beweis und ich verweise hier auf Platen [12, Theorem 2.2.23].

3.2. Growth Optimal Trading Strategie

Mit diesem Modell sind wir soweit, ein erstes Optimierungsproblem in den Blick zu nehmen. Ähnlich zum Growth Optimal Portfolio im Ein-Perioden-Finanzmarkt wollen wir eine Allokation unseres Kapitals finden, mit der wir das schnellste kumulierte Wachstum erreichen. Wir möchten also für jede Finanzanlage zu Beginn festlegen, welchen Anteil unseres Kapitals konstant über alle Perioden in die jeweilige Finanzanlage investiert ist. Da sich unser Kapital über die Perioden und damit auch die Verhältnisse der Anlagen verändern, müssen wir unser Portfolio jede Periode neu allokatieren.

Um dieses Konzept anschaulicher darzustellen, definieren wir zu einem Mehr-Perioden-Finanzmarkt $S \in \mathcal{L}^2(N; \mathbb{R}_{>0}^{M+1})$ wie in Def. 3.1.2 den Quotienten von aufeinander folgenden Preisen $\mathcal{R} := (\mathcal{R}_n)_{1 \leq n \leq N} \in \mathcal{L}^0(N-1; \mathbb{R}_{>0}^{M+1})$ gegeben durch

$$\mathcal{R}_n = \left(\frac{S_n^0}{S_{n-1}^0}, \frac{S_n^1}{S_{n-1}^1}, \dots, \frac{S_n^M}{S_{n-1}^M} \right)^T \quad (3.2.1)$$

für $n = 1, \dots, N$. Dieser Ansatz wird in Brenner [2] weiter ausgeführt und auch auf andere Konzepte übertragen. Weiter gibt uns die Menge

$$\mathcal{A}_1 := \left\{ f \in \mathbb{R}^{M+1} \mid \sum_{i=0}^M f_i = 1 \right\} \quad (3.2.2)$$

alle möglichen Aufteilungen unseres Kapitals auf $M+1$ Finanzanlagen. Dabei gibt uns f_i den relativen Anteil unseres Kapitals, das wir in die i -te Finanzanlage investieren. Den absoluten Anteil zu Beginn der Investition erhalten wir dann durch $f_i \cdot \mathcal{W}_0$ (vgl. Def. 3.1.4). Da wir das gesamte Kapital allokatieren möchten, muss die Summe über diese f_i eins ergeben. Insbesondere sind negative f_i als Short-Positionen zu verstehen.

Auf dieser Menge erhalten wir eine Funktion $v_{\text{twr}} : \mathcal{A}_1 \rightarrow \mathcal{L}^0(N-1; \mathbb{R}^{M+1})$, welche aus einer solchen Aufteilung eine Trading Strategie generiert, sodass diese Aufteilung in jeder Periode konstant bleibt und wir voll investiert sind, d.h.

$$(v_{\text{twr}}(f))_1^i := \frac{f_i}{S_0^i} \mathcal{W}_0, \quad (v_{\text{twr}}(f))_n^i := \frac{f_i}{S_{n-1}^i} \mathcal{W}_{n-1}(v_{\text{twr}}(f)) \quad (3.2.3)$$

für $n = 2, \dots, N$ Perioden und $i = 0, \dots, M$ Finanzanlagen, wobei wir die Bezeichnungen aus Definition 3.1.4 verwendet haben. Dann gibt uns $(v_{\text{twr}}(f))_n^i$ die Anzahl der Anteile an der i ten Finanzanlage für den Zeitschritt $n - 1$ zu n und wir erkennen sofort

$$S_{n-1}^i (v_{\text{twr}}(f))_n^i = f_i \mathcal{W}_{n-1}(v_{\text{twr}}(f))$$

für $n = 1, \dots, N$ und $i = 0, \dots, M$. Also erfüllt die Trading Strategie $v_{\text{twr}}(f)$ tatsächlich die gewünschte Eigenschaft. Die Menge aller Aufteilungen f , damit $v_{\text{twr}}(f)$ eine zulässige Trading Strategie im Sinne von Def. 3.1.5 wird, ist gegeben durch

$$\mathcal{A}_{\text{twr}} := \left\{ f \in \mathcal{A}_1 \mid \mathcal{R}_n^T f > 0 \text{ P-f.s. für } n = 1, \dots, N \right\}. \quad (3.2.4)$$

Denn sobald in einer Periode $k \in \{1, \dots, N\}$ der Fall $\mathcal{R}_k^T f \leq 0$ eintritt, entspricht dies einem Total-Verlust des Kapitals und ein weiteres Investment ist nicht mehr möglich. Insbesondere entspricht $\mathcal{R}_k^T f < 0$ einer Verschuldung der investierenden Person. Um dies zu verdeutlichen, betrachten wir die Kapitalentwicklung von v_{twr} .

Lemma 3.2.1 (Kapitalentwicklung von v_{twr} , vgl. Maier-Paape, Platen und Zhu [9, Bsp. 2]).
Sei $N \in \mathbb{N}$ und \mathcal{A}_{twr} wie in (3.2.4) gegeben. Für alle $f \in \mathcal{A}_{\text{twr}}$ und $n = 1, \dots, N$ gilt

$$\mathcal{W}_n(v_{\text{twr}}(f)) = \mathcal{W}_0 \prod_{k=1}^n \mathcal{R}_k^T f$$

fast sicher.

Beweis. Sei $f \in \mathcal{A}_{\text{twr}}$ und $n \in \{1, \dots, N\}$. Dann gilt per Definition der Kapitalentwicklung (siehe Def. 3.1.4),

$$\mathcal{W}_n(v_{\text{twr}}(f)) = \mathcal{W}_{n-1}(v_{\text{twr}}(f)) + (S_n - S_{n-1})^T (v_{\text{twr}}(f))_n.$$

Durch Umschreiben des Skalarprodukts in eine Summe und Einsetzen der Definition von v_{twr} wie in (3.2.3) gilt

$$\begin{aligned} & \mathcal{W}_{n-1}(v_{\text{twr}}(f)) + (S_n - S_{n-1})^T ((v_{\text{twr}}(f))_n) \\ &= \mathcal{W}_{n-1}(v_{\text{twr}}(f)) + \left(\sum_{i=0}^M (S_n^i - S_{n-1}^i) \frac{f_i}{S_{n-1}^i} \mathcal{W}_{n-1}(v_{\text{twr}}(f)) \right). \end{aligned}$$

Schließlich folgt mit ausklammern von $\mathcal{W}_{n-1}(v_{\text{twr}}(f))$

$$\begin{aligned} & \mathcal{W}_{n-1}(v_{\text{twr}}(f)) + \left(\sum_{i=0}^M (S_n^i - S_{n-1}^i) \frac{f_i}{S_{n-1}^i} \mathcal{W}_{n-1}(v_{\text{twr}}(f)) \right) \\ &= \mathcal{W}_{n-1}(v_{\text{twr}}(f)) \cdot \left(1 + \sum_{i=0}^M \frac{S_n^i}{S_{n-1}^i} f_i - \sum_{i=0}^M f_i \right) \end{aligned}$$

und nach Konstruktion des Quotienten von aufeinander folgenden Preisen (3.2.1) gilt insgesamt

$$\mathcal{W}_n(v_{\text{twr}}(f)) = \mathcal{W}_{n-1}(v_{\text{twr}}(f)) \cdot \mathcal{R}_n^T f,$$

da $f \in \mathcal{A}_{\text{twr}}$. Per Induktion folgt die Behauptung. \square

Dieses Lemma können wir lediglich auf $f \in \mathcal{A}_{\text{twr}}$ anwenden. Für beliebiges $f \in \mathcal{A}_1$ müssen wir im Falle $\mathcal{R}_k^T f \leq 0$ für ein $k \in \{1, \dots, N\}$ unser gesamtes Investment während der Periode (z.B. intraday) verkaufen und setzen $\mathcal{W}_\ell(v_{\text{twr}}(f)) \equiv 0$ für alle $\ell \in \{k, \dots, N\}$.

Bemerkung 3.2.2 (Keine nicht triviale risikofreie fraktionale Trading Strategie). Im Folgenden werden wir öfters die Annahme, es existiere keine nicht triviale risikofreie Trading Strategie (vgl. Def. 3.1.6), verwenden. Da wir uns im Kontext der fraktionalen Trading Strategien bewegen, wäre es schön, wenn wir diese Voraussetzung lediglich für solche Strategien der Form $v_{\text{twr}}(f)$ verwenden müssten (vgl. (3.2.3)). In Bezug auf die fraktionale Trading Strategien bedeutet diese Annahme, dass keine Aufteilung neben $f^* = (1, \widehat{0}^T)^T$ existiert, welche nach N Perioden sicher einen mindestens so hohen Gewinn wie f^* erwirtschaftet. Um dies zu sehen, nehmen wir zunächst an, $f \in \mathcal{A}_{\text{twr}}$ (vgl. (3.2.4)) erfülle Gleichung (3.1.2) mit der fraktionalen Trading Strategie $X = v_{\text{twr}}(f)$. Dann gilt

$$\mathcal{W}_N(v_{\text{twr}}(f)) \stackrel{\text{Lemma 3.2.1}}{=} \mathcal{W}_0 \prod_{n=1}^N \mathcal{R}_n^T f \stackrel{(3.1.2)}{\geq} \mathcal{W}_0 \frac{S_N^0}{S_0^0} \quad \text{P-f.s.}$$

und daraus folgt

$$\prod_{n=1}^N \mathcal{R}_n^T f \geq \frac{S_N^0}{S_0^0} = \prod_{n=1}^N \mathcal{R}_n^T f^* \quad \text{P-f.s.} \quad (3.2.5)$$

Per Konstruktion der fraktionalen Trading Strategie v_{twr} ist Gleichung (3.1.1) für alle $X = v_{\text{twr}}(f)$ mit $f \in \mathcal{A}_{\text{twr}}$ mit Gleichheit erfüllt. Daraus folgt, dass unter der Annahme, es existiere keine nicht triviale risikofreie fraktionale Trading Strategie, Gleichung (3.1.2) nur für $X^* = v_{\text{twr}}(f^*)$ mit $f^* = (1, \widehat{0}^T)^T$ erfüllt sein darf, d.h. mit (3.2.5) muss die Implikation

$$\prod_{n=1}^N \mathcal{R}_n^T f \geq \prod_{n=1}^N \mathcal{R}_n^T f^* \quad \text{P-f.s.} \quad \implies \quad f = f^*$$

für alle $f \in \mathcal{A}_{\text{twr}}$ gelten und dies entspricht der obigen Interpretation, da $f \in \mathcal{A}_1 \setminus \mathcal{A}_{\text{twr}}$ per Definition zum Totalverlust führt und daher nicht risikofrei sein kann. Leider können wir momentan nicht auf die restriktivere Voraussetzung, es existiere keine nicht triviale risikofreie Trading Strategie, verzichten, da wir oft auf die Resultate aus Lemma 3.1.7 und Lemma 3.1.8 zurückgreifen müssen.

Nun möchten wir zwei wichtige Eigenschaften der Menge \mathcal{A}_{twr} im folgenden Lemma zusammenfassen.

Lemma 3.2.3 (Menge an zulässigen Trading Strategien, vgl. Platen [12, Prop. 2.2.8 und Lemma 2.2.29]). *Sei $S \in \mathcal{L}^2(N; \mathbb{R}_{>0}^{M+1})$ ein Mehr-Perioden-Finanzmarkt wie in Def. 3.1.2. Dann ist \mathcal{A}_{twr} aus (3.2.4) konvex. Enthält S keine nicht triviale risikofreie Trading Strategie (vgl. Def. 3.1.6), so ist \mathcal{A}_{twr} beschränkt.*

Beweis. Die Konvexität lässt sich leicht nachrechnen. Seien $f^1, f^2 \in \mathcal{A}_{\text{twr}}$ und $\lambda \in [0, 1]$ gegeben. Dann ist $\lambda f^1 + (1 - \lambda)f^2 \in \mathcal{A}_1$ und es gilt

$$\mathcal{R}_n^T(\lambda f^1 + (1 - \lambda)f^2) = \lambda \underbrace{\mathcal{R}_n^T f^1}_{>0} + (1 - \lambda) \underbrace{\mathcal{R}_n^T f^2}_{>0} > 0.$$

Also gilt $\lambda f^1 + (1 - \lambda)f^2 \in \mathcal{A}_{\text{twr}}$. Nehmen wir nun an, $S \in \mathcal{L}^2(N; \mathbb{R}_{>0}^{M+1})$ enthält keine nicht triviale risikofreie Trading Strategie und \mathcal{A}_{twr} ist unbeschränkt. Dann existiert eine Folge $(f^m)_m \subset \mathcal{A}_{\text{twr}}$ mit $f^m = (f_0^m, \dots, f_M^m)$ und

$$\mathcal{R}_n^T f^m > 0, \quad \sum_{i=0}^M f_i^m = 1, \quad \text{sowie} \quad \|f^m\| \rightarrow \infty \quad \text{für} \quad m \rightarrow \infty.$$

Insbesondere gilt ebenso für $(v_{\text{twr}}(f^m))_1$ mit Komponenten $(v_{\text{twr}}(f^m))_1^i = \mathcal{W}_0 f_i^m / S_0^i$ (vgl. (3.2.3)), dass

$$\|(v_{\text{twr}}(f^m))_1\| \rightarrow \infty \quad \text{für } m \rightarrow \infty,$$

sowie mit der Definition der Kapitalentwicklung und Lemma 3.2.1 gilt

$$\mathcal{W}_1(v_{\text{twr}}(f^m)) = \mathcal{W}_0 + (S_1 - S_0)^T \cdot (v_{\text{twr}}(f^m))_1 = \mathcal{W}_0 \mathcal{R}_1^T f^m > 0 \quad \text{P-f.s.} \quad (3.2.6)$$

für alle $m \in \mathbb{N}$. Mit $\mathcal{W}_0 = \mathcal{W}_0 \sum_{i=0}^M f_i^m = S_0^T (v_{\text{twr}}(f^m))_1$ folgt, dass auch der risikoreiche Teil der Trading Strategie in der Norm gegen unendlich divergiert, d.h.

$$\|\widehat{(v_{\text{twr}})_1}(f^m)\| \rightarrow \infty \quad \text{für } m \rightarrow \infty.$$

Weiter ist $\widehat{(v_{\text{twr}})_1}(f^m) / \|\widehat{(v_{\text{twr}})_1}(f^m)\|$ durch eins beschränkt und damit existiert eine Teilfolge, die wir wieder mit $(f^m)_m$ bezeichnen, sodass

$$\frac{\widehat{(v_{\text{twr}})_1}(f^m)}{\|\widehat{(v_{\text{twr}})_1}(f^m)\|} \rightarrow \hat{x}^* \in \mathbb{R}^{M+1} \quad \text{für } m \rightarrow \infty$$

mit $\|\hat{x}^*\| = 1$. Wegen $\mathcal{W}_0 = S_0^T \cdot (v_{\text{twr}}(f^m))_1 = S_0^0 (v_{\text{twr}}(f^m))_1^0 + \widehat{S}_0^T \widehat{(v_{\text{twr}})_1}(f^m)$ folgt insbesondere

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{(v_{\text{twr}})_1^0(f^m)}{\|\widehat{(v_{\text{twr}})_1}(f^m)\|} = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{S_0^0} \frac{\mathcal{W}_0 - \widehat{S}_0^T \widehat{(v_{\text{twr}})_1}(f^m)}{\|\widehat{(v_{\text{twr}})_1}(f^m)\|} = -\frac{\widehat{S}_0^T \hat{x}^*}{S_0^0} := x_0^* \quad (3.2.7)$$

also gilt insgesamt

$$\frac{(v_{\text{twr}})_1(f^m)}{\|\widehat{(v_{\text{twr}})_1}(f^m)\|} \rightarrow x^* := (x_0^*, (\hat{x}^*)^T)^T \in \mathbb{R}^{M+1} \quad \text{für } m \rightarrow \infty$$

und daraus folgt

$$S_0^T x^* = S_0^0 x_0^* + \widehat{S}_0^T \hat{x}^* \stackrel{(3.2.7)}{=} 0. \quad (3.2.8)$$

Teilen wir nun Ungleichung (3.2.6) durch $\|\widehat{(v_{\text{twr}})_1}(f^m)\|$ und nehmen den Grenzwert gegen unendlich folgt mit (3.2.8)

$$S_1^T x^* \geq 0 \quad \text{P-f.s.} \quad (3.2.9)$$

Damit gilt jedoch

$$P\left(\left(S_1 - \frac{S_1^0}{S_0^0} S_0\right)^T x^* < 0\right) \stackrel{(3.2.8)}{=} P(S_1^T x^* < 0) \stackrel{(3.2.9)}{=} 0,$$

was einen Widerspruch zur Annahme, es existiere keine nicht triviale risikofreie Trading Strategie, darstellt (vgl. Lemma 3.1.7). Also ist \mathcal{A}_{twr} beschränkt. \square

Dieses Setup ist verbunden mit dem Terminal Wealth Relative (TWR), welches wir in der folgenden Definition thematisieren.

Definition 3.2.4 (Terminal Wealth Relative, vgl. Vince [15]). Sei \mathcal{A}_{twr} wie in (3.2.4). Für $f \in \mathcal{A}_{\text{twr}}$ und $a, b \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq a \leq b \leq N$ definieren wir

$$\text{TWR}_a^b(f) := \prod_{n=a}^b \mathcal{R}_n^T f \stackrel{\text{Lemma 3.2.1}}{=} \frac{\mathcal{W}_b(v_{\text{twr}}(f))}{\mathcal{W}_{a-1}(v_{\text{twr}}(f))} \in \mathcal{L}^0(\mathbb{R}_{>0}).$$

Dann ist der Terminal Wealth Relative (TWR) definiert durch

$$\text{TWR}(f) := \text{TWR}_1^N(f) = \prod_{n=1}^N \mathcal{R}_n^T f = \frac{\mathcal{W}_N(v_{\text{twr}}(f))}{\mathcal{W}_0} \in \mathcal{L}^0(\mathbb{R}_{>0}).$$

Mit diesen Einführungen können wir analog zum Ein-Perioden-Finanzmarkt eine Nutzenfunktion basierend auf dem log-TWR definieren.

$$\mathbf{u}_{\ln \text{TWR}} : \mathbb{R}^{M+1} \rightarrow [-\infty, \infty], f \mapsto \begin{cases} E[\ln(\text{TWR}(f))], & f \in \mathcal{A}_{\text{twr}} \\ -\infty, & f \notin \mathcal{A}_{\text{twr}} \end{cases}. \quad (3.2.10)$$

Mit der Charakterisierung des Terminal Wealth Relative und den Rechenregeln des natürlichen Logarithmus' folgt für $f \in \mathcal{A}_{\text{twr}}$

$$\mathbf{u}_{\ln \text{TWR}}(f) = E \left[\ln \left(\prod_{n=1}^N \mathcal{R}_n^T f \right) \right] = \sum_{n=1}^N E[\ln(\mathcal{R}_n^T f)]. \quad (3.2.11)$$

3.2.1. Optimierung auf a posteriori zulässigen Mengen

Im Allgemeinen wissen wir im Vorhinein nicht, inwiefern eine Aufteilung in der Praxis zulässig ist, d.h. wir können die Menge \mathcal{A}_{twr} nicht explizit angeben. Um das Optimierungsproblem etwas genauer zu verstehen, möchten wir in einem ersten Ansatz dennoch die Funktion $\mathbf{u}_{\ln \text{TWR}}$ auf \mathcal{A}_{twr} maximieren. Natürlich können wir diese Optimierung auch auf beliebigen nicht leeren, konvexen Teilmengen $\mathcal{B} \subset \text{dom}(\mathbf{u}_{\ln \text{TWR}}) \subset \mathcal{A}_{\text{twr}}$ stattfinden lassen. Die Beweise verlaufen analog.

Brenner multipliziert in [2, Kapitel 5.2.2] die Funktion $\mathbf{u}_{\ln \text{TWR}}$ mit $1/N$. Die daraus resultierende Funktion gibt dann nicht mehr den absoluten Ertrag, sondern den mittleren Ertrag nach N Perioden wieder. Dies ändert natürlich nichts am optimalen Portfolio bzgl. $\mathbf{u}_{\ln \text{TWR}}$. Halten wir einige erste Eigenschaften der Nutzenfunktion $\mathbf{u}_{\ln \text{TWR}}$ fest.

Korollar 3.2.5 (log-TWR Nutzenfunktion 1, vgl. Platen [12, Theorem 2.3.12]). Sei $S \in \mathcal{L}^2(N; \mathbb{R}_{>0}^{M+1})$ ein Mehr-Perioden-Finanzmarkt wie in Def. 3.1.2 und der Quotient von aufeinander folgenden Preisen \mathcal{R} wie in (3.2.1) gegeben. Angenommen, $\ln(\mathcal{R}_n^i) \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{F}_n, P; \mathbb{R})$ gilt für $n = 1, \dots, N$ und $i = 0, \dots, M$. Dann ist $\mathbf{u}_{\ln \text{TWR}}$ proper konkav (vgl. Def. A.1.1) und $\mathbf{u}_{\ln \text{TWR}} < \infty$.

Beweis. Zuerst stellen wir fest, dass für $f^* := (1, \hat{0}^T)^T \in \mathcal{A}_{\text{twr}}$

$$\mathbf{u}_{\ln \text{TWR}}(f^*) = \sum_{n=1}^N \ln \left(\frac{S_n^0}{S_{n-1}^0} \right) = \ln \left(\prod_{n=1}^N \frac{S_n^0}{S_{n-1}^0} \right) = \ln \left(\frac{S_N^0}{S_0^0} \right) < \infty$$

gilt, da (S_0^0, \dots, S_N^0) die risikofreie Anlage (siehe Def. 3.1.1) des Mehr-Perioden-Finanzmarktes widerspiegelt und S_N^0, S_0^0 damit fast sicher konstant sind. Damit ist $f^* \in \text{dom}(\mathbf{u}_{\ln \text{TWR}})$ und somit $\text{dom}(\mathbf{u}_{\ln \text{TWR}}) \neq \emptyset$. Da $\ln(\mathcal{R}_n^i)$ nach Annahme einen endlichen Erwartungswert hat, folgt für $f \in \mathcal{A}_{\text{twr}}$

$$\mathbf{u}_{\ln \text{TWR}}(f) \stackrel{(3.2.11)}{=} \sum_{n=1}^N E \left[\ln(\mathcal{R}_n^T f) \right] \leq \sum_{n=1}^N E[\ln(\|\mathcal{R}_n\|_\infty)] + N \ln((M+1)\|f\|_\infty) < \infty,$$

wobei die Supremumsnorm $\|\cdot\|_\infty$ als das Maximum aller Komponenten des Vektors definiert ist. Die Endlichkeit des rechten Summanden folgt, da $\|f\|_\infty \in \mathbb{R}$ für $f \in \mathbb{R}^{M+1}$ beliebig. Außerdem ist $u_{\ln TWR}(f) = -\infty < \infty$ für $f \notin \mathcal{A}_{\text{twr}}$. Also bleibt die Konkavität zu zeigen. Diese folgt aus der Konkavität des natürlichen Logarithmus' und der Linearität des Erwartungswertes. \square

Um später im Optimierungsproblem Eindeutigkeit zu erhalten, benötigen wir eine Art „Strenge“. Um diese zu erhalten, müssen wir noch eine weitere Voraussetzung fordern.

