Das Magazin für den kritischen Anleger

4 2016 | 6,40 EUR

Smart Investor

www.smartinvestor.de

Endspiel

Was auf uns zukommen wird

Metalle:
Perspektiven nach dem Crash

Florian Homm:
Über Psychopathen und das Finale Furioso

CFDs und Knock-outs:
Mit Hebel geschickt an den Märkten agieren

Phänomene des Marktes

Normalverteilte Finanzmarktdaten?

Teil 1: Tagesrenditen

Gastbeitrag von René Kempen, Stanislaus Maier-Paape, Andreas Platen

Prof. Dr. Stanislaus Maier-Paape lehrt am Institut für Mathematik der RWTH Aachen und ist Geschäftsführer der von ihm gegründeten Firma SMP Financial Engineering GmbH. René Kempen und Andreas Platen promovieren unter der Betreuung von Prof. Dr. Maier-Paape. Die Forschungsschwerpunkte dieser Arbeitsgruppe im Bereich „quantitative finance" sind statistische Analyse und mathematische Modellierung von Finanzmärkten und mechanischen Handelssystemen, insbesondere unter Berücksichtigung der Markttechnik, sowie Portfolio- und Moneymanagement für Asset Allocation.

Beim Aktienhandel scheiden sich die Geister. Die einen sagen, dass Kurse bestimmte Muster ausbilden, an denen man sich orientieren kann, andere sehen einen starken Zusammenhang zu Fundamentaldaten, und wieder andere halten all dies für Kaffeesatzleserei. Seit jeher werden daher unzählige Untersuchungen zu den Kursentwicklungen von Aktien und auch von anderen Wertpapieren durchgeführt, allen voran von Wissenschaftlern wie Eugene Francis Fama, Lars Peter Hansen und Robert J. Shiller, die dafür sogar den Nobelpreis im Jahr 2013 erhielten.

Oftmals möchte man ein Modell für die Kurswertentwicklung finden, welches die Realität möglichst exakt abbildet und gleichzeitig leicht zu erfassen ist, um beispielsweise Risikobewertungen vorzunehmen. Würde man z.B. die tatsächliche Verteilung der Renditen kennen, so könnte man daraus ein solches Modell ableiten. Da wir jedoch nur endlich viele Kurswertänderungen beobachten können, kennen wir die tatsächliche Verteilung nicht. Wir brauchen also eine möglichst realistische Annahme für eine Verteilung. Eine bekannte Verteilung, welche in diesem Zusammenhang häufig genannt wird, ist die Normalverteilung. Über diese Verteilung, die auf den deutschen Mathematiker Carl Friedrich Gauß zurückgeht, ist bereits sehr viel bekannt, sodass sich diese für weitere Analysen sehr gut eignet.

Eine natürliche Frage ist demnach, ob die Renditeverteilungen der realen Märkte überhaupt einer Normalverteilung folgen. Diese essenzielle Frage hat man sich bereits vor langer Zeit gestellt und sie wurde beispielsweise schon 1964 in der Dissertation von E.F. Fama behandelt. Wir wollen deshalb anhand der Verteilung der DAX-Aktien diese Frage veranschaulichen.

Renditen und Log-Renditen

Wir werden uns hier auf die Betrachtung der Tagesschlusskurse beschränken. Sicherlich hängen die täglichen Kursänderungen von der Höhe des aktuellen Kurses ab. Eine Aktie, die aktuell 10 EUR wert ist, wird sich absolut gesehen weniger stark ändern als eine Aktie, die 200 EUR wert ist. Vergleichbar ist dagegen die prozentuale Kursentwicklung, welche für die Tagesrenditen durch

$$R_{\text{heute}} = \frac{\text{Schlusskurs}_{\text{heute}}}{\text{Schlusskurs}_{\text{gestern}}} > 0$$

gegeben ist. Hat sich der Schlusskurs seit gestern nicht geändert, würden wir also $R_{\text{heute}} = 1$ erhalten. Wir erwarten daher, dass der größte Teil der relativen Renditen um die Eins herum verteilt ist. Die Werte sind zusätzlich immer positiv. Da im Falle einer Normalverteilung auch jeder beliebige negative Wert angenommen werden kann, können diese Renditen per Definition nicht normalverteilt sein.