Korollar 3.2.6 (log-TWR Nutzenfunktion 2, vgl. Platen [12, Theorem 2.3.12]). *Sei $S \in \mathcal{L}^2(N; \mathbb{R}_{>0}^{M+1})$ ein Mehr-Perioden-Finanzmarkt wie in Def. 3.1.2, der Quotient von aufeinander folgenden Preisen \mathcal{R} wie in (3.2.1) und \mathcal{A}_{twr} wie in (3.2.4) gegeben. Angenommen, S enthält keine nicht triviale risikofreie Trading Strategie (vgl. Def. 3.1.6). Dann ist $u_{\ln TWR}$ eingeschränkt auf \mathcal{A}_{twr} streng konkav und*

$$\mathcal{B}_{u_{\ln TWR}, \mathcal{A}_{\text{twr}}}(\mu) := \{f \in \mathcal{A}_{\text{twr}} \mid u_{\ln TWR}(f) \geq \mu\} \subset \text{dom}(u_{\ln TWR})$$

ist für alle $\mu \in \mathbb{R}$ beschränkt.

Beweis. Seien $f, f' \in \mathcal{A}_{\text{twr}}$ beliebig mit $\mathcal{W}(v_{\text{twr}}(f)) = \mathcal{W}(v_{\text{twr}}(f'))$ P-f.s. Dann gilt $\widehat{v_{\text{twr}}(f)} = \widehat{v_{\text{twr}}(f')}$ nach Lemma 3.1.8. Per Definition von v_{twr} muss damit auch $f = f'$ gelten. Also existiert für beliebige $f, f' \in \mathcal{A}_{\text{twr}}$ mit $f \neq f'$ mindestens ein $n_0 \in \{1, \dots, N\}$ mit

$$P(\mathcal{R}_{n_0}^T f \neq \mathcal{R}_{n_0}^T f') > 0.$$

Mit dieser Erkenntnis erhalten wir für $\lambda \in (0, 1)$ mit der strengen Konkavität des natürlichen Logarithmus', dass

$$P\left[\ln(\mathcal{R}_{n_0}^T(\lambda f + (1-\lambda)f')) > \lambda \ln(\mathcal{R}_{n_0}^T f) + (1-\lambda) \ln(\mathcal{R}_{n_0}^T f')\right] > 0$$

gilt. Daraus folgt

$$E[\ln(\mathcal{R}_{n_0}^T(\lambda f + (1-\lambda)f'))] > E[\lambda \ln(\mathcal{R}_{n_0}^T f) + (1-\lambda) \ln(\mathcal{R}_{n_0}^T f')].$$

Also erhalten wir strenge Konkavität für mindestens einen Summanden von $u_{\ln TWR}$. Da wir in den restlichen Summanden einfache Konkavität anwenden können, bekommen wir strenge Konkavität von $u_{\ln TWR}$ eingeschränkt auf \mathcal{A}_{twr} . Die Beschränktheit von $\mathcal{B}_{u_{\ln TWR}, \mathcal{A}_{\text{twr}}}(\mu)$ folgt direkt aus Lemma 3.2.3, da $\mathcal{B}_{u_{\ln TWR}, \mathcal{A}_{\text{twr}}}(\mu)$ eine Teilmenge von \mathcal{A}_{twr} ist. \square

Die Growth Optimal Trading Strategie bezieht sich analog zum Growth Optimal Portfolio darauf, die Nutzenfunktion zu maximieren. Leider können wir keine allgemeingültige Aussage darüber treffen, ob $u_{\ln TWR}$ abgeschlossen ist. Diese Voraussetzung werden wir später jedoch benötigen, da für die Existenz einer Lösung - ähnlich zum Ein-Perioden-Finanzmarkt - $\mathcal{B}_{u_{\ln TWR}, \mathcal{A}_{\text{twr}}}$ kompakt sein muss. Im Ein-Perioden-Finanzmarkt haben wir gesehen, dass diese Eigenschaft erfüllt ist. Dies liegt maßgeblich daran, dass wir einen endlichen Ereignisraum betrachtet haben.

Platen verwendet daher in [12, Kapitel 3.1.5] den Abschluss von $u_{\ln TWR}$ als Nutzenfunktion. Bevor wir uns schließlich dem Optimierungsproblem widmen, betrachten wir $u_{\ln TWR}$ auf einem endlichen Wahrscheinlichkeitsraum.

Bemerkung 3.2.7 ($u_{\ln TWR}$ auf einem endlichen Wahrscheinlichkeitsraum, vgl. Maier-Paape, Platen und Zhu [9, Bsp. 10]). Angenommen, der Wahrscheinlichkeitsraum ist endlich, d.h. $\Omega :=$

$\{\omega_1, \dots, \omega_K\}$ für ein festes $K \in \mathbb{N}$ und $p_k := P(\{\omega_k\}) > 0$ für alle $k = 1, \dots, K$. Dann gilt für \mathcal{A}_{twr} aus Gleichung (3.2.4)

$$\mathcal{A}_{\text{twr}} = \left\{ f \in \mathcal{A}_1 \mid \mathcal{R}_n^T(\omega_k) f > 0 \text{ für } n = 1, \dots, N \text{ und } k = 1, \dots, K \right\} \neq \emptyset.$$

Insbesondere ist $\mathcal{R}_n(\omega_k) \in \mathbb{R}^{M+1}$ ein fester Vektor für alle $n = 1, \dots, N$ und $k = 1, \dots, K$. Weiter gilt für $f \in \mathcal{A}_{\text{twr}}$ und $\mathbf{u}_{\text{lnTWR}}$ aus Gleichung (3.2.11)

$$\mathbf{u}_{\text{lnTWR}}(f) = \sum_{n=1}^N \sum_{k=1}^K p_k \ln(\mathcal{R}(\omega_k)_n^T f).$$

Insbesondere erkennen wir, dass $\mathbf{u}_{\text{lnTWR}}$ in diesem Fall sogar stetig auf \mathcal{A}_{twr} und damit abgeschlossen ist. Weiter können wir auf einem solchen endlichen Wahrscheinlichkeitsraum feststellen, dass die Domain von $\mathbf{u}_{\text{lnTWR}}$ mit der Menge \mathcal{A}_{twr} übereinstimmt, d.h. $\text{dom}(\mathbf{u}_{\text{lnTWR}}) = \mathcal{A}_{\text{twr}}$. Dies liegt ebenfalls an der Endlichkeit von Ω , denn für $|\Omega| = \infty$ ist der Fall $\text{dom}(\mathbf{u}_{\text{lnTWR}}) \subsetneq \mathcal{A}_{\text{twr}}$ durchaus möglich.

Im Allgemeinen ist der Wahrscheinlichkeitsraum jedoch nicht endlich und damit kann es sein, dass $\mathbf{u}_{\text{lnTWR}}$ nicht abgeschlossen ist. Daher müssen wir dies im folgenden Theorem als Annahme voraussetzen.

Theorem 3.2.8 (Growth Optimal Trading Strategie auf \mathcal{A}_{twr} , vgl. Platen [12, Korollar 3.1.15]). *Sei $S \in \mathcal{L}^2(N; \mathbb{R}_{>0}^{M+1})$ ein Mehr-Perioden-Finanzmarkt wie in Def. 3.1.2, der Quotient von aufeinander folgenden Preisen \mathcal{R} wie in (3.2.1) und \mathcal{A}_{twr} wie in (3.2.4) gegeben. Angenommen, $\ln(\mathcal{R}_n^i) \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{F}_n, P; \mathbb{R})$ gilt für $n = 1, \dots, N$ und $i = 0, \dots, M$, S enthält keine nicht triviale risikofreie Trading Strategie (vgl. Def. 3.1.6) und $\mathbf{u}_{\text{lnTWR}}$ eingeschränkt auf \mathcal{A}_{twr} ist abgeschlossen. Dann hat das Problem*

$$\max_{f \in \mathcal{A}_{\text{twr}}} \mathbf{u}_{\text{lnTWR}}(f)$$

eine eindeutige Lösung $f_{\text{max}}^* \in \mathcal{A}_{\text{twr}}$.

Beweis. Im Beweis von Korollar 3.2.5 haben wir gesehen, dass für $f^* := (1, \widehat{0}^T)^T \in \mathcal{A}_{\text{twr}}$ gilt

$$\mu^* := \mathbf{u}_{\text{lnTWR}}(f^*) = \ln\left(\frac{S_N^0}{S_0^0}\right) < \infty.$$

Also ist die Menge $\mathcal{B}_{\mathbf{u}_{\text{lnTWR}}, \mathcal{A}_{\text{twr}}}(\mu^*)$ aus Korollar 3.2.6 nicht leer. Nach Voraussetzung ist $\mathbf{u}_{\text{lnTWR}}$ abgeschlossen und nach Korollar 3.2.5 proper konkav auf \mathcal{A}_{twr} . Dies impliziert Abgeschlossenheit von $\mathcal{B}_{\mathbf{u}_{\text{lnTWR}}, \mathcal{A}_{\text{twr}}}(\mu^*)$ (vgl. Theorem A.1.4). Insbesondere folgt mit Korollar 3.2.6 auch die Beschränktheit und damit die Kompaktheit von $\mathcal{B}_{\mathbf{u}_{\text{lnTWR}}, \mathcal{A}_{\text{twr}}}(\mu^*)$, d.h. existiert mindestens eine Lösung (vgl. Theorem A.1.5).

Die Eindeutigkeit folgt, da $\mathbf{u}_{\text{lnTWR}}$ nach Korollar 3.2.6 streng konkav auf \mathcal{A}_{twr} ist und daher nur ein Maximum enthalten kann. \square

Im Ein-Perioden-Finanzmarkt hatten wir beim Growth Optimal Portfolio die unit initial cost Nebenbedingung. Diese existiert analog auch im Optimierungsproblem der Growth Optimal Trading Strategie, jedoch haben wir diese in der Menge $\mathcal{A}_{\text{twr}} \subset \mathcal{A}_1$ und nicht als extra Nebenbedingung berücksichtigt. Zum Abschluss dieses Abschnitts wollen wir in folgender Bemerkung den Zusammenhang zwischen Growth Optimal Portfolio (vgl. Kapitel 2.2) und der Growth Optimal Trading Strategie festhalten.

Bemerkung 3.2.9. Natürlich können wir das Mehr-Perioden-Finanzmarkt-Modell wie in Def. 3.1.2 auf ein Ein-Perioden-Finanzmarkt-Modell wie in Def. 2.1.1 reduzieren. Dazu sei die Anzahl der Perioden $N = 1$. Dann erhalten wir mit Theorem 3.2.8 unter den dort vorausgesetzten Annahmen eine eindeutige Lösung $f^* \in \mathcal{A}_{\text{twr}} \subset \mathbb{R}^{M+1}$ von

$$\max_{f \in \mathcal{A}_{\text{twr}}} E[\ln(\mathcal{R}_1^T f)]$$

und wir stellen fest, dass $\kappa \in \mathbb{R}^{M+1}$ mit $\kappa_i := f_i^*/S_0^i$ für $i = 0, \dots, M$ die eindeutige Lösung des Growth Optimal Portfolio Problems (2.2.1) ist. Um dies zu zeigen, rechnen wir erst die unit initial cost Nebenbedingung nach. Es gilt

$$S_0^T \kappa = \sum_{i=0}^M S_0^i \frac{f_i^*}{S_0^i} = \sum_{i=0}^M f_i^* = 1,$$

da $f^* \in \mathcal{A}_{\text{twr}} \subset \mathcal{A}_1$ und damit eine zulässige Aufteilung unseres Kapitals darstellt (vgl. (3.2.2)). Weiter erhalten wir per Definition

$$E[\ln(\mathcal{R}_1^T f^*)] = E\left[\ln\left(\sum_{i=0}^M \frac{S_1^i}{S_0^i} f_i^*\right)\right] = E[\ln(S_1^T \kappa)]$$

und damit ist κ tatsächlich das Growth Optimal Portfolio. Also sind diese Probleme äquivalent. Insbesondere haben Theorem 2.2.3 und Theorem 3.2.8 dieselben Voraussetzungen, wenn wir in Theorem 3.2.8 eine endliche Ereignismenge wie im Ein-Perioden-Finanzmarkt annehmen, da in diesem Fall nach Bemerkung 3.2.7 die Funktion $u_{\ln\text{TWR}}$ abgeschlossen ist.

3.2.2. Optimierung auf a priori zulässigen Mengen

Wie schon erwähnt, wollen wir das Optimierungsproblem nicht mehr auf \mathcal{A}_{twr} , sondern einer Teilmenge von \mathcal{A}_1 untersuchen. Allgemeine Aussagen darüber finden sich in Brenner [2]. Wir können jedoch keine völlig beliebige Teilmenge nehmen, sondern benötigen folgende Voraussetzungen.

Annahme 3.2.10 (A priori zulässige Menge). Sei \mathcal{A}_1 wie in (3.2.2) und $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}_1$ eine konvexe, nicht leere und kompakte Teilmenge mit $\mathcal{A}^+ := \mathcal{A} \cap \mathbb{R}_{\geq 0}^{M+1} \neq \emptyset$.

Wir beschränken uns also a priori auf eine Menge an Aufteilungen und versuchen das Optimierungsproblem auf dieser Menge zu lösen. Dadurch machen wir einen großen Schritt in Richtung Praxis, da wir eine Menge \mathcal{A} wie in Annahme 3.2.10 explizit angeben und somit auch das a priori Optimierungsproblem lösen können. Diese Menge \mathcal{A} soll insbesondere Aufteilungen enthalten, die nur auf steigende Kurse setzen, d.h. es existiert mindestens ein $f \in \mathcal{A}$ mit $f_i \geq 0$ für alle $i = 0, \dots, M$. Um das Konzept von a priori zulässigen Mengen im Sinne der Annahme 3.2.10 zu verdeutlichen, betrachten wir das folgende Beispiel.

Beispiel 3.2.11 (A priori zulässige Menge). Seien $M \in \mathbb{N}$ und $j \in \{1, \dots, M\}$ gegeben. Dann definiert

$$\mathcal{A}_j := \left\{ f \in \mathcal{A}_1 \mid f_j = 0 \text{ und } -0.01 \leq f_i \leq 0.03 \text{ für } i = 1, \dots, M \right\} \neq \emptyset$$

eine a priori zulässige Menge, wobei sich die Eigenschaften einer a priori zulässigen Menge leicht nachrechnen lassen. Die Voraussetzung $f_j = 0$ bedeutet, dass wir unter keinen Umständen in die j -ten riskante Finanzanlage investieren möchten. Die zweite Voraussetzung $f_i \leq 0.03$ bewirkt eine gewisse Diversifizierung in unserem Portfolio, denn es darf nicht mehr als drei Prozent des

Kapitals in eine einzelne riskante Finanzanlage investiert werden. Analog darf wegen $-0.01 \leq f_i$ keine Short-Position auf eine solche Anlage mit mehr als einem Prozent unseres Kapitals gekauft werden. Diese Beschränkungen führen außerdem dazu, dass für kleines $M \in \mathbb{N}$ ein großer Teil des Kapitals in die risikofreie Anlage f_0 investiert werden.

In Korollar 3.2.5 haben wir gesehen, dass $u_{\ln TWR}$ auf ganz \mathbb{R}^{M+1} ungleich $+\infty$ und proper konkav ist. Schränken wir $u_{\ln TWR}$ aus (3.2.10) auf \mathcal{A} ein, schreiben wir $u_{\ln TWR|\mathcal{A}} : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ und erhalten die Domain

$$\text{dom}(u_{\ln TWR|\mathcal{A}}) = \{f \in \mathcal{A} \mid u_{\ln TWR}(f) > -\infty\} \subset \mathcal{A}$$

(vgl. Def. A.1.1). Daher müssen wir erneut untersuchen, inwiefern $\text{dom}(u_{\ln TWR|\mathcal{A}}) \neq \emptyset$ gilt.

Korollar 3.2.12 (log-TWR Nutzenfunktion 3, vgl. Brenner [2, Prop. 5.1.2]). *Sei $S \in \mathcal{L}^2(N; \mathbb{R}_{>0}^{M+1})$ ein Mehr-Perioden-Finanzmarkt wie in Def. 3.1.2, der Quotient von aufeinander folgenden Preisen \mathcal{R} wie in (3.2.1) und \mathcal{A} eine a priori zulässige Menge wie in Annahme 3.2.10 gegeben. Angenommen, $\ln(\mathcal{R}_n^i) \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{F}_n, P; \mathbb{R})$ gilt für $n = 1, \dots, N$ und $i = 0, \dots, M$. Dann ist $u_{\ln TWR|\mathcal{A}} : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ proper konkav (vgl. Def. A.1.1), $u_{\ln TWR|\mathcal{A}} < \infty$ und $\mathcal{A}^+ = \mathcal{A} \cap \mathbb{R}_{\geq 0}^{M+1} \subset \text{dom}(u_{\ln TWR|\mathcal{A}})$.*

Beweis. Die Konkavität und Endlichkeit folgen sofort aus Korollar 3.2.5. Zeigen wir jetzt

$$\mathcal{A}^+ \stackrel{!}{\subset} \text{dom}(u_{\ln TWR|\mathcal{A}}) = \{f \in \mathcal{A} \mid u_{\ln TWR}(f) > -\infty\}.$$

Dazu stellen wir fest, dass für alle $f \in \mathcal{A}^+$

$$\mathcal{R}_n^T f > 0 \quad \text{P-f.s.}$$

gilt, da $\mathcal{R}_n^i(\omega) > 0$ für alle $n = 1, \dots, N$, $i = 0, \dots, M$ und $\omega \in \Omega$ sowie $f_i \geq 0$ für alle $i = 0, \dots, M$ und $f_j > 0$ für mindestens ein $j \in \{0, \dots, M\}$ wegen $f \in \mathcal{A}_1$ erfüllt sein muss. Damit gilt insbesondere $\mathcal{A}^+ \subset \mathcal{A}_{\text{twr}}$ und für $f \in \mathcal{A}^+$ beliebig folgt

$$u_{\ln TWR}(f) \stackrel{(3.2.11)}{=} \sum_{n=1}^N E[\ln(\mathcal{R}_n^T f)] \geq \sum_{n=1}^N E[\ln(\mathcal{R}_n^i f_i)] \quad (3.2.12)$$

für alle $i = 0, \dots, M$. Wie schon zuvor gesehen, existiert ein $i^* = i^*(f) \in \{0, \dots, M\}$ mit $f_{i^*} > 0$. Für dieses i^* folgt mit Gleichung (3.2.12)

$$u_{\ln TWR}(f) \geq \sum_{n=1}^N E[\ln(\mathcal{R}_n^{i^*} f_{i^*})] = \sum_{n=1}^N E[\ln(\mathcal{R}_n^{i^*})] + \ln(f_{i^*}) > -\infty.$$

Also haben wir $\mathcal{A}^+ \subset \text{dom}(u_{\ln TWR|\mathcal{A}})$ gezeigt und mit der Annahme 3.2.10 gilt

$$\emptyset \neq \mathcal{A} \cap \mathbb{R}_{\geq 0}^{M+1} = \mathcal{A}^+ \subset \text{dom}(u_{\ln TWR|\mathcal{A}})$$

und damit folgt die gesamte Behauptung. \square

Weiter brauchen wir für das Optimierungsproblem die strenge Konkavität von $u_{\ln TWR|\mathcal{A}}$ auf $\text{dom}(u_{\ln TWR|\mathcal{A}}) \subset \mathcal{A}$ und die Kompaktheit der Superniveaumenge. Letzteres werden wir aus Oberhalbstetigkeit von $u_{\ln TWR}$ eingeschränkt auf \mathcal{A} folgern. Wir erinnern uns, dass wir im Allgemeinen auf der Menge \mathcal{A}_{twr} keine Abgeschlossenheit für $u_{\ln TWR}$ erhalten haben und damit nicht genau wussten, ob $u_{\ln TWR}$ oberhalbstetig ist. Dies können wir jedoch auf \mathcal{A} wie in Annahme 3.2.10 zeigen.

Korollar 3.2.13 (log-TWR Nutzenfunktion 4, vgl. Brenner [2, Prop. 5.1.1]). Sei $S \in \mathcal{L}^2(N; \mathbb{R}_{>0}^{M+1})$ ein Mehr-Perioden-Finanzmarkt wie in Def. 3.1.2, der Quotient von aufeinander folgenden Preisen \mathcal{R} wie in (3.2.1) und \mathcal{A} eine a priori zulässige Menge wie in Annahme 3.2.10 gegeben. Angenommen, $(\ln(\mathcal{R}_n^i))^+ \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{F}_n, P; \mathbb{R})$ gilt für $n = 1, \dots, N$ und $i = 0, \dots, M$ (vgl. Def. A.2.4). Dann ist $\mathbf{u}_{\ln \text{TWR}|_{\mathcal{A}}} : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ oberhalbstetig (vgl. Def. A.1.3).

Beweis. Um die Oberhalbstetigkeit zu zeigen, wollen wir Theorem A.2.5 benutzen. Dazu müssen wir die Voraussetzungen dieses Theorems nachweisen, insbesondere (A.2.1) und (A.2.2). Dazu definieren wir

$$\mathbf{u}_{\ln}^{(N)} : \mathbb{R}_{>0}^{N \times (M+1)} \times \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\}, (X, f) \mapsto \begin{cases} \sum_{n=1}^N \ln(x_n^T f), & x_n^T f > 0 \\ -\infty, & \text{sonst} \end{cases},$$

mit $X = (x_1^T, \dots, x_N^T)^T \in \mathbb{R}_{>0}^{N \times (M+1)}$ und erkennen, dass $\mathbf{u}_{\ln \text{TWR}} = E(\mathbf{u}_{\ln}^{(N)}(\mathcal{R}, \cdot))$ gilt. Insbesondere ist $\mathbf{u}_{\ln}^{(N)}$ auf Grund der Oberhalbstetigkeit des natürlichen Logarithmus' in beiden Argumenten oberhalbstetig. Daraus folgt nach Theorem A.2.2 die Messbarkeit von $\mathbf{u}_{\ln}^{(N)}(\cdot, f)$ für alle $f \in \mathcal{A}$ (vgl. Def. A.2.1). Die Messbarkeit von

$$\sup_{\substack{\|g-f\|_{\infty} \leq \delta \\ g \in \mathcal{A}}} \mathbf{u}_{\ln}^{(N)}(\cdot, g)$$

folgt, mit Theorem A.2.3, da \mathcal{A} nach Annahme 3.2.10 abgeschlossen ist. Also haben wir (A.2.1) nachgewiesen. Sei im Folgenden $f \in \mathcal{A}$ beliebig aber fest. Dann müssen wir noch zeigen, dass ein $\delta = \delta(f) > 0$ existiert mit

$$E \left(\sup_{\substack{\|g-f\|_{\infty} \leq \delta \\ g \in \mathcal{A}}} \mathbf{u}_{\ln}^{(N)}(\mathcal{R}, g) \right) \stackrel{!}{<} \infty$$

(vgl. (A.2.2)). Mit $X = (x_1^T, \dots, x_N^T)^T \in \mathbb{R}_{>0}^{N \times (M+1)}$ folgt für beliebiges $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$

$$\sup_{\substack{\|g-f\|_{\infty} \leq \delta \\ g \in \mathcal{A}}} \mathbf{u}_{\ln}^{(N)}(X, g) \leq \sup_{\substack{\|g-f\|_{\infty} \leq \delta \\ g \in \mathcal{A}}} \sum_{n=1}^N (\ln(|x_n^T g|)) \leq \sup_{\substack{\|g-f\|_{\infty} \leq \delta \\ g \in \mathcal{A}}} \sum_{n=1}^N \ln \left(\sum_{i=0}^M |x_n^i g_i| \right).$$

Die Summanden können wir mit Hilfe der Supremumsnorm abschätzen und erhalten

$$\sup_{\substack{\|g-f\|_{\infty} \leq \delta \\ g \in \mathcal{A}}} \sum_{n=1}^N \ln \left(\sum_{i=0}^M |x_n^i g_i| \right) \leq \sup_{\substack{\|g-f\|_{\infty} \leq \delta \\ g \in \mathcal{A}}} \sum_{n=1}^N \ln ((M+1) \cdot \|x_n\|_{\infty} \cdot \|g\|_{\infty}).$$

Weiter folgt mit den Rechenregeln des natürlichen Logarithmus' und der Voraussetzung $x_n^i > 0$

für alle $n = 1, \dots, N$ und $i = 0, \dots, M$

$$\begin{aligned}
& \sup_{\substack{\|g-f\|_\infty \leq \delta \\ g \in \mathcal{A}}} \sum_{n=1}^N \ln((M+1) \cdot \|x_n\|_\infty \cdot \|g\|_\infty) \\
& \leq \sup_{\substack{\|g-f\|_\infty \leq \delta \\ g \in \mathcal{A}}} N \cdot \ln((M+1) \cdot \|g\|_\infty) + \sum_{n=1}^N \ln(\|x_n\|_\infty) \\
& \leq \sup_{\substack{\|g-f\|_\infty \leq \delta \\ g \in \mathcal{A}}} N \cdot \ln((M+1) \cdot \|g\|_\infty) + \sum_{n=1}^N \sum_{i=0}^M (\ln(x_n^i))^+ \\
& \leq N \cdot \ln((M+1)(\|f\|_\infty + \delta)) + \sum_{n=1}^N \sum_{i=0}^M (\ln(x_n^i))^+
\end{aligned}$$

und nehmen wir auf beiden Seiten der gesamten Abschätzung den Erwartungswert, so erhalten wir zusammen mit der Voraussetzung $(\ln(\mathcal{R}_n^i))^+ \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{F}_n, P; \mathbb{R}^{M+1})$ für alle $n = 1, \dots, N$ und $i = 0, \dots, M$

$$E \left(\sup_{\substack{\|g-f\|_\infty \leq \delta \\ g \in \mathcal{A}}} u_{\ln}^{(N)}(\mathcal{R}, g) \right) \leq N \cdot \ln((M+1)(\|f\|_\infty + \delta)) + \sum_{n=1}^N \sum_{i=0}^M E \left((\ln(x_n^i))^+ \right) < \infty$$

für $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$ und $f \in \mathcal{A}$ beliebig. Damit sind die Voraussetzungen von Theorem A.2.5 erfüllt und mit diesem folgt die Behauptung. \square

Mit diesem Korollar würden wir die Existenz einer Lösung erhalten. Für die Eindeutigkeit hatten wir a posteriori gesehen, dass mit der Annahme, es existiere keine nicht triviale Trading Strategie, die Injektivität der Kapitalentwicklung folgt und damit die strenge Konkavität von $u_{\ln TWR}$. Da wir a priori nicht beweisen können, inwiefern eine Trading Strategie risikofrei ist, benötigen wir eine weitere Annahme. Die Annahme, es existiere keine nicht triviale risikofreie Trading Strategie, wäre jedoch äquivalent möglich.

Annahme 3.2.14 (Injektivität). Sei $N, M \in \mathbb{N}$, der Quotient von aufeinander folgenden Preisen \mathcal{R} wie in (3.2.1), \mathcal{A}_{TWR} wie in (3.2.4) und eine Teilmenge $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}_1$ gegeben. Dann existiere für alle $f_1, f_2 \in \mathcal{A} \cap \mathcal{A}_{TWR}$ ein $n_0 \in \{1, \dots, N\}$, sodass die Implikation

$$\mathcal{R}_{n_0}^T f_1 = \mathcal{R}_{n_0}^T f_2 \quad \text{P-f.s.} \quad \implies \quad f_1 = f_2$$

erfüllt ist.

Theorem 3.2.15 (Growth Optimal Trading Strategie auf a priori zulässigen Mengen, vgl. Brenner [2, Korollar 5.1.5]). Sei $S \in \mathcal{L}^2(N; \mathbb{R}_{>0}^{M+1})$ ein Mehr-Perioden-Finanzmarkt wie in Def. 3.1.2, der Quotient von aufeinander folgenden Preisen \mathcal{R} wie in (3.2.1) und \mathcal{A} eine a priori zulässige Menge wie in Annahme 3.2.10 gegeben. Angenommen, $\ln(\mathcal{R}_n^i) \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{F}_n, P; \mathbb{R})$ gilt für $n = 1, \dots, N$ und $i = 0, \dots, M$, sowie Annahme 3.2.14 ist erfüllt. Dann hat das Problem

$$\max_{f \in \mathcal{A}} u_{\ln TWR}(f)$$

eine eindeutige Lösung $f_{max}^* \in \mathcal{A}$.

Beweis. Sei \mathcal{A} eine Menge wie in Annahme 3.2.10. Beachte, dass der Positivteil von $\ln(\mathcal{R}_n^i)$ (vgl. Def. A.2.4) auf Grund von $E[\ln(\mathcal{R}_n^i)] \in \mathbb{R}$ ebenfalls einen endlichen Erwartungswert besitzt.

Dann ist wegen der Beschränktheit von \mathcal{A} und der Oberhalbstetigkeit von $u_{\ln\text{TWR}}$ auf \mathcal{A} (vgl. Korollar 3.2.13) die Menge

$$\mathcal{B}_{u_{\ln\text{TWR}}, \mathcal{A}}(\mu) := \{f \in \mathcal{A} \mid u_{\ln\text{TWR}}(f) \geq \mu\} \subset \mathcal{A}$$

für alle $\mu \in \mathbb{R}$ kompakt (vgl. Theorem A.1.4). Außerdem ist nach Korollar 3.2.12 die Domain von $u_{\ln\text{TWR}}$ nicht leer, d.h. es existiert mindestens ein $\mu^* \in \mathbb{R}$, sodass $\mathcal{B}_{u_{\ln\text{TWR}}, \mathcal{A}}(\mu^*) \neq \emptyset$ gilt. Damit erhalten wir die Existenz einer Lösung (vgl. Theorem A.1.5).

Weiter erhalten wir zusammen mit der Annahme 3.2.14 und Korollar 3.2.6 die strenge Konkavität von $u_{\ln\text{TWR}}$ auf $\text{dom}(u_{\ln\text{TWR}}|_{\mathcal{A}}) \subset \mathcal{A} \cap \mathcal{A}_{\text{TWR}}$, da diese Annahme die benötigte Injektivität der Kapitalentwicklung im Beweis von Korollar 3.2.6 ersetzt (vgl. Brenner [2, Prop. 5.1.4]), womit wir die Eindeutigkeit dieser Lösung erhalten. \square

3.3. Maximum log-TWR Optimierungsproblem mit DrawDown

In diesem Abschnitt möchten wir ähnlich zu Kapitel 2.3 eine weitere Nebenbedingung mit Hilfe einer geeigneten Risikofunktion einfügen. Anders als im Ein-Perioden-Finanzmarkt haben wir hier die Möglichkeit, die Kapitalentwicklung in die Risikofunktion einzubinden. Dazu definieren wir uns den DrawDown-Prozess, welcher uns angibt, wie viel Verlust wir seit dem Höchststand unserer Kapitalentwicklung der ersten n Perioden bis zur n -ten Periode gemacht haben (vgl. Platen [12]).

Definition 3.3.1 (Absoluter/relativer DrawDown-Prozess, vgl. Platen [12, Def. 3.1.1]). Sei $S \in \mathcal{L}^2(N; \mathbb{R}_{>0}^{M+1})$ ein Mehr-Perioden-Finanzmarkt wie in Def. 3.1.2 und $\mathcal{W} := (\mathcal{W}_n)_{0 \leq n \leq N} \in \mathcal{L}^2(N)$ eine Kapitalentwicklung (siehe Def. 3.1.4). Der absolute DrawDown-Prozess $\mathcal{D}_{\text{abs}} = ((\mathcal{D}_{\text{abs}})_1, \dots, (\mathcal{D}_{\text{abs}})_N)$ ist definiert durch

$$(\mathcal{D}_{\text{abs}})_n(\mathcal{W}) := \max_{0 \leq \ell \leq n} \{\mathcal{W}_\ell\} - \mathcal{W}_n \geq 0$$

für $n = 1, \dots, N$. Dann ist der relative DrawDown-Prozess $\mathcal{D}_{\text{rel}} = ((\mathcal{D}_{\text{rel}})_1, \dots, (\mathcal{D}_{\text{rel}})_N)$ für eine echt positive Kapitalentwicklung, d.h. eine Kapitalentwicklung mit zulässiger Trading Strategie (siehe Def. 3.1.5), definiert durch

$$(\mathcal{D}_{\text{rel}})_n(\mathcal{W}) := \frac{(\mathcal{D}_{\text{abs}})_n(\mathcal{W})}{\max_{0 \leq \ell \leq n} \{\mathcal{W}_\ell\}} = 1 - \frac{\mathcal{W}_n}{\max_{0 \leq \ell \leq n} \{\mathcal{W}_\ell\}} = 1 - \min_{0 \leq \ell \leq n} \left\{ \frac{\mathcal{W}_n}{\mathcal{W}_\ell} \right\}$$

für $n = 1, \dots, N$.

In Abbildung 3.1 ist eine beispielhafte Kapitalentwicklung über 10 Perioden abgebildet. Der rote Pfeil zeigt uns den momentanen DrawDown und die absolute Länge gibt uns $(\mathcal{D}_{\text{abs}})_9$, also genau die Differenz zwischen dem Höchststand unseres Vermögens und dem jetzigen Endzeitpunkt.

Mit \mathcal{D}_{abs} und \mathcal{D}_{rel} haben wir zwei stochastische Prozesse und keine Risikofunktion gegeben. Wir können diese Prozesse jedoch nutzen, um eine Risikofunktion zu definieren. Dazu gibt es verschiedene Ansätze, beispielsweise untersuchten Chekhlov, Uryasev und Zabaranin in [3] und [4] den absoluten DrawDown für einfache Trading Strategien auf einem endlichen Wahrscheinlichkeitsraum. Die Risikofunktion, die sie definierten, heißt Conditional DrawDown at Risk (CDaR) und kann als bedingter Value at Risk für den absoluten DrawDown Prozess verstanden werden.

In [10] untersuchen Maier-Paape und Zhu den Erwartungswert des natürlichen Logarithmus' des relativen DrawDowns zum Zeitschritt N auf einem endlichen Wahrscheinlichkeitsraum. Diese Risikofunktion wird Current DrawDown genannt. Ähnlich zu Platen [12] wollen wir diese Idee nutzen und eine Risikofunktion auf unserem Mehr-Perioden-Finanzmarkt definieren.

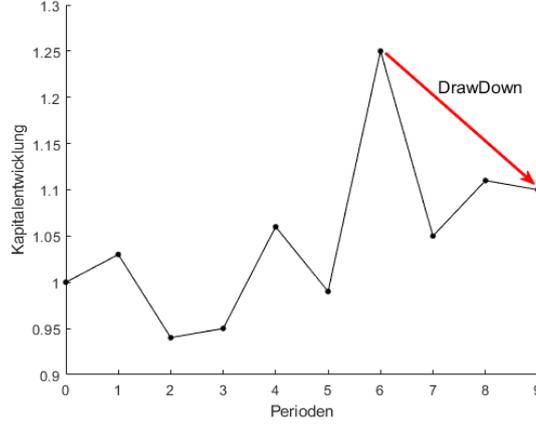


Abbildung 3.1.: Eine beispielhafte Kapitalentwicklung über 9 Perioden mit DrawDown

Definition 3.3.2 (Multi-Path-Expected-Log-DrawDown, vgl. Maier-Paape, Platen und Zhu [9, Def. 10]). Sei $S \in \mathcal{L}^2(N; \mathbb{R}_{>0}^{M+1})$ ein Mehr-Perioden-Finanzmarkt wie in Def. 3.1.2. Dann ist der Multi-Path-Expected-Log-DrawDown für v_{twr} (siehe (3.2.3)) definiert durch

$$\tau_{\text{draw-down}} : \mathbb{R}^{M+1} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}, f \mapsto \begin{cases} E \left[-\ln \left(1 - (\mathcal{D}_{\text{rel}})_N(\mathcal{W}(v_{\text{twr}}(f))) \right) \right], & f \in \mathcal{A}_{\text{twr}} \\ \infty, & f \notin \mathcal{A}_{\text{twr}} \end{cases},$$

wobei \mathcal{A}_{twr} durch (3.2.4) gegeben ist.

Diesen werden wir im Folgenden mit DrawDown bezeichnen. Durch Einsetzen der Definition von \mathcal{D}_{rel} für $f \in \mathcal{A}_{\text{twr}}$ in die obige Darstellung erhalten wir

$$\tau_{\text{draw-down}}(f) = E \left[-\ln \left(\min_{0 \leq \ell \leq N} \left\{ \frac{\mathcal{W}_\ell^N}{\mathcal{W}_\ell} \right\} \right) \right] = E \left[-\ln \left(\min \{ 1, \min_{1 \leq \ell \leq N} \{ \text{TWR}_\ell^N(f) \} \} \right) \right].$$

Ziehen wir das Minimum aus dem ln heraus, erhalten wir auf Grund der Monotonie und des negativen Vorzeichens

$$E \left[-\ln \left(\min \{ 1, \min_{1 \leq \ell \leq N} \{ \text{TWR}_\ell^N(f) \} \} \right) \right] = E \left[\max \left\{ 0, \max_{1 \leq \ell \leq N} \{ -\ln(\text{TWR}_\ell^N(f)) \} \right\} \right].$$

Durch Umschreiben des TWR's mit Hilfe von \mathcal{R} wie in Definition 3.2.4 erhalten wir insgesamt

$$\tau_{\text{draw-down}}(f) = \begin{cases} E \left[\max \left\{ 0, \max_{1 \leq \ell \leq N} \left\{ \sum_{n=\ell}^N -\ln(\mathcal{R}_n^T f) \right\} \right\} \right], & f \in \mathcal{A}_{\text{twr}} \\ \infty, & f \notin \mathcal{A}_{\text{twr}} \end{cases}. \quad (3.3.1)$$

3.3.1. Optimierung auf a posteriori zulässigen Mengen

Wie im vorherigen Abschnitt wollen wir auch hier das Optimierungsproblem auf a posteriori und a priori zulässigen Mengen getrennt untersuchen. Im folgenden Korollar halten wir einige Eigenschaften und einen Zusammenhang von $\mathbf{u}_{\ln \text{TWR}}$ und $\tau_{\text{draw-down}}$ fest.

Korollar 3.3.3 (Expected Log DrawDown Risikofunktion 1, vgl. Platen [12, Theorem 3.1.7 und Korollar 3.1.9]). Sei $S \in \mathcal{L}^2(N; \mathbb{R}_{>0}^{M+1})$ ein Mehr-Perioden-Finanzmarkt wie in Def. 3.1.2 und der Quotient von aufeinander folgenden Preisen \mathcal{R} wie in (3.2.1) gegeben. Angenommen, $\ln(\mathcal{R}_n^i) \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{F}_n, P; \mathbb{R})$ gilt für $n = 1, \dots, N$ und $i = 0, \dots, M$. Dann ist $\tau_{\text{draw-down}}$ proper konvex, $\tau_{\text{draw-down}} \geq 0$ und $\text{dom}(\tau_{\text{draw-down}}) = \text{dom}(\mathbf{u}_{\ln \text{TWR}}) \subset \mathcal{A}_{\text{twr}}$.

Beweis. In Gleichung (3.3.1) erkennen wir sofort, dass $\mathfrak{r}_{\text{draw-down}} \geq 0$ in \mathcal{A}_{twr} gilt und natürlich gilt $\mathfrak{r}_{\text{draw-down}}(f) = \infty \geq 0$ für alle $f \notin \mathcal{A}_{\text{twr}}$. Auf Grund der Konkavität des natürlichen Logarithmus' ist $f \mapsto -\ln(\mathcal{R}_n^T f)$ konvex, und da das Maximum konvexer Funktionen wieder konvex ist, folgt die Konvexität von $\mathfrak{r}_{\text{draw-down}}$. Sei nun $f^* := (1, \widehat{0}^T)^T \in \mathcal{A}_{\text{twr}}$. Mit analogen Rechnungen zum Beweis von Korollar 3.2.5 gilt

$$-\sum_{n=\ell}^N \ln(\mathcal{R}_n^T f^*) = -\sum_{n=\ell}^N \ln\left(\frac{S_n^0}{S_{n-1}^0}\right) = -\ln\left(\frac{S_N^0}{S_{\ell-1}^0}\right)$$

für alle $\ell = 1, \dots, N$. Da $S^0 = (S_0^0, S_1^0, \dots, S_N^0)$ risikofrei ist (siehe Def. 3.1.1), gilt $S_n^0 \geq S_{n-1}^0$ P-f.s. für alle $n = 1, \dots, N$ und damit ist $S_N^0/S_{\ell-1}^0 \geq 1$ P-f.s. für alle $\ell = 1, \dots, N$. Dies impliziert jedoch

$$-\ln\left(\frac{S_N^0}{S_{\ell-1}^0}\right) \leq 0 \quad \text{P-f.s.}$$

für alle $\ell = 1, \dots, N$ und damit gilt $\mathfrak{r}_{\text{draw-down}}(f^*) = 0$, also ist $\text{dom}(\mathfrak{r}_{\text{draw-down}}) \neq \emptyset$. Es bleibt $\text{dom}(\mathfrak{r}_{\text{draw-down}}) = \text{dom}(\mathfrak{u}_{\text{lnTWR}})$ zu zeigen. Dazu reicht es

$$0 \leq \mathfrak{u}_{\text{lnTWR}}(f) + \mathfrak{r}_{\text{draw-down}}(f) < \infty$$

für alle $f \in \mathcal{A}_{\text{twr}}$ nachzuweisen. Dann gilt $\mathfrak{u}_{\text{lnTWR}}(f) \in \mathbb{R}$ genau dann, wenn $\mathfrak{r}_{\text{draw-down}}(f) \in \mathbb{R}$. Für $f \in \mathcal{A}_{\text{twr}}$ folgt

$$\begin{aligned} \mathfrak{u}_{\text{lnTWR}}(f) + \mathfrak{r}_{\text{draw-down}}(f) &= E \left[\sum_{n=1}^N \ln(\mathcal{R}_n^T f) + \max \left\{ 0, \max_{1 \leq \ell \leq N} \left\{ -\sum_{n=\ell}^N \ln(\mathcal{R}_n^T f) \right\} \right\} \right] \\ &= E \left[\max \left\{ 0, \max_{1 \leq \ell \leq N} \left\{ \sum_{n=1}^{\ell} \ln(\mathcal{R}_n^T f) \right\} \right\} \right]. \end{aligned}$$

Sei $\ell \in \{1, \dots, N\}$ beliebig. Dann liefert die Annahme $\ln(\mathcal{R}_n^i) \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{F}_n, P; \mathbb{R})$ die Abschätzung

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\ell} E \left[\ln(\mathcal{R}_n^T f) \right] &\leq \sum_{n=1}^{\ell} E \left[\ln((M+1) \|\mathcal{R}_n\|_{\infty} \|f\|_{\infty}) \right] \\ &= \sum_{n=1}^{\ell} E \left[\ln((M+1) \|f\|_{\infty}) + \ln(\|\mathcal{R}_n\|_{\infty}) \right] \\ &\leq \ell \ln((M+1) \|f\|_{\infty}) + \sum_{n=1}^{\ell} E \left[\ln(\|\mathcal{R}_n\|_{\infty}) \right] < \infty, \end{aligned}$$

und da $\ell \in \{1, \dots, N\}$ beliebig gewählt wurde, gilt dies insbesondere für das Maximum über alle ℓ und damit folgt die Behauptung. \square

Platen hat außerdem in [12, Theorem 3.1.7 (a)] gezeigt, dass $\mathfrak{r}_{\text{draw-down}}$ unter der zusätzlichen Bedingung $S_n^0 = S_{n-1}^0$ für alle $n = 1, \dots, N$ streng konvex auf $\text{dom}(\mathfrak{r}_{\text{draw-down}})$ ist. Dies werden wir in Korollar 3.3.8 noch einmal thematisieren. Weiter wissen wir - ähnlich zu $\mathfrak{u}_{\text{lnTWR}}$ - nicht, ob $\mathfrak{r}_{\text{draw-down}}$ im Allgemeinen immer abgeschlossen ist. Daher müssen wir dies als Voraussetzung im nächsten Theorem annehmen.

Theorem 3.3.4 (Maximum log-TWR mit Expected log DrawDown auf \mathcal{A}_{twr} , vgl. Platen [12, Korollar 3.1.14]). *Sei $S \in \mathcal{L}^2(N; \mathbb{R}_{>0}^{M+1})$ ein Mehr-Perioden-Finanzmarkt wie in Def. 3.1.2, der Quotient von aufeinander folgenden Preisen \mathcal{R} wie in (3.2.1) und \mathcal{A}_{twr} wie in (3.2.4) gegeben. Angenommen, $\ln(\mathcal{R}_n^i) \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{F}_n, P; \mathbb{R})$ gilt für $n = 1, \dots, N$, $i = 0, \dots, M$ und S enthält keine*

nicht triviale risikofreie Trading Strategie (vgl. Def. 3.1.6). Ferner seien $\mathbf{u}_{\ln TWR}$ und $\mathbf{r}_{\text{draw-down}}$ eingeschränkt auf \mathcal{A}_{twr} abgeschlossen. Dann hat das Problem

$$\begin{aligned} & \max_{f \in \mathcal{A}_{\text{twr}}} \mathbf{u}_{\ln TWR}(f) \\ & \text{s.t. } \mathbf{r}_{\text{draw-down}}(f) \leq r \end{aligned}$$

für alle $r \geq 0$ eine eindeutige Lösung $f_{\max}^* \in \mathcal{A}_{\text{twr}}$.

Beweis. In den Beweisen zu Korollar 3.2.5 und Korollar 3.3.3 haben wir schon gesehen, dass für $f^* := (1, \hat{0}^T)^T \in \mathcal{A}_{\text{twr}}$

$$\mathbf{u}_{\ln TWR}(f^*) = \ln \left(\frac{S_N^0}{S_0^0} \right) =: \mu^* < \infty \quad \text{und} \quad \mathbf{r}_{\text{draw-down}}(f^*) = 0$$

gilt. Da $\mathbf{u}_{\ln TWR}$ und $\mathbf{r}_{\text{draw-down}}$ eingeschränkt auf \mathcal{A}_{twr} nach Annahme abgeschlossen und nach Korollar 3.2.5 proper konkav bzw. nach Korollar 3.3.3 proper konvex sind, ist die Teilmenge

$$\{f \in \mathcal{A}_{\text{twr}} \mid \mathbf{r}_{\text{draw-down}}(f) \leq r, \mathbf{u}_{\ln TWR}(f) \geq \mu^*\} \subset \mathcal{B}_{\mathbf{u}_{\ln TWR}, \mathcal{A}_{\text{twr}}}(\mu^*) \quad (3.3.2)$$

für alle $r \geq 0$ abgeschlossen (vgl. Theorem A.1.4) und nicht leer, da f^* ein Element dieser Menge ist. Weiter wissen wir, dass $\mathcal{B}_{\mathbf{u}_{\ln TWR}, \mathcal{A}_{\text{twr}}}(\mu^*)$ nach Korollar 3.2.6 beschränkt ist. Aus der Teilmengenbeziehung folgt die Beschränktheit der Menge in (3.3.2) und damit ist sie kompakt. Also muss mindestens eine Lösung des Problems existieren (vgl. Theorem A.1.5) und die Eindeutigkeit folgt wieder mit der strengen Konkavität von $\mathbf{u}_{\ln TWR}$ auf \mathcal{A}_{twr} (siehe Korollar 3.2.6). \square

3.3.2. Optimierung auf a priori zulässigen Mengen

Betrachten wir jetzt wieder die Optimierung auf a priori zulässigen Mengen im Sinne von Annahme 3.2.10. Wie zuvor beginnen wir mit einer Analyse des DrawDowns.