Da die relativen Renditen stets positiv sind, können wir jedoch den natürlichen Logarithmus davon bestimmen und daher alternativ die Log-Renditen

$$R^{\log}_{\text{heute}} = \log\left(\frac{\text{Schlusskurs}_{\text{heute}}}{\text{Schlusskurs}_{\text{gestern}}}\right)$$

betrachten. Diese können nun jeden beliebigen positiven und negativen Wert annehmen. Bei den Log-Renditen ist es also möglich, dass diese einer Normalverteilung folgen. Hat sich der Schlusskurs seit gestern nicht geändert, würden wir nun $R^{\log}_{\text{heute}} = \log(1) = 0$ erhalten. Als Mittelwert erwarten wir daher einen Wert nahe null.

Sind die Renditeverteilungen im DAX normalverteilt?

Wir untersuchen nun die Tagesschlusskurse der 30 Aktien, die gegenwärtig im DAX enthalten sind. Die Historien der Kurse beginnen dabei zwischen 1996 und 2001 und gehen bis einschließlich 2015, mit Ausnahme von Vonovia, die erst im Juli 2013 an die Börse ging. Abbildung 1 (siehe Seite 34) zeigt ein Histogramm vom Logarithmus der relativen Tagesrenditen, wie oben beschrieben, und Plots zu Dichten zweier Normalverteilungen gegeben durch

$$f(x;\mu,\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\exp\left(-\frac{1}{2}\cdot\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}\right)$$

mit unterschiedlicher Standardabweichung σ. Der Mittelwert μ der Normalverteilungen entspricht dabei dem Mittelwert der empirischen Daten aus den 30 Aktien, welcher, wie bereits erwartet, nahe bei null liegt.

Die flachere Normalverteilung (blaue Kurve) hat zusätzlich noch die gleiche Standardabweichung wie die Daten, die zum Histogramm gehören. Man sieht, dass dieser Fit zwar auf dem ersten Blick an den Rändern sehr nahe am Histogramm liegt, jedoch im Zentrum, d.h. nahe bei null, nicht so stark konzentriert ist. Aus diesem Grund zeigt die Grafik eine weitere Normalverteilung mit einer kleineren Standardabweichung, d.h. mit einer schwächeren Streuung (rote Kurve). In diesem Fall passt der Fit im Zentrum besser zum Histogramm, jedoch flacht es zum Rand hin deutlich schneller ab als das Histogramm.


Andreas Platen


René Kempen

Einen genaueren Blick auf die Ränder können wir rechts in Abbildung 1 (siehe Seite 34) machen. Man sieht, dass das Histogramm dort stärker als beide Normalverteilungen ausgeprägt ist. Obwohl der Stichprobenumfang relativ klein ist, ist die Abweichung schon recht deutlich sichtbar. Größere Abweichungen vom Mittelwert, d.h. Ausreißer, scheinen mit höherer Wahrscheinlichkeit aufzutreten als es bei einer Normalverteilung der Fall ist. In einem solchen Fall redet man auch von sogenannten „fat tails“. Dieses Phänomen tritt immer auf, egal wie μ und σ geschätzt werden. Der Grund ist ein exponentielles Abfallen der Dichte der Normalverteilung am Rand, das in realen Daten nicht gegeben ist.

Kurssimulationsmodelle: Vom Random Walk zur geometrischen Brownschen Bewegung

Mittels solcher Untersuchungen kann man nun die Märkte analysieren und versuchen, Modelle zu entwickeln, etwa um Kursdaten zu simulieren. Die Modelle sollten dabei leicht handhabbar sein und gleichzeitig die Realität möglichst gut abbilden. Wie eine Verteilung realer Märkte aussehen kann, haben wir nun gesehen. Gehen wir jedoch für den Moment einen Schritt zurück.