Korollar 3.3.5 (Expected log DrawDown Risikofunktion 2, vgl. Brenner [2, Prop. 5.1.7 und Prop. 5.1.8]). *Sei $S \in \mathcal{L}^2(N; \mathbb{R}_{>0}^{M+1})$ ein Mehr-Perioden-Finanzmarkt wie in Def. 3.1.2, der Quotient von aufeinander folgenden Preisen \mathcal{R} wie in (3.2.1) und \mathcal{A} eine a priori zulässige Menge wie in Annahme 3.2.10 gegeben. Angenommen, $\ln(\mathcal{R}_n^i) \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{F}_n, P; \mathbb{R})$ gilt für $n = 1, \dots, N$ und $i = 0, \dots, M$. Dann ist $\mathbf{r}_{\text{draw-down}|_{\mathcal{A}}} : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ proper konvex und unterhalbstetig (vgl. Def. A.1.3). Des Weiteren gilt $\mathbf{r}_{\text{draw-down}|_{\mathcal{A}}} \geq 0$, und $\mathcal{A}^+ = \mathcal{A} \cap \mathbb{R}_{\geq 0}^{M+1} \subset \text{dom}(\mathbf{r}_{\text{draw-down}|_{\mathcal{A}}})$.*

Beweis. Die Konvexität und Nicht-Negativität folgt mit Korollar 3.3.3. Die Unterhalbstetigkeit wollen wir ähnlich wie in Korollar 3.2.13 mit Hilfe des Theorems A.2.5 zeigen. Dazu definieren wir

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{\ln}^{(N)} : \mathbb{R}_{>0}^{N \times (M+1)} \times \mathcal{A} &\rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}, \\ (X, f) &\mapsto \begin{cases} \max \left\{ 0, \max_{1 \leq \ell \leq N} \sum_{n=\ell}^N -\ln(x_n^T f) \right\}, & x_n^T f > 0 \\ +\infty, & \text{sonst} \end{cases} \end{aligned}$$

mit $X = (x_1^T, \dots, x_N^T)^T \in \mathbb{R}_{>0}^{N \times (M+1)}$ und erkennen, dass $\mathbf{r}_{\text{draw-down}|_{\mathcal{A}}} = E(\mathbf{r}_{\ln}^{(N)}(\mathcal{R}, \cdot))$ gilt. Insbesondere ist $\mathbf{r}_{\ln}^{(N)}$ auf Grund der Unterhalbstetigkeit von $-\ln$ in beiden Argumenten unterhalbstetig. Daraus folgt nach Theorem A.2.2 die Messbarkeit von $\mathbf{r}_{\ln}^{(N)}(\cdot, f)$ für alle $f \in \mathcal{A}$ (vgl. Def. A.2.1). Für $\delta > 0$ folgt die Messbarkeit von

$$\inf_{\substack{\|g-f\|_{\infty} \leq \delta \\ g \in \mathcal{A}}} \mathbf{r}_{\ln}^{(N)}(\cdot, g)$$

mit Theorem A.2.3, da \mathcal{A} nach Annahme 3.2.10 abgeschlossen ist. Wegen $\mathfrak{r}_{\ln}^{(N)} \geq 0$ gilt außerdem für alle $f \in \mathcal{A}$

$$E \left(\inf_{\substack{\|g-f\|_{\infty} \leq \delta \\ g \in \mathcal{A}}} \mathfrak{r}_{\ln}^{(N)}(\mathcal{R}, g) \right) \geq 0 > -\infty$$

und damit sind die Voraussetzungen von Theorem A.2.5 erfüllt. Es folgt die Unterhalbstetigkeit von $\mathfrak{r}_{\text{draw-down}|\mathcal{A}}$. Als nächstes wollen wir zeigen, dass die Domain nicht leer ist. Dazu beweisen wir

$$\mathcal{A}^+ := \mathcal{A} \cap \mathbb{R}_{\geq 0}^{M+1} \stackrel{!}{\subset} \text{dom}(\mathfrak{r}_{\text{draw-down}|\mathcal{A}}) = \{f \in \mathcal{A} \mid \mathfrak{r}_{\text{draw-down}}(f) < \infty\} \subset \mathcal{A}.$$

In Beweis von Korollar 3.2.12 haben wir bereits gesehen, dass $\mathcal{A}^+ \subset \text{dom}(\mathfrak{u}_{\ln\text{TWR}|\mathcal{A}})$ gilt. Also muss dies insbesondere für jeden einzelnen Summanden von $\mathfrak{u}_{\ln\text{TWR}|\mathcal{A}}$ gelten. Verwenden wir dies, erhalten wir für $f \in \mathcal{A}$

$$\begin{aligned} \text{dom}(\mathfrak{r}_{\text{draw-down}|\mathcal{A}}) &= \text{dom} \left(\max \left\{ 0, \max_{1 \leq \ell \leq N} \left\{ - \sum_{n=\ell}^N E \left(\ln(\mathcal{R}_n^T \cdot) \right) \right\} \right\} \right) \\ &= \bigcap_{n=1}^N \text{dom} \left(E \left(\ln(\mathcal{R}_n^T \cdot) \right) \right) \supset \mathcal{A}^+. \end{aligned}$$

Da $\mathcal{A}^+ \neq \emptyset$ nach Annahme 3.2.10 gilt, folgt $\text{dom}(\mathfrak{r}_{\text{draw-down}|\mathcal{A}}) \neq \emptyset$ und dies beendet den Beweis. \square

Damit bekommen wir alle Voraussetzungen, die wir für das Optimierungsproblem mit Draw-Down Nebenbedingung benötigen.

Theorem 3.3.6 (Maximum log-TWR mit Expected log DrawDown auf a priori zulässigen Mengen, vgl. Brenner [2, Korollar 5.2.10]). *Sei $S \in \mathcal{L}^2(N; \mathbb{R}_{>0}^{M+1})$ ein Mehr-Perioden-Finanzmarkt wie in Def. 3.1.2, der Quotient von aufeinander folgenden Preisen \mathcal{R} wie in (3.2.1) und \mathcal{A} eine a priori zulässige Menge wie in Annahme 3.2.10 gegeben. Angenommen, $\ln(\mathcal{R}_n^i) \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{F}_n, P; \mathbb{R})$ gilt für $n = 1, \dots, N$ und $i = 0, \dots, M$, sowie Annahme 3.2.14 ist erfüllt. Dann existiert ein $r^* \geq 0$, sodass das Problem*

$$\begin{aligned} &\max_{f \in \mathcal{A}} \mathfrak{u}_{\ln\text{TWR}}(f) \\ &\text{s.t. } \mathfrak{r}_{\text{draw-down}}(f) \leq r \end{aligned}$$

für alle $r \geq r^*$ eine eindeutige Lösung $f_{\max}^* \in \mathcal{A}$ besitzt. Ist die risikofreie Anlage $f^* := (1, \widehat{0}^T)^T$ in \mathcal{A} enthalten, d.h. $f^* \in \mathcal{A}$, so gilt $r^* = 0$.

Beweis. Sei \mathcal{A} eine Menge wie in Annahme 3.2.10. Wegen der Beschränktheit von \mathcal{A} , der Oberhalbstetigkeit von $\mathfrak{u}_{\ln\text{TWR}|\mathcal{A}}$ (siehe Korollar 3.2.13) und der Unterhalbstetigkeit von $\mathfrak{r}_{\text{draw-down}|\mathcal{A}}$ (siehe Korollar 3.3.5) ist die Menge

$$\mathcal{B}_{\mathfrak{u}_{\ln\text{TWR}}, \mathfrak{r}_{\text{draw-down}}, \mathcal{A}}(\mu, r) := \{f \in \mathcal{A} \mid \mathfrak{r}_{\text{draw-down}} \leq r, \mathfrak{u}_{\ln\text{TWR}} \geq \mu\} \subset \mathcal{A}$$

für alle $r \geq 0$ und $\mu \in \mathbb{R}$ kompakt (vgl. Theorem A.1.4). Aus Korollar 3.3.5 erhalten wir $\mathcal{A}^+ \subset \text{dom}(\mathfrak{r}_{\text{draw-down}|\mathcal{A}})$ und mit Korollar 3.2.12 gilt $\mathcal{A}^+ \subset \text{dom}(\mathfrak{u}_{\ln\text{TWR}|\mathcal{A}})$. Mit Hilfe der Annahme 3.2.10 folgt

$$\emptyset \neq \mathcal{A} \cap \mathbb{R}_{\geq 0}^{M+1} = \mathcal{A}^+ \subset \text{dom}(\mathfrak{u}_{\ln\text{TWR}|\mathcal{A}}) \cap \text{dom}(\mathfrak{r}_{\text{draw-down}|\mathcal{A}}).$$

Daher existieren $\mu^* \in \mathbb{R}$ und $r^* \geq 0$ mit $\mathcal{B}_{\mathfrak{u}_{\text{lnTWR}}, \mathfrak{r}_{\text{draw-down}}}(\mu^*, r^*) \neq \emptyset$ und damit folgt die Existenz einer Lösung für $r \geq r^*$ (vgl. Theorem A.1.5). Weiter gilt $\mathfrak{r}_{\text{draw-down}}(f^*) = 0$ für die risikofreie Anlage $f^* := (1, \widehat{0}^T)^T$ (vgl. Korollar 3.3.3), und falls zusätzlich $f^* \in \mathcal{A}$ gilt, folgt außerdem $f^* \in \mathcal{A}^+$. Dies impliziert die Existenz einer Lösung für $r \geq 0$.

Die Eindeutigkeit erhalten wir analog zum Beweis von Theorem 3.2.15 wegen der strengen Konkavität von $\mathfrak{u}_{\text{lnTWR}|\mathcal{A}}$. \square

Wir beenden das Kapitel mit einer weiteren Eigenschaft des DrawDowns, die wir in den folgenden Kapiteln noch einmal benötigen werden. Ähnlich zu der strengen Konkavität von $\mathfrak{u}_{\text{lnTWR}}$ bekommen wir die strenge Konvexität des DrawDowns nicht ohne eine weitere Annahme. Dazu modifizieren wir die Annahme 3.2.14.

Annahme 3.3.7 (Risikofreie Anlage und Injektivität für Periode \tilde{n}). Für $N, M \in \mathbb{N}$, den Quotient von aufeinander folgenden Preisen \mathcal{R} wie in (3.2.1), sowie einer Menge $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}_1$ gelte für die Periode $\tilde{n} \in \{1, \dots, N\}$ und die risikofreie Anlage $f^* := (1, \widehat{0}^T)^T \in \mathbb{R}^{M+1}$:

(i) Für $f \in \mathcal{A}$ gilt

$$\mathcal{R}_{\tilde{n}}^T f \geq 1 \quad \text{P-f.s.} \quad \iff \quad f = f^*.$$

(ii) Für $f, g \in \mathcal{A}_{\text{twr}}$ (vgl. (3.2.4)) gilt

$$P(\mathcal{R}_{\tilde{n}}^T f = \mathcal{R}_{\tilde{n}}^T g \mid \mathcal{R}_{\tilde{n}}^T f < 1) = 1 \quad \implies \quad f = g.$$

Annahme 3.3.7 (i) garantiert, dass die risikofreie Anlage (vgl. Def. 3.1.6) die einzige Aufteilung in $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}_1$ ist, welches in Periode \tilde{n} sicher einen Gewinn erzielt. Aus Annahme 3.3.7 (ii) erhalten wir für alle Aufteilungen neben der risikofreien Anlage die Injektivität der Funktion $f \mapsto \mathcal{R}_{\tilde{n}}^T f$. Weiter erkennen wir, dass Annahme 3.3.7 (ii) die Annahme 3.2.14 impliziert (vgl. Brenner [2, Bem. 5.1.10]).

Korollar 3.3.8 (Strenge Konvexität des Expected log DrawDowns, vgl. Platen [12, Theorem 3.1.7] und Brenner [2, Prop. 5.1.11]). Sei $S \in \mathcal{L}^2(N; \mathbb{R}_{>0}^{M+1})$ ein Mehr-Perioden-Finanzmarkt wie in Def. 3.1.2, der Quotient von aufeinander folgenden Preisen \mathcal{R} wie in (3.2.1) und \mathcal{A} eine a priori zulässige Menge wie in Annahme 3.2.10 gegeben. Angenommen, $\ln(\mathcal{R}_n^i) \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{F}_n, P; \mathbb{R})$ gilt für $n = 1, \dots, N$, $i = 0, \dots, M$.

(a) Enthält S keine nicht triviale risikofreie Trading Strategie (vgl. Def. 3.1.6) und es gilt $S_N^0 = S_{N-1}^0$, dann ist $\mathfrak{r}_{\text{draw-down}}$ unter der Annahme 3.3.7 (i) für $\tilde{n} = N$ eingeschränkt auf \mathcal{A}_{twr} streng konvex.

(b) Sei die Annahme 3.3.7 für $\tilde{n} = N$ erfüllt. Dann ist $\mathfrak{r}_{\text{draw-down}}$ auf \mathcal{A} streng proper konvex (siehe Def. A.1.1), d.h. streng konvex auf

$$\text{dom}(\mathfrak{r}_{\text{draw-down}|\mathcal{A}}) = \{f \in \mathcal{A} \mid \mathfrak{r}_{\text{draw-down}}(f) < \infty\} \subset \mathcal{A}.$$

Beweis. Zuerst beweisen wir Teil (a). Sei dazu $f_1, f_2 \in \mathcal{A}_{\text{twr}} \subset \mathcal{A}_1$ mit $f_1 \neq f_2$ und $\lambda \in (0, 1)$ beliebig. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit nehmen wir $f_1 \neq f^* = (1, \widehat{0}^T)^T \in \mathbb{R}^{M+1}$ an, denn sonst können wir f_1 und f_2 tauschen, da diese nach Voraussetzung unterschiedlich sein müssen. Weiter definieren wir $f_\lambda := \lambda f_1 + (1 - \lambda)f_2$. Da die Nullfunktion nicht streng konvex ist, müssen wir zwischen zwei Fällen unterscheiden:

Erster Fall: $\mathfrak{r}_{\text{draw-down}}(f_\lambda) = 0$. Für diesen Fall benötigen wir Annahme 3.3.7 (i). Denn zusammen mit der Voraussetzung $f_1 \neq f^*$ gilt

$$P(\mathcal{R}_N^T f_1 < 1) > 0$$

und dies impliziert $P(-\ln(\mathcal{R}_N^T f_1) > 0) > 0$, woraus wir

$$P\left(\max_{1 \leq \ell \leq N} \sum_{n=\ell}^N -\ln(\mathcal{R}_n^T f_1) > 0\right) > 0 \quad (3.3.3)$$

folgern können. Zusammen mit der Nicht-Negativität von $\mathfrak{r}_{\text{draw-down}}$ (vgl. Korollar 3.3.3) folgt

$$\lambda \mathfrak{r}_{\text{draw-down}}(f_1) + (1 - \lambda) \mathfrak{r}_{\text{draw-down}}(f_2) \geq \lambda \mathfrak{r}_{\text{draw-down}}(f_1) \stackrel{(3.3.3)}{>} 0 = \mathfrak{r}_{\text{draw-down}}(f_\lambda).$$

Also erhalten wir die strenge Konvexität für den Fall $\mathfrak{r}_{\text{draw-down}}(f_\lambda) = 0$.

Zweiter Fall: $\mathfrak{r}_{\text{draw-down}}(f_\lambda) > 0$. Weil die beiden Aufteilungen f_1 und f_2 insbesondere Elemente von \mathcal{A}_1 (vgl. (3.2.2)) sind, gilt insbesondere $\hat{f}_1 \neq \hat{f}_2$. Wegen $S_N^0 = S_{N-1}^0$ gilt weiter $\mathcal{R}_N^0 = 1$ und mit Lemma 3.1.7 folgt für η mit $\eta_i := (f_1^i - f_2^i)/S_{N-1}^i$ für $i = 0, \dots, M$ mit $\hat{\eta} \neq \hat{0}$

$$0 < P\left((S_N - S_{N-1})^T \eta < 0\right) = P\left(\mathcal{R}_N^T(f_1 - f_2) < \underbrace{\sum_{i=0}^M (f_1^i - f_2^i)}_{=1-1}\right) = P\left(\mathcal{R}_N^T(f_1 - f_2) < 0\right)$$

und damit erhalten wir

$$P\left(\mathcal{R}_N^T f_1 \neq \mathcal{R}_N^T f_2\right) \geq P\left(\mathcal{R}_N^T(f_1 - f_2) < 0\right) > 0.$$

Mit Hilfe der strengen Konvexität von $-\ln$ erhalten wir strenge Konvexität im letzten Summanden von $\mathfrak{r}_{\text{draw-down}}$, und da dieser Summand in diesem Fall immer Teil des Maximums ist, folgt mit (3.3.1) und der strengen Monotonie, sowie der Linearität des Erwartungswertes

$$\begin{aligned} \mathfrak{r}_{\text{draw-down}}(f_\lambda) &= E\left[\max_{1 \leq \ell \leq N} \sum_{n=\ell}^N -\ln(\mathcal{R}_n^T f_\lambda)\right] \\ &< E\left[\max_{1 \leq \ell \leq N} \sum_{n=\ell}^N \left(\lambda(-\ln(\mathcal{R}_n^T f_1)) + (1 - \lambda)(-\ln(\mathcal{R}_n^T f_2))\right)\right] \\ &= \lambda E\left[\left(\max_{1 \leq \ell \leq N} \sum_{n=\ell}^N -\ln(\mathcal{R}_n^T f_1)\right)\right] + (1 - \lambda) E\left[\left(\max_{1 \leq \ell \leq N} \sum_{n=\ell}^N -\ln(\mathcal{R}_n^T f_2)\right)\right] \\ &\leq \lambda \mathfrak{r}_{\text{draw-down}}(f_1) + (1 - \lambda) \mathfrak{r}_{\text{draw-down}}(f_2) \end{aligned}$$

und damit die strenge Konvexität. Um Teil (b) zu beweisen, müssen wir dieselbe Fallunterscheidung wie in Teil (a) betrachten. Sei dazu $f_1, f_2 \in \text{dom}(\mathfrak{r}_{\text{draw-down}}|_{\mathcal{A}}) \subset \mathcal{A}_{\text{twr}}$ mit $f_1 \neq f_2$ und $\lambda \in (0, 1)$ beliebig. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit nehmen wir $f_1 \neq f^*$ an und definieren $f_\lambda := \lambda f_1 + (1 - \lambda) f_2$. Da der erste Fall völlig analog verläuft, nehmen wir im Folgenden $\mathfrak{r}_{\text{draw-down}}(f_\lambda) > 0$ an. Dann gilt

$$\begin{aligned} \mathfrak{r}_{\text{draw-down}}(f_\lambda) &\stackrel{(3.3.1)}{=} E\left[\max_{1 \leq \ell \leq N} \sum_{n=\ell}^N -\ln(\mathcal{R}_n^T f_\lambda)\right] \\ &= E\left[\max\left\{0, \max_{1 \leq \ell \leq N-1} \left\{\sum_{n=\ell}^{N-1} -\ln(\mathcal{R}_n^T f_\lambda)\right\}\right\}\right] + E\left[-\ln(\mathcal{R}_N^T f_\lambda)\right]. \end{aligned} \quad (3.3.4)$$

Der erste Teil entspricht dem DrawDown auf $N - 1$ Perioden und ist auf Grund der Konvexität von $-\ln$ konvex. Weiter gilt $f_1 \neq f^*$ und aus Annahme 3.3.7 (i) folgt $\mathcal{R}_N^T f_1 < 1$. Dann gilt mit Annahme 3.3.7 (ii) für $\tilde{n} = N$

$$P(\mathcal{R}_N^T f_1 \neq \mathcal{R}_N^T f_2) > 0.$$

Mit dieser Erkenntnis erhalten wir mit der strengen Konvexität von $-\ln$, dass

$$P \left[-\ln(\mathcal{R}_N^T f_\lambda) < \lambda \left(-\ln(\mathcal{R}_N^T f_1) \right) + (1 - \lambda) \left(-\ln(\mathcal{R}_N^T f_2) \right) \right] > 0$$

gilt. Daraus folgt

$$E \left[-\ln(\mathcal{R}_N^T f_\lambda) \right] < E \left[\lambda \left(-\ln(\mathcal{R}_N^T f_1) \right) + (1 - \lambda) \left(-\ln(\mathcal{R}_N^T f_2) \right) \right]$$

und damit ist $f \mapsto E[-\ln(\mathcal{R}_N^T f)]$ streng konvex. Insgesamt erhalten wir mit Gleichung (3.3.4)

$$\begin{aligned} \mathfrak{r}_{\text{draw-down}}(f_\lambda) &= E \left[\max \left\{ 0, \max_{1 \leq \ell \leq N-1} \left\{ \sum_{n=\ell}^{N-1} -\ln(\mathcal{R}_n^T f_\lambda) \right\} \right\} \right] + E \left[-\ln(\mathcal{R}_N^T f_\lambda) \right] \\ &< \lambda E \left[\max \left\{ 0, \max_{1 \leq \ell \leq N-1} \left\{ \sum_{n=\ell}^{N-1} -\ln(\mathcal{R}_n^T f_1) \right\} \right\} \right] + \lambda E \left[-\ln(\mathcal{R}_N^T f_1) \right] \\ &\quad + (1 - \lambda) E \left[\max \left\{ 0, \max_{1 \leq \ell \leq N-1} \left\{ \sum_{n=\ell}^{N-1} -\ln(\mathcal{R}_n^T f_2) \right\} \right\} \right] \\ &\quad + (1 - \lambda) E \left[-\ln(\mathcal{R}_N^T f_2) \right] \\ &= \lambda E \left[\max_{1 \leq \ell \leq N} \sum_{n=\ell}^N -\ln(\mathcal{R}_n^T f_1) \right] + (1 - \lambda) E \left[\max_{1 \leq \ell \leq N} \sum_{n=\ell}^N -\ln(\mathcal{R}_n^T f_2) \right] \\ &\stackrel{(3.3.1)}{\leq} \lambda \mathfrak{r}_{\text{draw-down}}(f_1) + (1 - \lambda) \mathfrak{r}_{\text{draw-down}}(f_2). \end{aligned}$$

Also haben wir auch in Teil (b) die strenge Konvexität gezeigt. \square

Bemerkung 3.3.9 (Neuer Bezugspunkt für den DrawDown). Sei der Quotient von aufeinander folgenden Preisen \mathcal{R} wie in (3.2.1) gegeben. Der Expected Log DrawDown (vgl. Def. 3.3.2 und (3.3.1)) wird vereinfacht gesagt größer, wenn sich das Skalarprodukt $R_n^T f$ von eins in Richtung null wegbewegt. Also wird in der Interpretation das Risiko größer, sobald wir einen Verlust unseres Kapitals erleben.