Im einfachsten Fall könnte man davon ausgehen, dass die Log-Renditen lediglich zwei Werte, $a > 0$ und $-a < 0$ (z.B. 0,02 und -0,02), mit jeweils positiver Wahrscheinlichkeit annehmen können. Ein Kurssimulations- ▶

modell könnte dann so aussehen, dass man von einem Tag zum nächsten, gemäß der Wahrscheinlichkeiten, entweder um einen entsprechenden Wert nach oben oder um einen entsprechenden Wert nach unten geht. Man nennt dies auch „Random Walk".

Dieses Modell entspricht offensichtlich nicht der Realität. Innerhalb eines Tages auf ganz kleiner Zeiteinheit könnte dies jedoch realistisch sein, denn die Kurse bewegen sich tatsächlich sprunghaft mit meist kleinen Sprüngen, vorgegeben durch die kleinste zu handelnde (Tick-)Einheit. Die Kursentwicklung von einem Tag zum nächsten besteht also aus unzähligen kleinen Kurssprüngen. Betrachtet man nun einen geeigneten Grenzprozess, in welchem immer mehr, aber auch immer kleinere Kurssprünge angenommen werden, so ergibt sich für die Log-Rendite zwischen den Tagesschlusskursen eine Normalverteilung, wie sie z.B. die blaue oder rote Kurve in Abbildung 1 zeigen. Das zugehörige Kurssimulationsmodell heißt „geometrische Brownsche Bewegung".

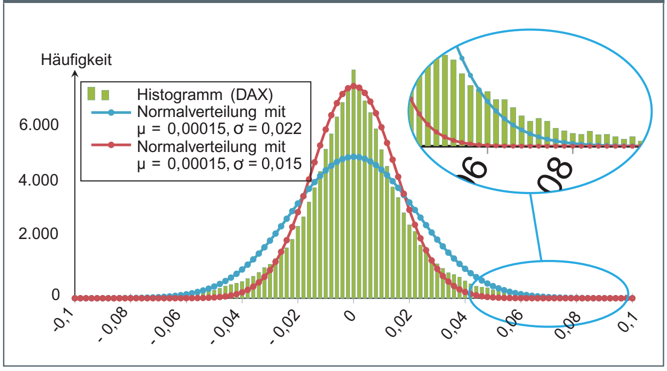
Entsprechend den obigen Bemerkungen sind größere Ausreißer in diesem Modell deutlich seltener, als es in Realität der Fall zu sein scheint. Dagegen ist die Häufigkeit, mit welcher negative und positive Log-Renditen gleicher Größe auftreten, auf den ersten Blick annähernd gleich. Dies gilt sowohl für die realen Daten als auch für die Log-Renditen der geometrischen Brownschen Bewegung. Eine geometrische Brownsche Bewegung als Kurssimulator weist also gewisse Ähnlichkeiten zum Kursverlauf realer Märkte auf, zeigt aber nicht alle Charakteristiken.

Anwendung solcher Kurssimulationsmodelle

Ein erstes Anwendungsfeld solcher Modelle findet man bei der Bewertung von Optionsscheinen. Das Cox-Ross-Rubinstein-Modell zur Optionspreisbewertung, auch Binomialmodell genannt, beruht dabei auf einem Random Walk als Kurssimulator. So wie die geometrische Brownsche Bewegung aus dem Random Walk hervorgeht, so kann man das bekannte Black-Scholes-Modell zur Optionspreisbewertung als Übergang ausgehend vom Binomialmodell ansehen.