Der Bezugspunkt des Status quo ist jedoch etwas fragwürdig, da wir genauso gut unser Kapital in die risikofreie Anlage hätten investieren können und damit unter Umständen einen Ertrag hätten erwirtschaften können. Daher ist es sinnvoll einen neuen Bezugspunkt zu setzen. Für $f^* = (1, \widehat{0}^T)^T$ definieren wir

$$\tilde{\mathfrak{r}}_{\text{draw-down}}(f) := \begin{cases} E \left[\max \left\{ 0, \max_{1 \leq \ell \leq N} \left\{ \sum_{n=\ell}^N -\ln \left(\frac{\mathcal{R}_n^T f}{\mathcal{R}_n^T f^*} \right) \right\} \right\} \right], & f \in \mathcal{A}_{\text{twr}} \\ \infty, & f \notin \mathcal{A}_{\text{twr}} \end{cases}$$

Wenn wir uns nun von dem neuen Bezugspunkt $R_n^T f^* = R_n^0$ in Richtung null entfernen, wird

das Risiko größer. Weiter gilt für $f \in \mathcal{A}_{\text{twr}}$

$$\begin{aligned}
\tilde{\tau}_{\text{draw-down}}[\mathcal{R}](f) &= E \left[\max \left\{ 0, \max_{1 \leq \ell \leq N} \left\{ \sum_{n=\ell}^N -\ln \left(\frac{\mathcal{R}_n^T f}{\mathcal{R}_n^T f^*} \right) \right\} \right\} \right] \\
&= E \left[\max \left\{ 0, \max_{1 \leq \ell \leq N} \left\{ \sum_{n=\ell}^N -\ln \left(\frac{\mathcal{R}_n^T f}{\mathcal{R}_n^0} \right) \right\} \right\} \right] \\
&= E \left[\max \left\{ 0, \max_{1 \leq \ell \leq N} \left\{ \sum_{n=\ell}^N -\ln (\tilde{\mathcal{R}}_n^T f) \right\} \right\} \right] \\
&= \tau_{\text{draw-down}}[\tilde{\mathcal{R}}](f),
\end{aligned}$$

wobei $\tilde{\mathcal{R}} := (\tilde{\mathcal{R}}_n)_{1 \leq n \leq N}$ durch

$$\tilde{\mathcal{R}}_n := \left(1, \frac{R_n^1}{R_n^0}, \frac{R_n^2}{R_n^0}, \dots, \frac{R_n^M}{R_n^0} \right)$$

definiert ist. Also entspricht diese Änderung des Bezugspunktes lediglich einer leichten Änderung von \mathcal{R} . Damit wir die Eigenschaften von $\tau_{\text{draw-down}}$ auf $\tilde{\tau}_{\text{draw-down}}$ übertragen können, müssen wir lediglich die Voraussetzungen überprüfen und die eine oft verwendete Voraussetzung, die wir an den Quotienten von aufeinander folgenden Preisen in diesem Kapitel gesetzt haben, ist $\ln(\mathcal{R}_n^i) \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{F}_n, P; \mathbb{R})$ für $n = 1, \dots, N$, $i = 0, \dots, M$. Aus dieser Voraussetzung folgt jedoch sofort

$$\ln(\tilde{\mathcal{R}}_n^i) = \ln \left(\frac{\mathcal{R}_n^i}{\mathcal{R}_n^0} \right) = \underbrace{\ln(\mathcal{R}_n^i)}_{\in \mathcal{L}^1} - \underbrace{\ln(\mathcal{R}_n^0)}_{\in \mathbb{R}} \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{F}_n, P; \mathbb{R})$$

für $n = 1, \dots, N$, $i = 0, \dots, M$. Wir können sogar noch einen Schritt weiter gehen und die Annahme 3.3.7 durch die folgende Annahme abschwächen.

Annahme 3.3.10 (Risikofreie Anlage und Injektivität für Periode \tilde{n} ; Alternative für neuen Bezugspunkt). Für $N, M \in \mathbb{N}$, den Quotient von aufeinander folgenden Preisen \mathcal{R} wie in (3.2.1), sowie einer Menge $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}_1$ gelte für die Periode $\tilde{n} \in \{1, \dots, N\}$ und die risikofreie Anlage $f^* := (1, \hat{0}^T)^T \in \mathbb{R}^{M+1}$:

(I) Für $f \in \mathcal{A}$ gilt

$$\mathcal{R}_{\tilde{n}}^T f \geq \mathcal{R}_{\tilde{n}}^T f^* \quad \text{P-f.s.} \quad \iff \quad f = f^*.$$

(II) Für $f, g \in \mathcal{A}_{\text{twr}}$ (vgl. (3.2.4)) gilt

$$P(\mathcal{R}_{\tilde{n}}^T f = \mathcal{R}_{\tilde{n}}^T g \mid \mathcal{R}_{\tilde{n}}^T f < \mathcal{R}_{\tilde{n}}^T f^*) = 1 \quad \implies \quad f = g.$$

Da hier lediglich vorausgesetzt wird, dass keine Aufteilung neben der risikofreien Anlage existiert, welche in Periode \tilde{n} einen so hohen Ertrag wie die risikofreie Anlage erzielt, orientiert sich Voraussetzungen (I) viel stärker an der Praxis als Punkt (i) von Annahme 3.3.7. Darüber hinaus erkennen wir, dass $\tilde{\tau}_{\text{draw-down}}$ unter der Annahme 3.3.10 für $\tilde{n}=N$ streng konvex ist, da aus Annahme 3.3.10 für \mathcal{R}_N die Annahme 3.3.7 für $\tilde{\mathcal{R}}_N$ folgt.

4. Konstruktion und Analyse einer neuen log Risikofunktion

In Kapitel 3 haben wir uns mit der Nutzenfunktion $u_{\ln\text{TWR}}$ (siehe (3.2.10)) und der Risikofunktion $\tau_{\text{draw-down}}$ (siehe Def. 3.3.2) beschäftigt. Dabei gibt uns $u_{\ln\text{TWR}}$ den natürlichen Logarithmus des zu erwartenden Kapitals nach $N \in \mathbb{N}$ Perioden. Darüber hinaus erhalten wir durch $\tau_{\text{draw-down}}$ den natürlichen Logarithmus des verlorenen Kapitals seit dem höchsten Stand.

Analog dazu wollen wir dieses Kapitel nutzen, um noch eine weitere Risikofunktion zu definieren und ein neues Optimierungsproblem zu lösen. In Abbildung 4.1 sind die Funktionen, um die es gehen soll, grafisch dargestellt. In blau erkennen wir den $u_{\ln\text{TWR}}$, welcher ein Indikator für den Nutzen eines Portfolios darstellt, in rot den schon bekannten DrawDown, sowie den RunDown, welche wir als Indikatoren für das Risiko eines Portfolios nutzen möchten. Im Folgenden werden wir den RunDown definieren und analysieren.

Ziel dieses Kapitels soll es sein, für $\lambda \in [0, 1]$, $r \geq 0$ und \mathcal{A}_{twr} wie in (3.2.4) die eindeutige Existenz einer Lösung des a posteriori Optimierungsproblems

$$\begin{aligned} \max_{f \in \mathcal{A}_{\text{twr}}} & u_{\ln\text{TWR}}(f) \\ \text{s.t. } & \tau_{\lambda}(f) := \lambda \cdot \tau_{\text{run-down}}(f) + (1 - \lambda) \cdot \tau_{\text{draw-down}}(f) \leq r, \end{aligned} \quad (4.0.1)$$

sowie die eindeutige Existenz einer Lösung des a priori Optimierungsproblems, in dem die Optimierung auf einer Menge \mathcal{A} wie in Annahme 3.2.10 stattfindet, zu zeigen.

In den vorherigen Kapiteln haben wir vermutet, dass eine alleinige Maximierung von $u_{\ln\text{TWR}}$ ein hohes Risiko mit sich bringt, da dadurch das schnellstmögliche Wachstum des Kapitals erreicht werden soll. Mit der DrawDown-Nebenbedingung haben wir versucht dieses Risiko zu begrenzen. Betrachten wir noch einmal Abbildung 4.1 und das Optimierungsproblem (4.0.1). Verwenden wir eine geschickte Konvexkombination der Risikofunktionen RunDown und DrawDown, dann

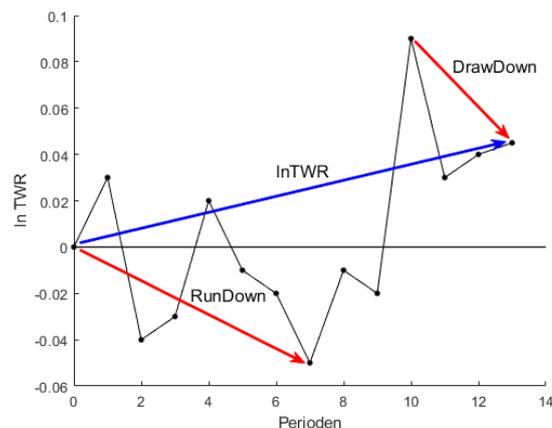


Abbildung 4.1.: Eine beispielhafte ln Kapitalentwicklung über 13 Perioden

liegt es nahe, dass eine Beschränkung dieser Risikofunktionen vermutlich neben einem geringem DrawDown und RunDown auch die Standardabweichung verringern würde. Dies werden wir in Kapitel 6.5 untersuchen.

4.1. Expected log RunDown Risikofunktion

Die RunDown Risikofunktion hat die gleiche Bewegungsrichtung wie der DrawDown. Jedoch erhalten wir aus dem DrawDown die Differenz zwischen dem Höchststand unseres Kapitals bis zur letzten Periode $N \in \mathbb{N}$ und aus dem RunDown die Differenz zwischen dem Beginn unserer Kapitalentwicklung zum Tiefpunkt unseres Kapitals.

Definition 4.1.1 (Expected log RunDown Risikofunktion). Sei $M, N \in \mathbb{N}$, $S \in \mathcal{L}^2(N; \mathbb{R}_{>0}^{M+1})$ ein Mehr-Perioden-Finanzmarkt wie in Def. 3.1.2, TWR der Terminal Wealth Relative aus Def. 3.2.4 und \mathcal{A}_{twr} wie in (3.2.4) gegeben. Dann ist der RunDown definiert durch

$$\tau_{\text{run-down}} : \mathbb{R}^{M+1} \rightarrow [-\infty, \infty], f \mapsto \begin{cases} E \left[-\min \left\{ 0, \min_{1 \leq \ell \leq N} \ln (\text{TWR}_1^\ell(f)) \right\} \right], & f \in \mathcal{A}_{\text{twr}} \\ \infty, & f \notin \mathcal{A}_{\text{twr}} \end{cases}.$$

Verwenden wir die Definition des Terminal Wealth Relative's, so erhalten wir für $f \in \mathcal{A}_{\text{twr}}$ die alternative Darstellung

$$\tau_{\text{run-down}}(f) = E \left[-\min \left\{ 0, \min_{1 \leq \ell \leq N} \sum_{n=1}^{\ell} \ln (\mathcal{R}_n^T f) \right\} \right] = E \left[\max \left\{ 0, \max_{1 \leq \ell \leq N} \sum_{n=1}^{\ell} -\ln (\mathcal{R}_n^T f) \right\} \right] \quad (4.1.1)$$

und auf Grund der Ähnlichkeit von RunDown und DrawDown können wir im Folgenden auf einige Resultate aus Kapitel 3.3 zurückgreifen. In einem ersten Ansatz wollen wir einige erste Eigenschaften vor allem auf a posteriori zulässigen Mengen festhalten.

Korollar 4.1.2 (Expected log RunDown Risikofunktion auf a posteriori zulässigen Mengen). Sei $S \in \mathcal{L}^2(N; \mathbb{R}_{>0}^{M+1})$ ein Mehr-Perioden-Finanzmarkt wie in Def. 3.1.2, der Quotient von aufeinander folgenden Preisen \mathcal{R} wie in (3.2.1) und \mathcal{A}_{twr} wie in (3.2.4) gegeben. Angenommen, $\ln(\mathcal{R}_n^i) \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{F}_n, P; \mathbb{R})$ gilt für $n = 1, \dots, N$ und $i = 0, \dots, M$. Dann ist $\tau_{\text{run-down}}$ proper konvex, $\text{dom}(\tau_{\text{run-down}}) = \text{dom}(\mathbf{u}_{\ln \text{TWR}})$ und $\tau_{\text{run-down}} \geq 0$.

Enthält S darüber hinaus keine nicht triviale risikofreie Trading Strategie (vgl. Def. 3.1.6) und es gilt $S_1^0 = S_0^0$, so ist $\tau_{\text{run-down}}$ unter der Annahme 3.3.7 (i) für $\tilde{n} = 1$ eingeschränkt auf \mathcal{A}_{twr} streng konvex.

Beweis. Die Nicht-Negativität folgt aus Gleichung (4.1.1). Weiter zeigen wir, dass die Domain von $\tau_{\text{run-down}}$ nicht leer ist. In der Tat gilt $f^* := (1, \hat{0}^T)^T \in \text{dom}(\tau_{\text{run-down}}) \subset \mathcal{A}_{\text{twr}}$, da $S^0 = (S_0^0, S_1^0, \dots, S_N^0)$ eine risikofreie Anlage (vgl. Def. 3.1.1) darstellt und damit $\tau_{\text{run-down}}(f^*) = 0$ wegen

$$\max_{1 \leq \ell \leq N} \sum_{n=1}^{\ell} -\ln (\mathcal{R}_n^T f^*) = \max_{1 \leq \ell \leq N} \sum_{n=1}^{\ell} -\ln \left(\underbrace{\frac{S_n^0}{S_{n-1}^0}}_{\geq 1} \right) \leq 0$$

gilt. Die Konvexität von $\tau_{\text{run-down}}$ folgt aus der Konvexität von $-\ln$ und da das Maximum konvexer Funktionen wieder konvex ist. Damit ist $\tau_{\text{run-down}}$ proper konvex.

Bleibt $\text{dom}(\mathbf{u}_{\text{lnTWR}}) = \text{dom}(\mathbf{r}_{\text{run-down}})$ zu zeigen. Beide Domains sind per Definition Teilmengen von \mathcal{A}_{twr} . Nehmen wir zuerst $f \in \mathcal{A}_{\text{twr}}$ mit $\mathbf{u}_{\text{lnTWR}}(f) > -\infty$ an. Dann gilt für alle $n = 1, \dots, N$

$$E\left[\ln(\mathcal{R}_n^T f)\right] > -\infty.$$

Dies ist jedoch äquivalent zu

$$E\left[-\ln(\mathcal{R}_n^T f)\right] < \infty$$

und es folgt $\mathbf{r}_{\text{run-down}}(f) < \infty$. Analog folgt $\mathbf{u}_{\text{lnTWR}}(f) > -\infty$, falls $\mathbf{r}_{\text{run-down}}(f) < \infty$ und damit folgt die Behauptung.

Nehmen wir nun an, S enthalte keine nicht triviale Trading Strategie (vgl. Def. 3.1.6) und es gilt $S_1^0 = S_0^0$. Dann verwenden wir ein ähnliches Argument wie im Beweis von Korollar 3.3.8 (a). Dabei ist der einzige Unterschied, dass wir im zweiten Fall die Injektivität von $f \mapsto R_1^T f$ und damit die strenge Konvexität in der ersten und nicht in der letzten Periode erhalten. Da diese in dem Fall immer Teil des Maximums ist, folgt die Behauptung. \square

Weiter möchten wir $\mathbf{r}_{\text{run-down}}$ auf einer a priori zulässigen Menge \mathcal{A} wie in Annahme 3.2.10 untersuchen.

Korollar 4.1.3 (Expected log RunDown Risikofunktion auf a priori zulässigen Mengen). *Sei $S \in \mathcal{L}^2(N; \mathbb{R}_{>0}^{M+1})$ ein Mehr-Perioden-Finanzmarkt wie in Def. 3.1.2, der Quotient von aufeinander folgenden Preisen \mathcal{R} wie in (3.2.1) und \mathcal{A} eine a priori zulässige Menge wie in Annahme 3.2.10 gegeben. Angenommen, $\ln(\mathcal{R}_n^i) \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{F}_n, P; \mathbb{R})$ gilt für $n = 1, \dots, N$ und $i = 0, \dots, M$. Dann ist $\mathbf{r}_{\text{run-down}|_{\mathcal{A}}} : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ proper konvex und unterhalbstetig (vgl. Def. A.1.3). Des Weiteren gilt $\mathbf{r}_{\text{run-down}|_{\mathcal{A}}} \geq 0$, und $\mathcal{A}^+ = \mathcal{A} \cap \mathbb{R}_{\geq 0}^{M+1} \subset \text{dom}(\mathbf{r}_{\text{run-down}|_{\mathcal{A}}})$. Gilt darüber hinaus Annahme 3.3.7 für $\tilde{n} = 1$, so ist $\mathbf{r}_{\text{run-down}|_{\mathcal{A}}}$ streng proper konvex.*

Beweis. Die Konvexität und Nicht-Negativität folgt mit Korollar 4.1.2. Die Unterhalbstetigkeit folgt mit analogen Schritten wie in Beweis von Korollar 3.3.5. Als nächstes wollen wir

$$\mathcal{A}^+ := \mathcal{A} \cap \mathbb{R}_{\geq 0}^{M+1} \subset \text{dom}(\mathbf{r}_{\text{run-down}|_{\mathcal{A}}}) := \{f \in \mathcal{A} \mid \mathbf{r}_{\text{run-down}}(f) < \infty\} \subset \mathcal{A}.$$

zeigen. In Beweis von Korollar 3.2.12 haben wir bereits gesehen, dass $\mathcal{A}^+ \subset \text{dom}(\mathbf{u}_{\text{lnTWR}})$ gilt. Also muss dies insbesondere für jeden einzelnen Summanden von $\mathbf{u}_{\text{lnTWR}}$ gelten. Verwenden wir dies, erhalten wir

$$\begin{aligned} \text{dom}(\mathbf{r}_{\text{run-down}}) &= \text{dom}\left(\max\left\{0, \max_{1 \leq \ell \leq N} \left\{-\sum_{n=1}^{\ell} E\left(\ln(\mathcal{R}_n^T \cdot)\right)\right\}\right\}\right) \\ &= \bigcap_{n=1}^{\ell} \text{dom}\left(E\left(\ln(\mathcal{R}_n^T \cdot)\right)\right) \supset \mathcal{A}^+. \end{aligned}$$

Analog zum Beweis von Korollar 3.2.12 bekommen wir $\emptyset \neq \text{dom}(\mathbf{r}_{\text{run-down}|_{\mathcal{A}}})$. Angenommen, Annahme 3.3.7 ist erfüllt. Dann folgt die strenge Konvexität analog zum Beweis von Korollar 4.1.2, da wir die Injektivität von $f \in \text{dom}(\mathbf{r}_{\text{run-down}|_{\mathcal{A}}}) \mapsto R_1^T f$ mit Annahme 3.3.7 für $\tilde{n} = 1$ erhalten. \square

4.2. Optimierungsproblem mit RunDown und DrawDown

Damit sind wir soweit das Optimierungsproblem aus (4.0.1) zu lösen. Dies halten wir in folgendem Theorem fest.

Theorem 4.2.1 (Maximum log-TWR Optimierungsproblem mit Nebenbedingung). Sei $S \in \mathcal{L}^2(N; \mathbb{R}_{>0}^{M+1})$ ein Mehr-Perioden-Finanzmarkt wie in Def. 3.1.2, der Quotient von aufeinander folgenden Preisen \mathcal{R} wie in (3.2.1), \mathcal{A}_{twr} wie in (3.2.4), \mathcal{A} eine a priori zulässige Menge wie in Annahme 3.2.10 und $\lambda \in [0, 1]$ gegeben. Angenommen, $\ln(\mathcal{R}_n^i) \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{F}_n, P; \mathbb{R})$ gilt für $n = 1, \dots, N$, $i = 0, \dots, M$.

- (a) Enthält S keine nicht triviale risikofreie Trading Strategie (vgl. Def. 3.1.6) und seien $\mathbf{u}_{\ln TWR}$, $\mathbf{r}_{run-down}$ und $\mathbf{r}_{draw-down}$ eingeschränkt auf \mathcal{A}_{twr} abgeschlossen. Dann hat das Problem

$$\begin{aligned} \max_{f \in \mathcal{A}_{twr}} \mathbf{u}_{\ln TWR}(f) \\ \text{s.t. } \mathbf{r}_\lambda(f) := \lambda \cdot \mathbf{r}_{run-down}(f) + (1 - \lambda) \cdot \mathbf{r}_{draw-down}(f) \leq r \end{aligned}$$

für alle $r \geq 0$ eine eindeutige Lösung $f_{max}^* \in \mathcal{A}_{twr}$.

- (b) Sei Annahme 3.2.14 erfüllt. Dann existiert ein $r^* \geq 0$, sodass das Problem

$$\begin{aligned} \max_{f \in \mathcal{A}} \mathbf{u}_{\ln TWR}(f) \\ \text{s.t. } \mathbf{r}_\lambda(f) := \lambda \cdot \mathbf{r}_{run-down}(f) + (1 - \lambda) \cdot \mathbf{r}_{draw-down}(f) \leq r \end{aligned}$$

für alle $r \geq r^*$ eine eindeutige Lösung $f_{max}^* \in \mathcal{A}$ besitzt. Ist die risikofreie Anlage $f^* := (1, \widehat{0}^T)^T$ in \mathcal{A} enthalten, d.h. $f^* \in \mathcal{A}$, so gilt $r^* = 0$.

Beweis. Der RunDown erfüllt dieselben Eigenschaften wie $\mathbf{r}_{draw-down}$ in Theorem 3.3.4 bzw. Theorem 3.3.6 und somit erfüllt auch die konvexe Kombination dieser Funktionen \mathbf{r}_λ dieselben Eigenschaften wie $\mathbf{r}_{draw-down}$ in den Theoremen 3.3.4 und 3.3.6. Die Beweisschritte verlaufen daher völlig analog zur Argumentation in Theorem 3.3.4 bzw. Theorem 3.3.6. Beachte, dass im Fall (a) alle Funktionen dieselbe Domain haben und im Fall (b) \mathcal{A}_1^+ eine Teilmenge aller Domains darstellt. \square

Natürlich können wir, wie in Bemerkung 3.3.9 für den DrawDown analysiert, auch für den RunDown einen neuen Bezugspunkt setzen und erhalten damit eine leicht abgeänderte Version. Wir beenden das Kapitel mit zwei Bemerkungen zu weiteren Optimierungsproblemen und log Nutzenfunktionen.

Bemerkung 4.2.2 (Minimierungsproblem). Bis zu diesem Punkt haben wir uns lediglich Maximierungsprobleme angeschaut. Die Theorie für Optimierungsprobleme der Form

$$\begin{aligned} \min_{f \in \mathcal{A}} \mathbf{r}(f) \\ \text{s.t. } \mathbf{u}(f) \geq \mu \end{aligned}$$

mit einer Teilmenge $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^{M+1}$, $\mu \in \mathbb{R}$, einer Risikofunktion \mathbf{r} und einer Nutzenfunktion \mathbf{u} verläuft in ähnlichen Schritten. Für die Eindeutigkeit braucht es insbesondere die strenge Konvexität von \mathbf{r} , die wir für unsere Risikofunktionen nachgewiesen haben (für DrawDown vgl. Korollar 3.3.8, für RunDown vgl. Korollar 4.1.2 und Korollar 4.1.3).

Bemerkung 4.2.3 (Weitere Log Nutzenfunktionen). Beim Erstellen dieser Arbeit wurden noch einige Ansätze weiterer log Nutzenfunktionen in Erwägung gezogen. In Abbildung 4.2 erkennen wir in blau die Nutzenfunktionen RunUp und DrawUp. Der RunUp gibt uns den natürlichen Logarithmus des Höchststands unseres Kapitals und der DrawUp den Anstieg unseres Kapitals seit dem tiefsten Stand bis zum Ende. Diese Funktionen benötigen jedoch in ihrer Definition ein Maximum, aber da das Maximum konkaver Funktionen im allgemeinen nicht wieder konkav

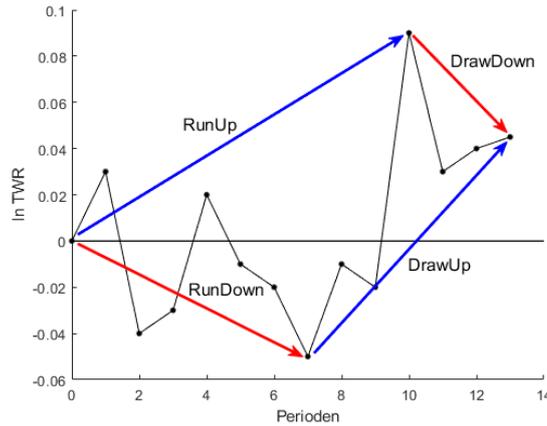


Abbildung 4.2.: Eine beispielhafte ln Kapitalentwicklung über 13 Perioden

sein muss, fehlt uns diese wichtige Eigenschaft für die Funktionen.

Eine weitere Möglichkeit, den RunUp bzw. den DrawUp zu definieren ohne direkt ein Maximum zu verwenden, ist mit Hilfe des $u_{\ln TWR}$. Wir stellen folgende Relation fest

$$u_{\ln TWR} = u_{\text{run-up}} - \tau_{\text{draw-down}} \quad \text{und} \quad u_{\ln TWR} = u_{\text{draw-up}} - \tau_{\text{run-down}}.$$

Beachte dabei, dass der RunDown und der DrawDown als Indikator für das Risiko immer positiv ist (vgl. Korollar 4.1.2, Korollar 4.1.3 und Korollar 3.3.3). Formen wir dies nach den gesuchten Funktionen um, erhalten wir

$$u_{\text{run-up}} = u_{\ln TWR} + \tau_{\text{draw-down}} \quad \text{und} \quad u_{\text{draw-up}} = u_{\ln TWR} + \tau_{\text{run-down}}.$$

In diesem Fall können wir aber auch keine Aussage über die Konkavität der Funktionen tätigen. Die Nutzenfunktion $u_{\ln TWR}$ ist zwar konkav, aber $\tau_{\text{run-down}}$ und $\tau_{\text{draw-down}}$ sind konvex.

Weiter erkennen wir eine starke Ähnlichkeit zwischen RunUp und RunDown, sowie DrawUp und DrawDown. Tatsächlich ist es so, dass der RunUp dem RunDown und analog der DrawUp dem DrawDown auf einer invertierten Kapitalentwicklung entspricht. Dies wird in Abbildung 4.3 deutlich.

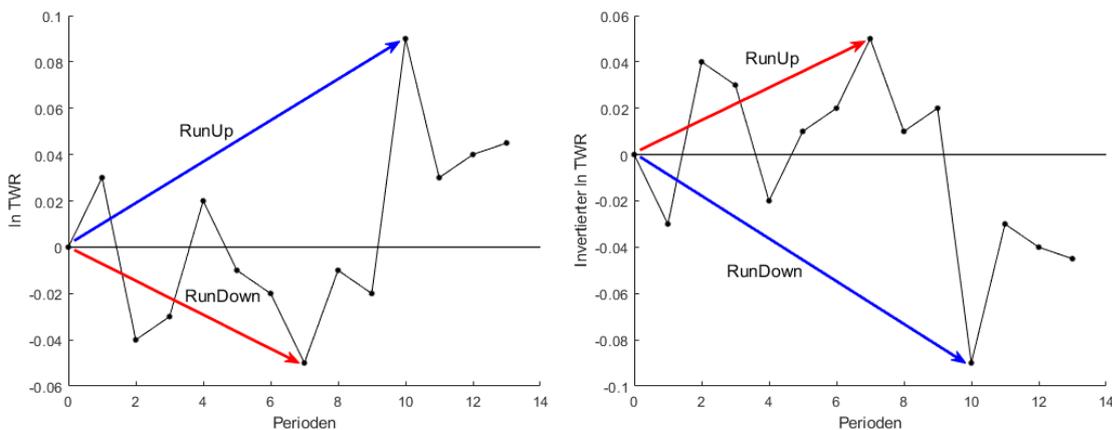


Abbildung 4.3.: Vergleich zwischen normaler und invertierter ln Kapitalentwicklung mit RunUp und RunDown

Möchten wir den RunUp auf der normalen Kapitalentwicklung maximieren entspricht dies einer Maximierung des RunDowns auf der invertierten Kapitalentwicklung. Da der RunDown aber eine konvexe Funktion ist, können wir für diesen zwar ein Minimierungsproblem lösen, aber kein Maximierungsproblem, weshalb eine so konstruierte RunUp Funktion als Nutzenfunktion nicht verwendet werden kann und analog gilt diese Begründung für den DrawUp.

5. Konsistenz der Optimierungsprobleme

Wir haben einige Optimierungsprobleme nach Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen theoretisch untersucht. Möchten wir diese Erkenntnisse praktisch implementieren und beispielsweise einen Fond mit einer der kennengelernten Strategien aufsetzen, dann müssen wir die optimale Lösung approximieren. Dieses Kapitel dient dazu, den Bogen zwischen dem theoretischen Modell zur tatsächlichen empirischen Untersuchung in Kapitel 6 zu spannen. Dabei soll die Idee zur Konsistenz der Optimierungsprobleme besprochen werden.

Wenn wir von Konsistenz sprechen, dann meinen wir die Approximation einer optimalen Lösung auf einem empirischen Setup mit beschränkten Informationen. Darüber hinaus stellt sich die Frage, inwiefern eine Lösung in Abhängigkeit der Information gegen die optimale Lösung konvergiert, wenn die vorhandenen Informationen wachsen. In unserem Fall stellt sich speziell die Frage, wie wir den Erwartungswert approximieren können. Bei der Analyse werden wir auf einige Resultate aus Brenner [2] zurückgreifen müssen, da dies sonst den Rahmen dieser Arbeit überschreiten würde.

Auch in diesem Kapitel werden wir ähnliche Bezeichnungen wie in Kapitel 3 verwenden. Dabei sei besonders auf den Quotient von aufeinander folgenden Preisen $\mathcal{R} := (\mathcal{R}_n)_{1 \leq n \leq N} \in \mathcal{L}^0(N-1; \mathbb{R}_{>0}^{M+1})$ wie in (3.2.1), die Menge aller möglichen Aufteilungen \mathcal{A}_1 , wie in (3.2.2) und die Menge aller a posteriori zulässigen Trading Strategien \mathcal{A}_{twr} wie in (3.2.4) verwiesen.

5.1. Growth Optimal Portfolio

Die Konsistenz des Growth Optimal Portfolios (vgl. Kapitel 2.2) wird ebenfalls ausführlich in Brenner [2, Kapitel 5.1.1] untersucht. Seien $N = 1$ und $M \in \mathbb{N}$. Nach Bemerkung 3.2.9 ist eine Lösung des Growth Optimal Portfolio Optimierungsproblems aus (2.2.1) äquivalent zu einer Lösung von

$$\max_{f \in \mathcal{A}_{\text{twr}}} E[\ln(\mathcal{R}_1^T f)]$$

und wir wissen bereits, dass nach Theorem 2.2.3 (bzw. ebenso nach Theorem 3.2.8) eine eindeutige Lösung des Problems existiert. Für das empirische Setup werden wir die Optimierung jedoch nicht auf \mathcal{A}_{twr} , sondern einer beliebigen nicht leeren, konvexen und kompakten Menge $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}_1$ wie in Annahme 3.2.10 betrachten (vgl. Theorem 3.2.15). Außerdem wollen wir die Renditen in der ersten Periode, welche durch die Zufallsvariable \mathcal{R}_1 beschrieben werden, als eine (nicht mehr zufällige) Variable $x \in \mathbb{R}_{>0}^{M+1}$ auffassen. Dazu definieren wir

$$u_{\text{ln}} : \mathbb{R}_{>0}^{M+1} \times \mathcal{A}_1 \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\}, (x, f) \mapsto \begin{cases} \ln(x^T f), & x^T f > 0 \\ -\infty, & \text{sonst} \end{cases}.$$

Diese Funktion ist auf Grund der Oberhalbstetigkeit des natürlichen Logarithmus' oberhalbstetig und sogar stetig auf \mathcal{A}_{twr} . Sei weiter $\{\mathcal{R}_1^{(k)}\}_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Zufallsvektoren, die unabhängig und identisch zu \mathcal{R}_1 verteilt sind. Dann definieren wir für $\omega \in \Omega$ und $f \in \mathcal{A}$ eine Approximation

des Erwartungswertes für $K \in \mathbb{N}$ Auswertungen durch

$$\mathcal{E}^{(K)}(\mathbf{u}_{\ln}(\mathcal{R}_1, f))(\omega) := \mathcal{E}^{(K)}(\mathbf{u}_{\ln}(\mathcal{R}_1(\omega), f)) := \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \mathbf{u}_{\ln}(\mathcal{R}_1^{(k)}(\omega), f)$$

und man kann die fast sichere Konvergenz dieser Approximation, d.h.

$$\arg \max_{f \in \mathcal{A}} \mathcal{E}^{(K)}(\mathbf{u}_{\ln}(\mathcal{R}_1, f)) \xrightarrow{\text{f.s.}} f_{\max}^* \quad \text{für } K \rightarrow \infty$$

zeigen, wobei $f_{\max}^* \in \mathcal{A}$ die eindeutige Lösung des Problems

$$\max_{f \in \mathcal{A}} \mathbf{u}_{\ln \text{TWR}}(f)$$

für $N = 1$ darstellt (vgl. Theorem 3.2.15). Zum Beweis dieser Aussage werden noch verschiedene Voraussetzungen benötigt, die wir jetzt nicht weiter diskutieren wollen. Diese können, wie schon erwähnt, in Brenner [2, Kapitel 5.1.1] nachgelesen werden.

Mit Hilfe dieser Approximation erhalten wir für die empirische Untersuchung das glatte Optimierungsproblem

$$\max_{f \in \mathcal{A}} \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \ln \left((\mathcal{R}_1^{(k)}(\omega))^T f \right),$$

welches sich beispielsweise mit Hilfe eines Inneren-Punkte-Verfahrens numerisch lösen lässt. Als $\{\mathcal{R}_1^{(k)}(\omega)\}_{1 \leq k \leq K}$ könnte man beispielsweise in der Implementierung die Tagesrenditen der vergangenen K Tage verwenden.

5.2. Growth Optimal Trading Strategie

Das Growth Optimal Portfolio stellt die Growth Optimal Trading Strategie eingeschränkt auf eine Periode dar (vgl. Bemerkung 3.2.9). In diesem Abschnitt seien daher $N, M \in \mathbb{N}$ beliebig aber fest. Weiter stellen wir den Quotient von aufeinander folgenden Preisen nicht mehr als Folge aus Zufallsvektoren sondern als eine Zufallsmatrix

$$\left(\mathcal{R} = (\mathcal{R}_1^T, \dots, \mathcal{R}_N^T)^T : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_{>0}^{N \times (M+1)} \right) \in \mathcal{L}^0 \left(N-1, \mathbb{R}_{>0}^{N \times (M+1)} \right) \quad (5.2.1)$$

dar. Dann schreiben wir die Nutzenfunktion aus der Growth Optimal Trading Strategie wieder in Abhängigkeit der unbekannten Renditen $X = (x_1^T, \dots, x_N^T)^T \in \mathbb{R}_{>0}^{N \times (M+1)}$ über N Perioden als

$$\mathbf{u}_{\ln}^{(N)} : \mathbb{R}_{>0}^{N \times (M+1)} \times \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\}, (X, f) \mapsto \begin{cases} \sum_{n=1}^N \ln(x_n^T f), & x_n^T f > 0 \\ -\infty, & \text{sonst} \end{cases}.$$

Damit definieren wir für $\omega \in \Omega$, $f \in \mathcal{A}$ und $K \in \mathbb{N}$

$$\mathcal{E}^{(K)}(\mathbf{u}_{\ln}^{(N)}(\mathcal{R}, f))(\omega) := \mathcal{E}^{(K)}(\mathbf{u}_{\ln}^{(N)}(\mathcal{R}(\omega), f)) := \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \mathbf{u}_{\ln}^{(N)}(\mathcal{R}^{(k)}(\omega), f),$$

wobei $\{\mathcal{R}^{(k)}\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_{>0}^{N \times (M+1)}$ mit $\mathcal{R}^{(k)} = ((\mathcal{R}_1^{(k)})^T, \dots, (\mathcal{R}_N^{(k)})^T)$ als eine Folge von Zufallsmatrizen, die unabhängig und identisch zu \mathcal{R} (vgl. (5.2.1)) verteilt sind, gegeben ist. Dann kann wieder gezeigt werden, dass

$$\arg \max_{f \in \mathcal{A}} \mathcal{E}^{(K)}(\mathbf{u}_{\ln}^{(N)}(\mathcal{R}, f)) \xrightarrow{\text{f.s.}} \arg \max_{f \in \mathcal{A}} \mathbf{u}_{\ln \text{TWR}}(f) \quad \text{für } K \rightarrow \infty$$

konvergiert, wobei wir in Theorem 3.2.15 bereits gezeigt haben, dass der potenzielle Grenzwert eine eindeutige Lösung besitzt. Eine analoge und mathematisch detaillierte Analyse findet sich in Brenner [2, Kapitel 5.2.2].

5.3. Maximum log TWR Optimierungsproblem mit Nebenbedingung

Bis hierhin haben wir lediglich Probleme ohne Nebenbedingung betrachtet. In diesem Abschnitt betrachten wir zuerst die Growth Optimal Trading Strategie mit der DrawDown Nebenbedingung (vgl. Kapitel 3.3). Wir knüpfen dabei in der Notation direkt beim vorherigen Abschnitt 5.2 an und schreiben den DrawDown in Abhängigkeit der unbekanntenen Renditen $X = (x_1^T, \dots, x_N^T)^T \in \mathbb{R}_{>0}^{N \times (M+1)}$ als

$$\begin{aligned} \mathfrak{r}_{\ln}^{(N)} : \mathbb{R}_{\geq 0}^{N \times (M+1)} \times \mathcal{A} &\rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}, \\ (X, f) &\mapsto \begin{cases} \max \left\{ 0, \max_{1 \leq \ell \leq N} \sum_{n=\ell}^N -\ln(x_n^T f) \right\}, & x_n^T f > 0 \\ +\infty, & \text{sonst} \end{cases} \end{aligned}$$

Um diese Funktion in das Optimierungsproblem einzubauen, beschränken wir den zulässigen Bereich der Lösungen für ein vorgegebenes $r \geq 0$ auf alle möglichen Aufteilungen $f \in \mathcal{A}$, für die

$$\mathcal{E}_\ell^{(K)}(\mathcal{R}, f)(\omega) := \mathcal{E}_\ell^{(K)}(\mathcal{R}(\omega), f) := -\frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \sum_{n=\ell}^N \ln \left((\mathcal{R}_n^{(k)})^T(\omega) f \right) \leq r$$

für alle $\ell = 1, \dots, N$ erfüllt ist. Denn ist diese Voraussetzung für alle $\ell = 1, \dots, N$ erfüllt, dann gilt die Aussage insbesondere für das Maximum dieser Summen, also für $\mathfrak{r}_{\ln}^{(N)}$. Damit erhalten wir für den DrawDown insgesamt N glatte Nebenbedingungen. Mit

$$\mathcal{A}_\omega^{(K)}(r) := \left\{ f \in \mathcal{A} \mid \mathcal{E}^{(K)}(\mathfrak{r}_{\ln}^{(N)}(\mathcal{R}, f))(\omega) \leq r \right\} := \left\{ f \in \mathcal{A} \mid \mathcal{E}_\ell^{(K)}(\mathcal{R}, f)(\omega) \leq r, \forall \ell = 1, \dots, N \right\}$$

erhalten wir schließlich

$$\arg \max_{f \in \mathcal{A}_\omega^{(K)}(r)} \mathcal{E}^{(K)}(\mathfrak{u}_{\ln}^{(N)}(\mathcal{R}, f)) \xrightarrow{\text{f.s.}} f_{\max}^* \quad \text{für } K \rightarrow \infty,$$

wobei f_{\max}^* die eindeutige Lösung des Problems

$$\begin{aligned} &\max_{f \in \mathcal{A}} \mathfrak{u}_{\ln \text{TWR}}(f) \\ &\text{s.t. } \mathfrak{r}_{\text{draw-down}}(f) \leq r \end{aligned}$$

aus Theorem 3.3.6 widerspiegelt. Wieder findet sich eine analoge und mathematisch detaillierte Analyse in Brenner [2, Kapitel 5.2.2].

In Kapitel 4 haben wir den RunDown kennengelernt und mit Theorem 4.2.1 die eindeutige Existenz des theoretischen Optimierungsproblems nachgewiesen. Bei der Analyse der Konsistenz können wir analog zum DrawDown vorgehen. Dies wollen wir in diesem Rahmen nicht genauer untersuchen, da dieses Kapitel lediglich die Idee des empirischen Optimierungsproblems beschreiben und auf die empirischen Untersuchungen in Kapitel 6 vorbereiten soll.

6. Empirische Untersuchungen

Dieses Kapitel dient zur praktischen Untersuchung der theoretischen Trading Strategien, die wir in den vorherigen Kapiteln entwickelt haben. Dabei verwenden wir den Kursverlauf verschiedener Aktien über die vergangenen fast 20 Jahre und testen rückwirkend, wie sich unser Kapital über die Jahre verändert hätte, falls wir beispielsweise die Growth Optimal Trading Strategie (vgl. Kapitel 3.2) angewendet hätten. Dabei ist zu beachten, dass in der Optimierung nur die zu dem Optimierungszeitpunkt bekannten Daten verwendet werden („survivorship free backtesting“).

In Kapitel 5 haben wir untersucht, wie wir eine Lösung der Optimierungsprobleme approximieren können. Im Folgenden werden wir auf die Notation aus diesem Kapitel zurückgreifen.

6.1. Einführung POEM

Zur Optimierung verwenden wir die Umgebung „Portfolio Optimization Environment for Mathematicians“ kurz POEM. Diese wurde speziell für den Backtest von Portfolios und Trading Strategien entwickelt und wird genauer in Brenner [2] vorgestellt.

Bevor wir mit den empirischen Untersuchungen starten, wollen wir POEM etwas genauer untersuchen. Auf der grafischen Oberfläche können wir neben Start- und Enddatum der Optimierung auch ein Anfangskapital eingeben. Wenn nicht anders angegeben, starten wir die Optimierung am ersten Oktober 2003, enden am ersten Oktober 2020 und verwenden ein Startkapital von einer Millionen (Einheit je nach gewähltem Index), d.h. $\mathcal{W}_0 = 1.000.000$ (vgl. Def. 3.1.4).

Weiter geben wir an, in welchen Abständen eine neue Optimierung stattfinden soll und wie viele vergangene Tagesrenditen wir als Daten für die Approximation des Erwartungswertes (vgl. Kapitel 5) verwenden. Die Anzahl dieser Tagesrenditen entspricht der Wahl von $K \in \mathbb{N}$ aus Kapitel 5. Wir können auch alle vorhandenen Tagesrenditen verwenden, doch damit erweisen sich die Probleme als sehr rechenintensiv und der Nutzen überwiegt dabei leider nicht. Als Richtwert werden wir meistens jedes Jahr eine Optimierung durchführen und dabei die Tagesrenditen der letzten $K = 150$ Handelstage (Montag bis Freitag) verwenden.

Natürlich müssen wir noch einen Index wählen, aus dem wir die Aktien zur Optimierung erhalten. Dann entspricht $M \in \mathbb{N}$ die Anzahl der in dem Index enthaltenen Aktien. Weiter haben wir die Möglichkeit ein MoneyManagement zu wählen, was der Auswahl einer Trading Strategie entspricht. Zu dieser müssen wir noch - je nach gewähltem MoneyManagement - verschiedene Parameter eingeben. Beispielsweise haben wir die Möglichkeit, die Menge am im Markt investiertem Kapital zu begrenzen. In unserem Modell aus Kapitel 5 würde dies der Einschränkung

$$\sum_{i=1}^M f_i = Q$$

entsprechen, wobei $Q \in [0, 1]$ gewählt werden kann. Dann gilt insbesondere für die risikofreie Anlage $f_0 = 1 - Q$. Als Standardeinstellung werden wir hier die Wahl $Q = 1$ verwenden. Weiter können wir die einzelnen Anlagen beschränken, indem wir vorgeben, dass zum Beispiel nicht

mehr als fünfzig Prozent in eine Aktie investiert werden darf. Ist nichts anderes angegeben, bewegt sich dieser Anteil zwischen 0 und 0.5, d.h. es gilt $0 \leq f_i \leq 0.5$ für alle $i \in \{1, \dots, M\}$ (vgl. Bsp. 3.2.11). Insbesondere lassen wir wegen der Nicht-Negativität keine Short-Positionen zu.

Um diese Einschränkungen in das Modell einzubauen, wird lediglich der Bereich der Lösungen ähnlich zu Kapitel 5.3 eingeschränkt. Wie schon in Kapitel 5 angemerkt, löst die Implementierung das Problem numerisch. Dazu verwendet es ein Innere-Punkte-Verfahren zur Berechnung der Lösung des glatten Problems, welches die optimale Lösung approximiert.

6.2. Statistische Kennzahlen

Um die verschiedenen Investments zu vergleichen, benötigen wir statistische Kennzahlen, und um die Angabe dieser Werte transparent zu machen, möchten wir kurz die verwendeten Formeln angeben, mit denen diese Kennzahlen berechnet wurden. Seien $M, L \in \mathbb{N}$ gegeben, wobei L der Gesamtzahl aller Handelstage im Testzeitraum entspricht.

Wie schon in der Einführung zu POEM (vgl. Kapitel 6.1) beschrieben, ist zu beachten, dass eine Periode einem Handelstag entspricht. Darüber hinaus notieren wir die aus der Optimierung resultierende Kapitalentwicklung mit $\mathcal{W} = (\mathcal{W}_\ell)_{0 \leq \ell \leq L}$. Dabei ist zu beachten, dass wir einmal im Jahr optimieren und reallokieren. Außerdem werden die Transaktionskosten vernachlässigt (im Folgenden gilt immer $L = 4255$).

Als erste Kennzahl verwenden wir den Terminal Wealth Relative (TWR) für die obige Kapitalentwicklung (vgl. Def. 3.2.4), d.h.

$$\text{TWR} = \text{TWR}_L = \frac{\mathcal{W}_L}{\mathcal{W}_0}.$$

Weiter erhalten wir den Ertrag in Periode $\ell \in \{1, \dots, L\}$ durch

$$\mu_\ell = \frac{\mathcal{W}_\ell - \mathcal{W}_{\ell-1}}{\mathcal{W}_{\ell-1}}$$

und den durchschnittlichen Ertrag pro Handelstag mit

$$\bar{\mu} = \frac{1}{L} \sum_{\ell=1}^L \mu_\ell.$$

Damit ist die durchschnittliche Standardabweichung pro Handelstag gegeben durch

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{L-1} \sum_{\ell=1}^L (\mu_\ell - \bar{\mu})^2}.$$

Wir werden im Folgenden jedoch den durchschnittlichen Ertrag sowie die durchschnittliche Standardabweichung pro Handelstag annualisieren, d.h.

$$\bar{\mu}_{\text{ann}} = 250 \cdot \bar{\mu} \quad \text{und} \quad \sigma_{\text{ann}} = \sqrt{250} \cdot \sigma.$$

Dabei ist 250 die durchschnittliche Zahl an Handelstagen im Jahr. Eine weitere in der Betriebswirtschaft gern verwendete Kennzahl ist die *Sharpe-Ratio* (SR), welche das Verhältnis des

annualisierten durchschnittlichen Ertrags minus des risikofreien Zins zur annualisierten durchschnittlichen Standardabweichung darstellt. Mit der Annahme, der risikofreie Zins sei gleich Null, ist diese durch die Formel

$$\text{SR} = \frac{\bar{\mu}_{\text{ann}}}{\sigma_{\text{ann}}}$$

gegeben. Da wir uns in dieser Arbeit viel mit dem DrawDown auseinandergesetzt haben, möchten wir eine ähnliche Kennzahl definieren, die uns das Verhältnis zwischen Ertrag und DrawDown angibt. Sei dazu der relative DrawDown am Ende der n -ten Periode $(\mathcal{D}_{\text{rel}})_n(\mathcal{W}) \in [0, 1)$ für $n = 1, \dots, L$ wie in Def. 3.3.1 gegeben. Dann erhalten wir den durchschnittlichen relativen DrawDown über L Perioden mit

$$\overline{\mathcal{D}_{\text{rel}}}(\mathcal{W}) = \frac{1}{L} \sum_{\ell=1}^L (\mathcal{D}_{\text{rel}})_{\ell}(\mathcal{W}).$$

Sei weiter $J \in \mathbb{N}$ die Anzahl der investierten Jahre (im Folgenden gilt immer $J = 17$). Dann ist der *geometric Return over DrawDown* (gRoDD) schließlich definiert durch

$$\text{gRoDD} = \frac{(\text{TWR})^{\frac{1}{J}} - 1}{\overline{\mathcal{D}_{\text{rel}}}(\mathcal{W})}.$$

Mit diesen Kennzahlen können wir mit den empirischen Untersuchungen beginnen und die verschiedenen Trading Strategien vergleichen.