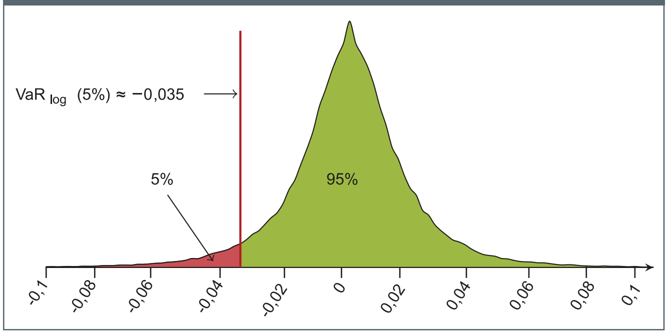
Ein weiteres Anwendungsfeld ist die Risikobewertung. Beispielsweise kann der Value-at-Risk (VaR), welcher ein Maß für das zukünftige Verlustrisiko einer Anlage darstellt, unter der Annahme von normalverteilten Log-Renditen leicht berechnet werden. Als Beispiel gibt der VaR (5%), d.h. zum Konfidenzniveau 95%, denjenigen Wert an, der mit einer Wahrscheinlichkeit von 5% von einem Tag auf den nächsten unterschritten wird. D.h. 5% aller (logarithmischen) Tagesrenditen sind kleiner oder gleich dem zugehörigen VaR (5%). Nimmt man nun unsere empirische Verteilung der Tagesrenditen (vergleiche grünes Histogramm in Abbildung 1) als die echte Verteilung an, so kann man den VaR grafisch wie in Abbildung 2 darstellen, wobei VaR_{log} hier für den VaR der Log-Renditen steht, welcher etwa -0,035 beträgt. Für die relativen Tagesrenditen (ohne Logarithmus) entspricht dies einem Wert von VaR (5%) = exp (-0,035) ≈ 0,966, d.h. 5% aller Kursänderungen von einem Tag auf den nächsten innerhalb der 30 DAX-Aktien sind Verluste von 3,4% oder mehr. Zum Vergleich: VaR(5%) der „blauen" Normalverteilung in Abbildung 1 ist etwa 0,965 (3,5% Verlust) und der „roten" gerundet 0,976 (2,4% Verlust).

Abb. 1: Nur fast normalverteilte Tagesrenditen



Histogramm des Logarithmus der relativen Tagesrenditen der 30 Aktien aus dem DAX und zwei verschiedene Varianten einer Normalverteilung zum Vergleich.

Abb. 2: Value-at-Risk



Der 5%-Value-at-Risk der Log-Renditen der 30 DAX-Aktien aus Abb. 1.

Höhere Konfidenzniveaus führen beim VaR zu immer deutlicheren Unterschieden zwischen realen Renditen und normalverteilten. Stellt man nun Risikobewertungen auf Basis einer geometrischen Brownschen Bewegung an, so bleiben vor allem die negativen Ausreißer nahezu unberücksichtigt, da diese in diesem Modell nur selten auftreten. Das ist vermutlich auch der Grund, warum der VaR, der z.B. auch als Risikomaß zur Bewertung der Risiken von Banken eingesetzt wird, in der Finanzkrise 2008 massiv versagt hat. Ein Ausweg könnte z.B. der extreme Value-at-Risk (eVaR) sein, der auf der Extremwertstatistik beruht und vor allem die großen und seltener auftretenden Verluste berücksichtigt, welche beim VaR nur eine untergeordnete Rolle spielen.

Fazit

Die Logarithmen der relativen Tagesrenditen der 30 DAX-Aktien zeigen ein Verhalten, welches dem von normalverteilten Log-Renditen, d.h. denen einer geometrischen Brownschen Bewegung, ähnelt. Die Verteilung ist nahezu symmetrisch um den Mittelwert, sodass positive und negative Kursänderungen in etwa mit der gleichen Wahrscheinlichkeit auftreten. Der Mittelwert ist minimal positiv, was vermutlich der Inflation geschuldet ist. Ein genauerer Blick zeigt jedoch, dass größere Ausreißer in der Realität eine vergleichsweise höhere Wahrscheinlichkeit haben. Aus diesem Grund sollten vor allem Berechnungen, die auf einer Normalverteilungsannahme beruhen, kritisch betrachtet und hinterfragt werden.