6.3. Growth Optimal Portfolio

In einem ersten Ansatz untersuchen wir das Growth Optimal Portfolio (vgl. Kapitel 2.2). Dazu verwenden wir das MoneyManagement *MaxTWR*, welches uns das Growth Optimal Portfolio (GOP) wiedergibt, und vergleichen dies mit dem MoneyManagement *EqualWeight* (EW). Beim *EqualWeight* wird in jede Aktie dieselbe Menge an Geld investiert, d.h. wenn wir in $M \in \mathbb{N}$ Aktien investieren wollen, so investieren wir in jede Aktie den Anteil $1/M$ von unserem Kapital und reallokieren das Portfolio zum Optimierungszeitpunkt, sodass jeweils wieder der Anteil $1/M$ des Kapitals investiert wird.

	DAX		Nasdaq		Dow Jones		STOXX Sectors	
	EW	GOP	EW	GOP	EW	GOP	EW	GOP
TWR	2.44	3.05	6.13	5.94	2.65	3.6	2.03	1.18
$\bar{\mu}_{\text{ann}}$	0.074	0.127	0.13	0.17	0.075	0.105	0.058	0.03
σ_{ann} [%]	20.6	36.8	21.2	36	18.7	24.1	18.5	20.4
SR	0.36	0.35	0.61	0.47	0.4	0.43	0.31	0.15
$\overline{\mathcal{D}_{\text{rel}}}$ [%]	16.3	40.8	7.7	29.5	10.4	20.6	15.4	28.6
gRoDD	0.33	0.17	1.46	0.38	0.56	0.38	0.28	0.03

Tabelle 6.1.: Statistische Kennzahlen zu den Kapitalentwicklungen aus Abbildung 6.1

In Abbildung 6.1 sehen wir das Growth Optimal Portfolio angewendet auf den deutschen Aktienindex (DAX), Nasdaq 100 (Nasdaq), Dow Jones und STOXX Indices (STOXX Sectors). Der große Sprung des Growth Optimal Portfolios im DAX um 2008 ist ein Resultat des starken Anstiegs und darauf folgenden Absturzes der Volkswagen St. Aktie, da der Algorithmus 50 Prozent unseres Kapitals in diese investiert hat.

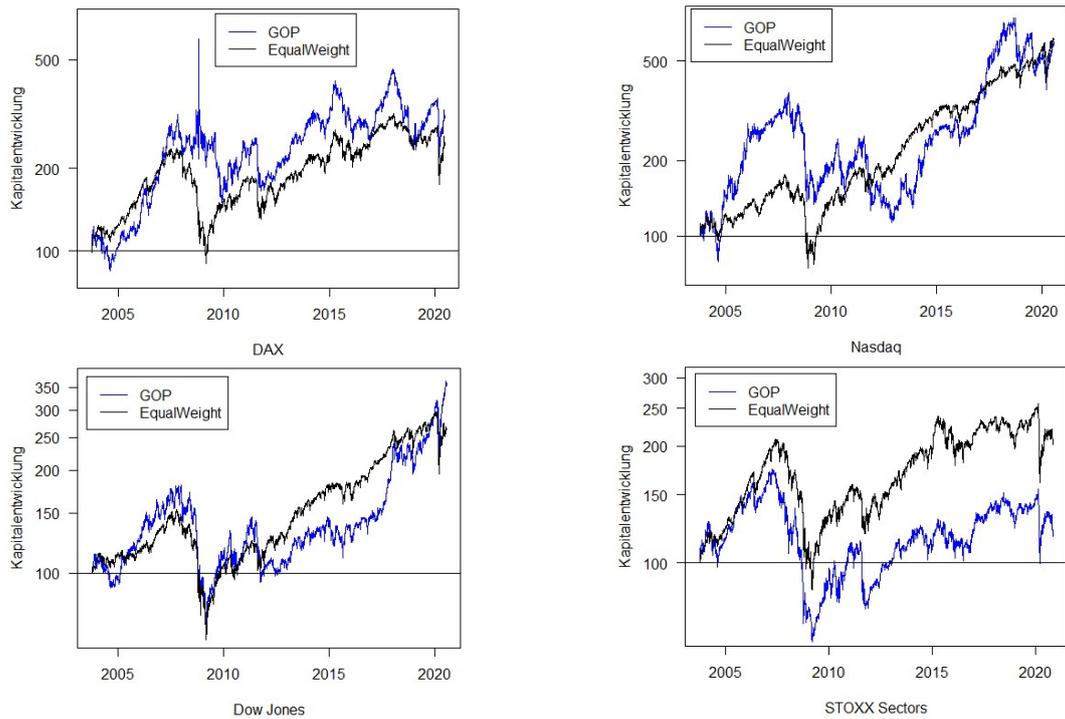


Abbildung 6.1.: Growth Optimal Portfolio und *EqualWeight* auf verschiedenen Indices

Unabhängig davon erkennen wir, dass wir mit dem Growth Optimal Portfolio beim DAX besser performen als der *EqualWeight*. Dies klingt einfacher, als es in der Praxis ist, wie uns ein Blick auf die anderen Indices verrät. Besonders beim Nasdaq ab dem Jahr 2016 erkennen wir das große Potential des Growth Optimal Portfolios auf einen schnellen Kursgewinn.

In den obigen Optimierungen haben wir die Einschränkung $0 \leq f_i \leq 0.5$ für alle $i = 1, \dots, M$ verwendet, was in vielen Fällen dazu führt, dass die Optimierung nur in zwei Aktien investiert. Dies entspricht keinem diversifiziertem Portfolio und sollte daher in der Praxis auf Grund eines hohen Einzelaktienrisikos nicht umgesetzt werden. Dies erkennt man auch an den Kennzahlen in Tabelle 6.1 und besonders beim *geometric Return over DrawDown* (gRoDD) sowie bei der *Sharpe-Ratio* (SR).

Abbildung 6.2 zeigt das Growth Optimal Portfolio mit der Einschränkung $0 \leq f_i \leq b$ für alle $i = 1, \dots, M$ mit unterschiedlicher Wahl von b . Da im Nasdaq $M=100$ Aktien enthalten sind, können wir dort ein deutlich kleineres b als beim DAX ($M=30$) verwenden und gleichzeitig die Bedingung

$$\sum_{i=1}^M f_i = 1$$

erfüllen. Besonders beim DAX erkennen wir mit dieser Einschränkung ein sehr gutes Ergebnis, da wir zu jedem Zeitpunkt im Optimierungszeitraum über dem *EqualWeight* liegen. Vergleichen wir Tabelle 6.1 mit Tabelle 6.2, so erkennen wir auch eine deutliche Verbesserung der Kennzahlen.

Nun möchten wir nicht nur besser performen als der *EqualWeight*, sondern durch eine hohe Diversifizierung und eine niedrige Standardabweichung das Risiko des Portfolios verkleinern. Dazu

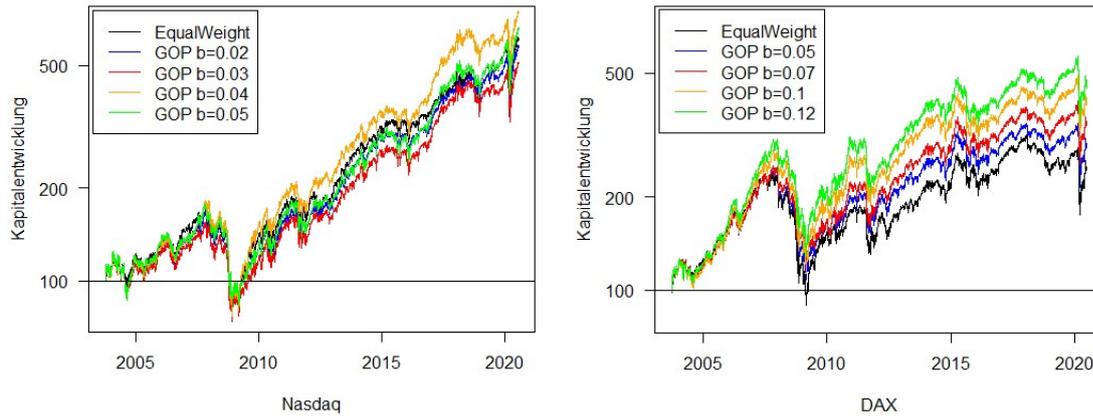


Abbildung 6.2.: Growth Optimal Portfolio und *EqualWeight* auf verschiedenen Indices mit $0 \leq f_i \leq b$ für alle $i = 1, \dots, M$

	Nasdaq				
	EW	GOP b=0.02	GOP b=0.03	GOP b=0.04	GOP b=0.05
TWR	6.13	5.79	5.12	7.5	6.62
$\bar{\mu}_{\text{ann}}$	0.13	0.127	0.121	0.147	0.139
σ_{ann} [%]	21.2	21.3	22.1	23.6	23.2
SR	0.61	0.59	0.55	0.62	0.6
$\overline{\mathcal{D}}_{\text{rel}}$ [%]	7.7	8.4	9.3	8.8	10
gRoDD	1.46	1.3	1.09	1.43	1.18
	DAX				
	EW	GOP b=0.05	GOP b=0.07	GOP b=0.1	GOP b=0.12
TWR	2.44	2.88	3.38	3.93	4.47
$\bar{\mu}_{\text{ann}}$	0.074	0.082	0.091	0.103	0.112
σ_{ann} [%]	20.6	19.7	19.8	21.4	21.8
SR	0.36	0.41	0.46	0.48	0.51
$\overline{\mathcal{D}}_{\text{rel}}$ [%]	16.3	13.1	12.3	12.6	12
gRoDD	0.33	0.49	0.61	0.67	0.77

Tabelle 6.2.: Statistische Kennzahlen zu den Kapitalentwicklungen aus Abbildung 6.2

erkennen wir in Abbildung 6.3 zwei Säulendiagramme, welche uns anzeigen, in wie viele der 100 Aktien des Nasdaq's die Optimierung investiert hat und wie sich die Standardabweichung in Abhängigkeit von b im Vergleich zum *EqualWeight* (EW) verändert.

Wie schon erwartet, wird unser Portfolio für kleines b deutlich diversifizierter und die Standardabweichung sinkt. Dabei erhalten wir für $b = 0.02$ fast dieselbe Standardabweichung wie beim *EqualWeight*. Leider erhalten wir beim Nasdaq für dieses b ein leicht schlechteres Ergebnis als beim *EqualWeight*.

6.4. Growth Optimal Trading Strategie

Im nächsten Schritt möchten wir das Growth Optimal Portfolio zu einer Growth Optimal Trading Strategie auf $N \in \mathbb{N}$ Perioden erweitern (vgl. Kapitel 3.2), wobei hier eine Periode einem Handelstag entspricht. Insbesondere verwendet dies im Gegensatz zum Growth Optimal Portfolio, welches das Ein-Perioden-Finanzmarktmodell verwendet (vgl. Def. 2.1.1), das Mehr-Perioden-Finanzmarktmodell (vgl. Def. 3.1.2). Für die empirischen Untersuchungen verwenden wir in

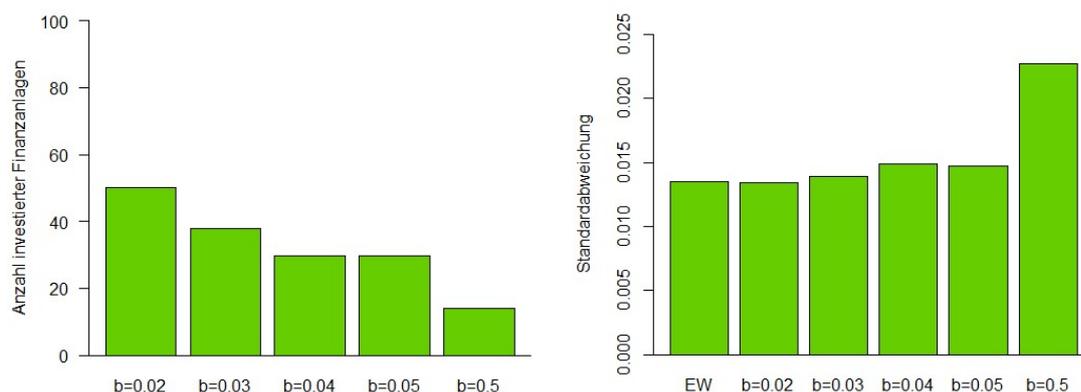


Abbildung 6.3.: Durchschnittliche Anzahl investierter Aktien und Standardabweichung der Tagesrenditen beim Growth Optimal Portfolio auf dem Nasdaq mit $0 \leq f_i \leq b$ für alle $i = 1, \dots, M$

POEM das MoneyManagement *MaximizeMeanPeriodicalLnReturn*, wobei wir im Folgenden die Abkürzung *GOTS* (Growth Optimal Trading Strategie) verwenden werden.

Wir haben zwar für das Growth Optimal Portfolio in Abbildung 6.2 gesehen, dass die Einschränkung $0 \leq f_i \leq b$ für kleines b sinnvoll ist, aber wir werden im Folgenden ein etwas größeres b betrachten, da sonst der Unterschied zwischen verschiedenen $N \in \mathbb{N}$ verschwindend gering ist.

	DAX, b=0.1			Nasdaq, b=0.1		
	EW	GOTS N=50	GOTS N=100	EW	GOTS N=50	GOTS N=100
TWR	2.44	3.65	3.65	6.13	6.14	9.28
$\bar{\mu}_{\text{ann}}$	0.074	0.098	0.097	0.13	0.142	0.162
σ_{ann} [%]	20.6	21	20.5	21.2	26.2	24.7
SR	0.36	0.47	0.47	0.61	0.54	0.66
$\overline{\mathcal{D}}_{\text{rel}}$ [%]	16.3	13.6	11.3	7.7	16.1	15.1
gRoDD	0.33	0.58	0.7	1.46	0.7	0.93
	Dow Jones, b=0.1			STOXX Sectors, b=0.2		
	EW	GOTS N=50	GOTS N=100	EW	GOTS N=50	GOTS N=100
TWR	2.64	4.07	2.94	2.03	1.63	2.13
$\bar{\mu}_{\text{ann}}$	0.075	0.101	0.081	0.058	0.045	0.06
σ_{ann} [%]	18.7	19	18.4	18.5	18.3	18.2
SR	0.4	0.53	0.44	0.31	0.24	0.33
$\overline{\mathcal{D}}_{\text{rel}}$ [%]	10.5	9.6	13.5	15.4	22.9	17.2
gRoDD	0.56	0.9	0.49	0.28	0.13	0.26

Tabelle 6.3.: Statistische Kennzahlen zu den Kapitalentwicklungen aus Abbildung 6.4

Abbildung 6.4 zeigt die Growth Optimal Trading Strategie auf verschiedenen Indices mit Anzahl der Perioden $N \in \{50, 100\}$. Das Ergebnis ist durchaus gemischt und wir erkennen, dass die optimale Wahl der Parameter für jeden Index unterschiedlich sein kann. Beispielsweise verläuft die Growth Optimal Trading Strategie mit $N = 50$ beim Dow Jones fast immer über dem *EqualWeight*, wohingegen für dieselbe Wahl von N das Ergebnis beim STOXX Sector schlechter ausfällt.

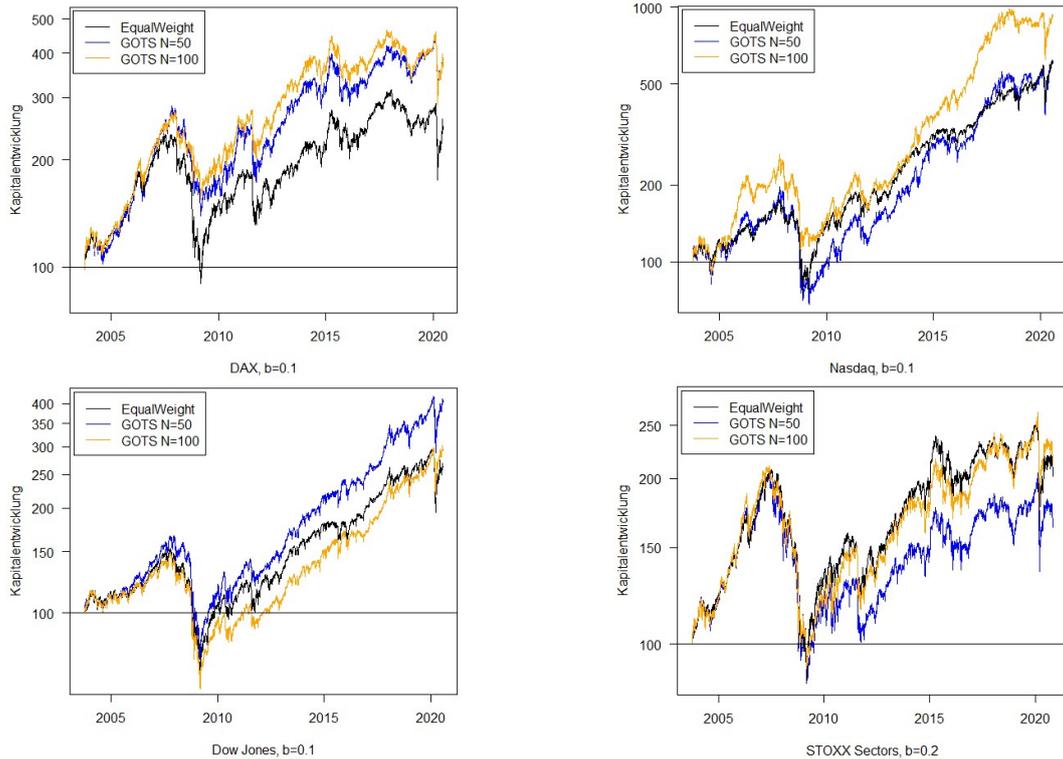


Abbildung 6.4.: Growth Optimal Trading Strategie und *EqualWeight* auf verschiedenen Indices mit $N \in \{50, 100\}$ und $0 \leq f_i \leq b$ für alle $i = 1, \dots, M$

Da sich diese Entwicklung aber im Wesentlichen nicht von der des Growth Optimal Portfolios unterscheidet, springen wir direkt zur Analyse der Growth Optimal Trading Strategie mit Nebenbedingung.

6.5. Growth Optimal Trading Strategie mit Nebenbedingung

In diesem Abschnitt betrachten wir nun die Growth Optimal Trading Strategie mit RunDown- und DrawDown-Nebenbedingung (vgl. Theorem 4.2.1). Wir vermuten, dass dadurch das Risiko zurück geschraubt wird und wir eine Lösung mit vermutlich geringerer Standardabweichung und geringerem DrawDown erhalten. Dazu verwenden wir $N = 50$ und das MoneyManagement *MaximizePeriodicLnReturnRunDownDrawDown*. Bei diesem MoneyManagement gibt es die Möglichkeit ein $\lambda \in [0, 1]$ zu wählen, um damit die Risikofunktion

$$\mathbf{r}_\lambda(f) := \lambda \cdot \mathbf{r}_{\text{run-down}}(f) + (1 - \lambda) \cdot \mathbf{r}_{\text{draw-down}}(f)$$

zu definieren. Darüber hinaus müssen wir ein $r_\lambda \geq 0$ vorgeben, durch das wir die Funktion \mathbf{r}_λ beschränken. Wenn wir eine reine DrawDown-Nebenbedingung (DD) verwenden möchten, müssen wir die Wahl $\lambda = 0$ treffen und analog $\lambda = 1$ für den RunDown (RD). Außerdem wählen wir in der Optimierung für Abbildung 6.5 $r_0 := 0.1$ und $r_1 := 0.04$.

Auf Grund zu hoher Ungenauigkeiten in der Berechnung und zu langer Laufzeit müssen wir uns hier auf die Indices DAX und STOXX Sectors beschränken. Eine Erklärung dazu findet sich in Kapitel 6.6. In Abbildung 6.5 erkennen wir die Growth Optimal Trading Strategie mit DrawDown- bzw. RunDown-Nebenbedingung in Vergleich zum *EqualWeight* und der Growth Optimal Trading Strategie ohne Nebenbedingung. Tatsächlich erhalten wir auf beiden Indices mit der RunDown-Nebenbedingung einen besseren Ertrag als ohne Nebenbedingung.

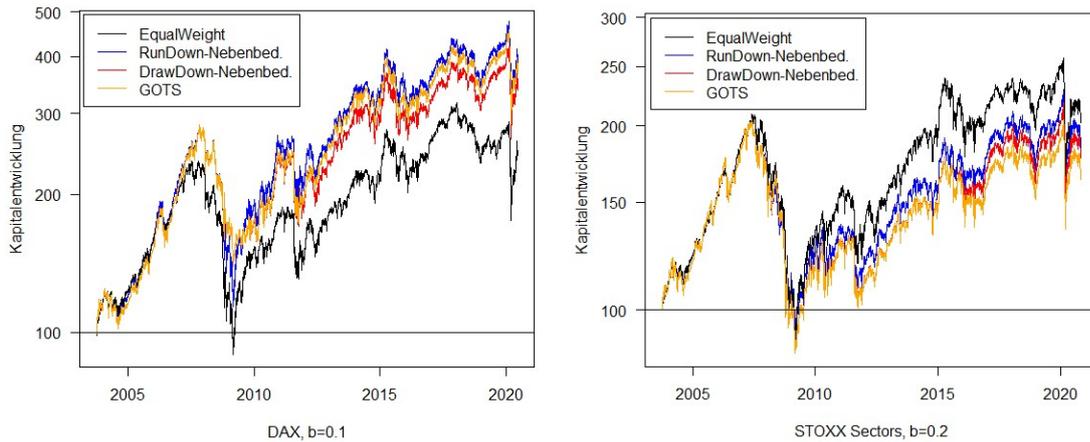


Abbildung 6.5.: Growth Optimal Trading Strategie mit und ohne Nebenbedingung, sowie *Equal-Weight* auf verschiedenen Indices mit $N = 50$ und $0 \leq f_i \leq b$ für alle $i = 1, \dots, M$

	DAX				STOXX Sectors			
	EW	RD-Neb.	DD-Neb.	GOTS	EW	RD-Neb.	DD-Neb.	GOTS
TWR	2.44	3.81	3.38	3.65	2.03	1.84	1.78	1.63
$\bar{\mu}_{\text{ann}}$	0.074	0.102	0.094	0.098	0.058	0.051	0.05	0.045
σ_{ann} [%]	20.6	21.6	21.3	21	18.5	17.9	18.2	18.3
SR	0.36	0.47	0.44	0.47	0.31	0.28	0.27	0.24
\bar{D}_{rel} [%]	16.3	12.5	14.1	13.6	15.4	19.1	21.6	22.9
gRoDD	0.33	0.65	0.53	0.58	0.28	0.19	0.16	0.13

Tabelle 6.4.: Statistische Kennzahlen zu den Kapitalentwicklungen aus Abbildung 6.5

Wie in Tabelle 6.4 zu erkennen, bleibt die Standardabweichung trotz Nebenbedingung kaum verändert. Es ist jedoch sehr interessant, dass wir durch die RunDown-Nebenbedingung einen kleineren durchschnittlichen relativen DrawDown erhalten, als mit der DrawDown-Nebenbedingung. Darüber hinaus erhalten wir auf beiden Indices durch die RunDown-Nebenbedingung einen höheren Ertrag wie ohne bzw. mit DrawDown-Nebenbedingung.

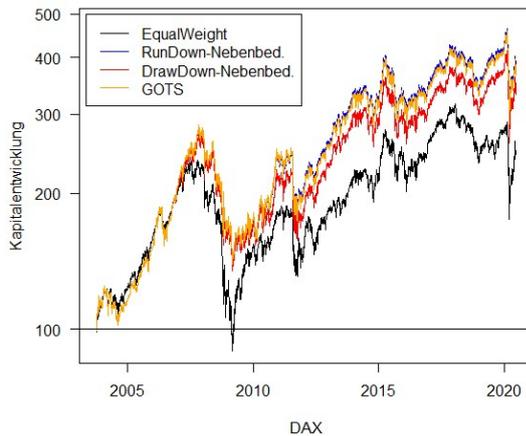
In der obigen Optimierung zu Abbildung 6.5 und Tabelle 6.4 haben wir $r_\lambda \geq 0$ am Anfang vorgegeben und dieser Wert blieb über den gesamten Optimierungszeitraum gleich. Diese statistische Wahl können wir lösen, indem wir

$$r_\lambda = \tau_\lambda(\tilde{f}) \quad (6.5.1)$$

wählen, wobei $\tilde{f} := (1/M, \dots, 1/M)$ der Aufteilung des *EqualWeights* entspricht, d.h. wir möchten das Risiko immer durch das Risiko des *EqualWeights* beschränken.

In Abbildung 6.6 haben wir die Einschränkung aus (6.5.1) verwendet und erkennen, dass die RunDown-Nebenbedingung etwas schlechter als vorher (vgl. Abbildung 6.5) und sehr nah an der Growth Optimal Trading Strategie ohne Nebenbedingung verläuft. Leider können wir diese Optimierung nicht auf dem STOXX Sector durchführen, da dort das Optimierungsproblem zu instabil ist und daraus Ungenauigkeiten in der Berechnung folgen.

An diesem Beispiel haben wir schon gesehen, dass sich die verschiedenen Optimierungen nur minimal unterscheiden. Dies liegt zum Großteil an der Einschränkung $0 \leq f_i \leq b$ für alle



	DAX			
	EW	RD-Neb.	DD-Neb.	GOTS
TWR	2.44	3.71	3.32	3.65
$\bar{\mu}_{\text{ann}}$	0.074	0.099	0.092	0.098
σ_{ann} [%]	20.6	20.8	20.6	21
SR	0.36	0.47	0.44	0.47
$\overline{\mathcal{D}}_{\text{rel}}$ [%]	16.3	13.4	14.5	13.6
gRoDD	0.33	0.6	0.51	0.58

Abbildung 6.6.: Growth Optimal Trading Strategie mit und ohne Nebenbedingung, sowie *Equal-Weight* auf dem DAX mit $N = 50$ und $0 \leq f_i \leq 0.1$ für alle $i = 1, \dots, M$ und $r_\lambda := \mathfrak{t}_\lambda(\tilde{f})$ (vgl. (6.5.1))

$i = 1, \dots, M$ für beispielsweise $b = 0.1$. Dadurch wird zwar eine gewisse Diversifizierung erreicht, was auch wichtig für ein reales Portfolio ist, aber es verringert auch den Spielraum der Optimierung. Bei der Wahl $\lambda \in (0, 1)$ können wir ebenfalls ein solches Phänomen feststellen. Für die Wahl $\lambda \in \{0.25, 0.5, 0.75\}$ lassen sich die Kapitalentwicklungen der zugehörigen Trading Strategien grafisch und numerisch kaum unterscheiden, weshalb wir in diesem Rahmen darauf verzichten.

6.6. Reflektion und Kritik der Analysen

In diesem Abschnitt möchten wir kurz einige Punkte ansprechen, die in Bezug auf die praktische Umsetzung der Theorie rund um wachstumsoptimale Portfolios beachtet werden sollten.

Wie schon in der Einführung zu POEM (Kapitel 6.1) beschrieben, werden die Optimierungsprobleme als differenzierbares Problem dargestellt und gelöst. In der Umsetzung hat sich - vor allem bei den Problemen mit Nebenbedingung - herausgestellt, dass diese Probleme für verschiedene Parameter numerisch sehr instabil sind und dadurch die Genauigkeit der Lösung reduziert wird.

Natürlich sollte dieses Kapitel nur einen Einblick in die praktische Performance der wachstumsoptimalen Portfolios bieten und die Chancen sowie die Risiken darstellen. Für eine reale Investition am Finanzmarkt würde ich eventuell eine vorangegangene numerische Stabilitätsanalyse, eine höhere Rechenleistung und eine detaillierte Analyse der Parameter in Abhängigkeit des gewählten Indices empfehlen. Darüber hinaus wäre es denkbar, die Finanzanlagen vor der Optimierung durch eine Fundamentalanalyse zu filtern und Ausstiegs- sowie Einstiegssignale aus dem Finanzmarkt zu generieren.

7. Schlussbetrachtung

Zusammenfassend haben wir gesehen, dass Optimierungsprobleme mit Log Risiko- und Nutzenfunktionen das schnellstmögliche kumulierte Wachstum des Kapitals erreichen wollen und dadurch ein großes Potential bergen. Wie schon in der Einleitung beschrieben, entsteht in der Portfolio Optimierung immer ein Trade-Off zwischen Risiko und Nutzen und wir können festhalten, dass dieses große Potential mit einem großen Risiko einhergeht.

Dieses Risiko sollte aber nicht zu einer strikten Ablehnung dieser Trading Strategien führen, sondern eher motivieren, durch geschicktes Kombinieren verschiedener Handelsstrategien, das Risiko weiter zu begrenzen. In dem Rahmen dieser Arbeit haben wir eine fraktionale Trading Strategie gesucht, d.h. unser Ziel war es eine Aufteilung unseres Kapitals zu finden, die den optimalen Ertrag verspricht. Dies könnte man zum Beispiel mit einer Trendfolgestrategie verknüpfen, durch die wir Ein- und Ausstiegssignale für das Investment erhalten.

Weiter haben wir im Kapitel 6 gesehen, dass dieselben Einstellungen auf verschiedenen Indices eine unterschiedliche Performance aufweisen und die Auswahl der optimalen Parameter durch die Vielzahl von möglichen Kombinationen kaum manuell auffindbar sind. Eine weitere Möglichkeit ist es, durch maschinelles Lernen eine Optimierung über die Eingabeparameter durchzuführen, um dadurch das Ergebnis zu verbessern und das Risiko weiter zu verringern (vgl. Windmann [17]).

Darüber hinaus haben wir in der Betrachtung die Transaktionskosten, welche beim Kauf und Verkauf von Aktien gezahlt werden müssen, vollkommen vernachlässigt. Natürlich müssen diese in der Praxis berücksichtigt werden und sollten in solchen Optimierungen als Teil der Zielfunktion bzw. zumindest als Nebenbedingung eingebunden werden.

Wir haben also mit dieser Arbeit den theoretischen Grundstein für eine umsetzbare Optimierung von wachstumsoptimalen Portfolios mit Log Risiko- und Nutzenfunktionen gelegt und die Chancen sowie die Risiken dieser Trading Strategie kennengelernt.

A. Anhang

A.1. Konvexe Analysis

Dieses Kapitel dient als eine Zusammenfassung der Ergebnisse aus der konvexen Analysis. Als Literatur ist Rockafellar [13] sehr zu empfehlen. Sei im Folgenden $X \subset \mathbb{R}^n$ mit $n \in \mathbb{N}$ eine konvexe, nicht leere Menge, d.h. für alle $x, y \in X$ und $\lambda \in [0, 1]$ gilt

$$\lambda x + (1 - \lambda)y \in X.$$

Betrachten wir uns zuerst einige wichtige Definitionen.

Definition A.1.1 (Proper Konvexe und Konkave Funktionen). Wir nennen eine Funktion $f : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ proper konvex, falls die Domain

$$\text{dom}(f) := \{x \in X \mid f(x) < \infty\}$$

nicht leer und f konvex ist, d.h. für $x, y \in X$ und $\lambda \in (0, 1)$ gilt

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y).$$

Die Funktion f heißt streng (proper) konvex, falls zusätzlich für $x, y \in X$ mit $x \neq y$ und $\lambda \in (0, 1)$ die strenge Ungleichung

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) < \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$$

erfüllt ist. Analog nennen wir $g : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ proper konkav, falls $-g$ proper konvex ist und streng konkav, falls $-g$ streng konvex ist.

Definition A.1.2 (Abschluss einer Funktion). Wir nennen eine proper konvexe Funktion $f : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ abgeschlossen, falls der Epigraph von f

$$\text{epi}(f) := \{(x, y) \in X \times \mathbb{R} \mid f(x) \leq y\}$$

abgeschlossen ist. Analog nennen wir eine proper konkave Funktion $f : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ abgeschlossen, falls der Epigraph von $-f$ abgeschlossen ist.

Definition A.1.3 (Halbstetigkeit). Eine Funktion $f : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ ist unterhalbstetig, falls für alle $x_0 \in X$ die Bedingung

$$f(x_0) \leq \liminf_{y \rightarrow x_0} f(y)$$

erfüllt ist. Analog heißt f oberhalbstetig, falls für alle $x_0 \in X$ gilt

$$f(x_0) \geq \limsup_{y \rightarrow x_0} f(y).$$

Insbesondere erkennen wir, dass eine sowohl ober- als auch unterhalbstetige Funktion stetig ist. Das folgende Theorem stellt eine zentrale Aussage der konvexen Analysis dar.

Theorem A.1.4. Sei $f : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ proper konvex. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

1. f ist unterhalbstetig
2. der Epigraph von f ist abgeschlossen, d.h. f ist abgeschlossen, proper konvex
3. die Menge $\{x \in X \mid f(x) \leq \alpha\}$ ist abgeschlossen für alle $\alpha \in \mathbb{R}$.

Beweis. Siehe Rockafellar [13, Theorem 4.6, Theorem 7.1]. □

Mit Hilfe von Theorem A.1.4 erhalten wir eine analoge Aussage auch für proper konkave Funktionen f . Dazu müssen wir lediglich $-f$ betrachten. Wir schließen dieses Kapitel mit einem Theorem über die Existenz von Lösungen.

Theorem A.1.5 (Existenz einer Lösung). Sei $M \subset X$ kompakt, $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ unterhalbstetig und $g : X \rightarrow \mathbb{R}$ oberhalbstetig. Dann nimmt f auf M ein globales Minimum und g auf M ein globales Maximum an.

Beweis. Siehe Barbu und Precupanu [1, Theorem 2.8]. □

A.2. Wahrscheinlichkeitsrechnung

Hier wollen wir einige Resultate und Definitionen aus der Wahrscheinlichkeitsrechnung festhalten. Dabei werden wir auf grundlegende Begriffe und Definitionen verzichten und nur die in unserem Kontext relevanten Resultate besprechen.

Definition A.2.1 (Messbarkeit). Sei (Ω, Σ) und $(\mathcal{Z}, \mathcal{D})$ zwei messbare Räume. Eine Funktion $f : \Omega \rightarrow \mathcal{Z}$ heißt messbar, falls

$$f^{-1}(D) := \{\omega \in \Omega \mid f(\omega) \in D\} \in \Sigma$$

für alle $D \in \mathcal{D}$ gilt.

Für einen topologischen Raum \mathcal{Z} ist die borelsche σ -Algebra gegeben als die kleinste σ -Algebra, die alle offenen Teilmengen von \mathcal{Z} enthält, definiert. Diese bezeichnen wir auch mit $\mathcal{B}(\mathcal{Z})$.

Theorem A.2.2 (Messbarkeit halbstetiger Funktionen). Sei \mathcal{Z} ein topologischer Raum und $\widehat{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Ist $f : (\mathcal{Z}, \mathcal{B}(\mathcal{Z})) \rightarrow (\widehat{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\widehat{\mathbb{R}}))$ unterhalbstetig (vgl. Def. A.1.3), dann ist f messbar (siehe Def. A.2.1).

Beweis. Siehe Brenner [2, Prop. B.1.8]. □

Für unsere Theorie benötigen wir noch eine weitere Aussage über Messbarkeit.

Theorem A.2.3 (Messbarkeit des Infimums halbstetiger Funktionen). Sei (Y, Σ) ein messbarer Raum, $Y \subset \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$ eine Borel-Teilmenge, d.h. $Y \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, $A \subset \mathbb{R}^n$ abgeschlossen und $f : Y \times A \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ unterhalbstetig. Dann ist die Funktion

$$y \in Y \mapsto \inf_{x \in A} f(y, x)$$

messbar.

Beweis. Siehe Brenner [2, Korollar B.1.20]. □

Für die nächste Aussage definieren wir zuerst den Erwartungswert einer Zufallsvariablen.

Definition A.2.4 (Erwartungswert). Sei (Ω, Σ, P) ein Wahrscheinlichkeitsraum. Für eine Zufallsvariable $Y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$ ist der Erwartungswert $E(Y)$ gegeben durch

$$E(Y) := \int_{\Omega} Y(\omega) dP(\omega) \in [0, \infty].$$

Für eine Zufallsvariable $X : \Omega \rightarrow \widehat{\mathbb{R}}$ definieren wir außerdem

$$X^+ := \max\{0, X\} \geq 0 \quad \text{und} \quad X^- := -\min\{0, X\} \geq 0.$$

Dann gilt insbesondere $X = X^+ - X^-$.

Betrachten wir direkt eine zentrale Aussage über den Erwartungswert.

Theorem A.2.5 (Halbstetigkeit des Erwartungswertes). Sei (Ω, Σ, P) ein Wahrscheinlichkeitsraum und (X, d) ein metrischer Raum. Für $f : \Omega \times X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ sei $f(\omega, \cdot)$ unterhalbstetig (vgl. Def. A.1.3) für fast alle $\omega \in \Omega$ und $f(\cdot, x)$ messbar für alle $x \in X$. Angenommen für $x_0 \in X$ existiert ein $\delta > 0$, sodass

$$\inf_{d(x, x_0) \leq \delta} f(\cdot, x) \tag{A.2.1}$$

messbar ist mit

$$E\left(\inf_{d(x, x_0) \leq \delta} f(\cdot, x)\right) > -\infty. \tag{A.2.2}$$

Dann ist $x \in X \mapsto E(f(\cdot, x))$ unterhalbstetig in x_0 .

Beweis. Siehe Brenner [2, Theorem B.3.6]. □

A.3. Programmcode

Matlab-Musterprogramm zu Abbildung 2.1a, 2.1b, 2.1c und 2.1d:

```

1  %%%%% Musterprogramm: Beispiel One Period
2  % Zuerst muessen wir alpha waehlen. Dabei muessen wir folgendes beachten.
3  % alpha in (9/22, 9/2): keine gemeinsamen Punkte, hier: alpha=1.5
4  % alpha > 9/2: ein gemeinsamer Punkt, hier: alpha=7
5  % alpha = 9/2: Growth Optimal Portfolio als gemeinsamer Punkt
6  alpha = 7;
7
8  % Berechnung der wichtigen Werte
9  r_max = (22*alpha - 9)/(20*alpha);
10 r = 0:0.0001:r_max;
11 nu = 0.55*log(1+alpha*r) + 0.45*log(1-0.5*r);
12 nu_max = 0.55*log(1+alpha*r_max) + 0.45*log(1-0.5*r_max);
13 nu_eins = 0.55*log(1+alpha) - 0.45*log(2);
14
15 % Plot der effizienten Punkte mit risikofreier Anlage
16 hold on
17 plot(r, nu, 'Color', 'blue')
18 xlabel('r')
19 ylabel('\mu')
20 set(get(gca, 'ylabel'), 'rotation', 0) %dreht Beschriftung auf y-Achse
21
22 % Ergaenzende Linie

```

```

23 x = [r_max 1.5];
24 y = [nu_max nu_max];
25 line(x,y, 'Color', 'black')
26
27 % Plot des Growth Optimal Portfolios
28 plot(r_max, nu_max, 'o', 'Color', 'red')
29
30 % Plot des effizienten Punktes ohne risikofreier Anlage
31 % horizontal
32 x = [1 1.5];
33 y = [nu_eins nu_eins];
34 line(x,y, 'Color', 'black')
35 % vertikal
36 x = [1 1];
37 y = [0 nu_eins];
38 line(x,y, 'Color', 'black')
39 % nur der Punkt
40 plot(1, nu_eins, 'o', 'Color', 'blue')
41 hold off

```

Matlab-Musterprogramm zu Abbildung 3.1, 4.1, 4.2 und 4.3:

```

1 %%% Musterprogramm: Beispiel DrawDown, RunDown, log-TWR
2
3 % Erstellen und plotten einer Kapitalentwicklung
4 hold on
5 x = 0:13;
6 y = [0 0.03 -0.04 -0.03 0.02 -0.01 -0.02 -0.05 -0.01 -0.02 0.09 0.03 0.04 0.045];
7 ylim([-0.06 0.1])
8 plot(x,y, 'black')
9 plot(x,y, 'black.', 'MarkerSize', 12)
10 xlabel('Perioden')
11 ylabel('ln TWR')
12 line(xlim(), [0,0], 'LineWidth', 1, 'Color', 'k');
13
14 % Plot des Drawdowns
15 x = [0.69 0.845];
16 y = [0.87 0.655];
17 annotation('textarrow', x, y, 'FontSize', 13, 'LineWidth', 2, 'Color', 'red')
18 annotation('textbox', [.74 .55 .75 ...
19     .3], 'EdgeColor', 'none', 'String', 'DrawDown', 'FontSize', 12, 'LineWidth', 2)
20
21 % Plot des log-TWR
22 x = [0.14 0.84];
23 y = [0.425 0.648];
24 annotation('textarrow', x, y, 'FontSize', 13, 'LineWidth', 2, 'Color', 'blue')
25 annotation('textbox', [.45 .32 .75 ...
26     .3], 'EdgeColor', 'none', 'String', 'lnTWR', 'FontSize', 12, 'LineWidth', 2)
27
28 % Plot des RunDowns
29 x = [0.14 0.51];
30 y = [0.41 0.16];
31 annotation('textarrow', x, y, 'FontSize', 13, 'LineWidth', 2, 'Color', 'red')
32 annotation('textbox', [.31 .045 .75 ...
33     .3], 'EdgeColor', 'none', 'String', 'RunDown', 'FontSize', 12, 'LineWidth', 2)
34
35 hold off

```

R-Musterprogramm zu den Untersuchungen in Kapitel 6:

```

1 # =====

```

```

2 # Plotten der Trading Strategien
3 # =====
4
5 Kapital = read.csv2("../Eq_Growth Optimal Portfolio.csv", header=TRUE)
6 attributes(Kapital)$names = c("Datum", "MaxTWR", "EqualWeight")
7
8 n = length(Kapital$Datum)
9
10 Kapital$Datum = as.Date(Kapital$Datum, format = '%d.%m.%Y')
11
12 par(las=1)
13 plot(Kapital$Datum, Kapital$MaxTWR, type="l", col="blue", xlab="STOXX Sectors",
14       ylab="Kapitalentwicklung", log="y", ylim=c(65,300))
15 lines(Kapital$Datum, Kapital$EqualWeight, lty=1, col="black")
16
17 abline(100,0,unf=TRUE)
18
19 legend(locator(1), col=c("blue", "black"), lty=c(1,1),
20        legend=c("GOP", "EqualWeight"))
21
22 # =====
23 # Statistische Analyse der Trading Strategien
24 # =====
25
26 Kapitalentwicklung = Kapital$MaxTWR
27 Return = Kapitalentwicklung[2:n]/Kapitalentwicklung[1:(n-1)]
28
29
30 # TWR
31 round(Kapitalentwicklung[n] / 100, 2)
32
33 # Mean daily Return
34 MeanDailyReturn = mean(Return-1)
35
36 # Mean daily Return annualisiert
37 round(MeanDailyReturn * 250, 3)
38
39 # Daily Varianz der Returns
40 DailyVarianz = var(Return-1)
41
42 # Daily Standard Deviation der Returns
43 DailyStandardDeviation = (DailyVarianz)^0.5
44
45 # Daily Standard Deviation der Returns annualisiert in Prozent
46 round(DailyStandardDeviation * sqrt(250) * 100, 1)
47
48 # Sharpe-Ratio
49 round(sqrt(250) * MeanDailyReturn/DailyStandardDeviation,2)
50
51 # Absoluter DrawDown
52 AbsDrawDown = 1:n
53 for(i in 1:n){
54   AbsDrawDown[i] = max(Kapitalentwicklung[1:i]) - Kapitalentwicklung[i]
55 }
56
57 # Relativer DrawDown
58 RelDrawDown = 1:n
59 for(i in 1:n){
60   RelDrawDown[i] = AbsDrawDown[i] / max(Kapitalentwicklung[1:i])
61 }
62 MeanRelativeDrawDown = mean(RelDrawDown)
63 round(MeanRelativeDrawDown * 100,1) # In Prozent

```

```
64
65 # geometric Return over DrawDown
66 geoRoDD_Jahre = ((Kapitalentwicklung[n]/100)^(1/17) - 1) / MeanRelativeDrawDown
67 round(geoRoDD_Jahre, 2)
```

Literatur

- [1] V. Barbu und T. Precupanu. *Convexity and optimization in banach spaces*. Bd. 24. 1972. ISBN: 9789400722477.
- [2] R. Brenner. „Consistency in Portfolio Optimization: A new Approach using the General Framework of Portfolio Theory“. Dissertation. Aachen: RWTH Aachen University, 2021.
- [3] A. Chekhlov, S. Uryasev und M. Zabarankin. „Drawdown measure in portfolio optimization“. In: *International Journal of Theoretical and Applied Finance* 08.01 (2005), S. 13–58. DOI: 10.1142/S0219024905002767.
- [4] A. Chekhlov, S. Uryasev und M. Zabarankin. „Portfolio optimization with drawdown constraints“. In: *Asset and Liability Management Tools*. Risk Books. B. Scherer, 2003, S. 263–278.
- [5] H. Föllmer und A. Schied. *Stochastic Finance*. De Gruyter, 2008. DOI: doi : 10 . 1515 / 9783110212075. URL: <https://doi.org/10.1515/9783110212075>.
- [6] J. L. Kelly. „A new interpretation of information rate“. In: *The Bell System Technical Journal* 35.4 (1956), S. 917–926. DOI: 10.1002/j.1538-7305.1956.tb03809.x.
- [7] J. Lintner. „The Valuation of Risk Assets and the Selection of Risky Investments in Stock Portfolios and Capital Budgets“. In: *The Review of Economics and Statistics* 47.1 (1965), S. 13–37. ISSN: 00346535, 15309142.
- [8] M. López de Prado, R. Vince und Q. J. Zhu. „Optimal Risk Budgeting under a Finite Investment Horizon“. In: *Risks* 7.3 (2019). ISSN: 2227-9091. DOI: 10.3390/risks7030086.
- [9] S. Maier-Paape, A. Platen und Q. J. Zhu. „A General Framework for Portfolio Theory. Part III: Multi-Period Markets and Modular Approach“. In: *Risks* 7.2 (2019). DOI: 10.3390/risks7020060.
- [10] S. Maier-Paape und Q. J. Zhu. „A General Framework for Portfolio Theory. Part II: Drawdown Risk Measures“. In: *Risks* 6.3 (2018). DOI: 10.3390/risks6030076.
- [11] S. Maier-Paape und Q. J. Zhu. „A General Framework for Portfolio Theory. Part I: Theory and Various Models“. In: *Risks* 6.2 (2018). DOI: 10.3390/risks6020053.
- [12] A. Platen. „Modular portfolio theory : a general framework with risk and utility measures as well as trading strategies on multi-period markets“. Dissertation. Aachen: RWTH Aachen University, 2018. DOI: 10.18154/RWTH-2018-230691. URL: <https://publications.rwth-aachen.de/record/750584>.
- [13] R. T. Rockafellar. *Convex analysis*. Princeton Mathematical Series. Princeton, N. J.: Princeton University Press, 1970. ISBN: 9780691015866.
- [14] R. Vince. *The Leverage Space Trading Model*. Wiley Trading Series. Wiley, 2009. ISBN: 978-0-470-45595-1.
- [15] R. Vince. *The mathematics of money management: risk analysis techniques for traders*. Bd. 18. John Wiley & Sons, 1992.
- [16] R. Vince und Q. J. Zhu. „Optimal Betting Sizes for the Game of Blackjack“. In: (2013). DOI: 10.2139/ssrn.2324852.
- [17] A. Windmann. „Machine Learning in Finance“. Magisterarb. RWTH Aachen, 2020.