Minimierer der eindimensionalen Ginzburg-Landau-Energie unter einer Mittelwertbedingung und Konvergenzraten der Cahn-Hilliard-Evolution

von

Philipp Kreins

Masterarbeit in Mathematik

vorgelegt der

Fakultät für Mathematik, Informatik und Naturwissenschaften
der

Rheinisch-Westfälischen Technischen Hochschule Aachen

im

Dezember 2020

angefertigt am

Lehrstuhl für angewandte Analysis

Erstgutachterin: Prof. Dr. Maria Westdickenberg

Zweitgutachter: Prof. Dr. Stanislaus Maier-Paape

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Ein aktuelles Thema in der Forschung ist die Frage, inwieweit und unter welchen Bedingungen Lösungen der Cahn-Hilliard-Gleichung als Gradientenfluss zu der skalaren Ginzburg-Landau-Energie bzgl. der $\dot{H}^{-1}$-Norm stabil sind. Zunächst denkt man bei stabilen Lösungen an lokale Minimierer der Ginzburg-Landau-Energie unter gewissen Nebenbedingungen, da sie als zeitlich konstante Lösungen der Cahn-Hilliard-Gleichung fungieren, oder an Lösungen, die sehr nahe an einem lokalen Minimierer starten und anschließend gegen diesen konvergieren. Daneben gibt es aber auch noch das Phänomen der sogenannten **Metastabilität**: Dabei handelt es sich um Lösungen, die sich scheinbar stabil in der Zeit verhalten, während sie sich auf lange Zeiträume gesehen doch noch nennenswert verändern, aber eben sehr langsam. Das Ziel dieser Arbeit ist es nun, einen Einblick in manche dieser Klassen von Lösungen zu geben. Genauer gesagt geben wir uns eine große Klasse von Funktionen vor, sodass wir zum Einen die Minimierer der Ginzburg-Landau-Energie in dieser Klasse näher betrachten und zum Anderen aus dieser solche Teilklassen generieren, sodass Lösungen zu Anfangsdaten aus diesen Teilklassen metastabil sind.

Dabei widmen wir uns in **Kapitel 1** zunächst der Minimierung der Ginzburg-Landau-Energie in der Menge der periodischen H^1-Funktionen auf einem festgelegten endlichen Intervall mit einem fixierten Mittelwert in $(-1, 1)$, wobei wir uns besonders für sehr große Intervalllängen interessieren.
In **Abschnitt 1.1** stellen wir dann fest, dass Minimierer zu dem gegebenen Minimierungsproblem existieren, aber dass sie nicht eindeutig sind. Darüber hinaus bestimmen wir u.A. die zugehörigen Euler-Lagrange-Gleichungen und untersuchen ihre Regularität.
Im anschließenden **Abschnitt 1.2** gehen wir anfangs den Fragen nach der Gestalt und der Energie der Minimierer für große Intervalllängen nach. Dabei interessieren wir uns insbesondere für die Extrema, die Nullstellen, das Steigungsverhalten und die Symmetrie-Eigenschaften. Ein nützliches Werkzeug für die Untersuchung einiger dieser Eigenschaften ist die sogenannte **Modica-Mortola-Rechnung**. Danach verfolgen wir für den Rest des Abschnitts die Idee, die Minimierer durch konkrete Funktionen, die man mithilfe des sogenannten **kinks** konstruiert, die aber nicht zwingend in der zu den Minimierungsproblemen gehörigen Klassen von Funktionen liegen, bzgl. der C^1-Norm in Abhängigkeit von der Intervalllänge anzunähern. Unter Verwendung von Ideen aus [4] können wir dann zeigen, dass der Abstand

dieser Funktionen zu den Minimierern in der C^1-Norm exponentiell klein bzgl. der Intervalllänge wird.

In **Kapitel 2** zitieren und entwickeln wir einige Ergebnisse bzgl. der Metastabilität von Lösungen der Cahn-Hilliard-Gleichung unter periodischen Randbedingungen und einem Anfangsdatum aus einer Teilklasse der periodischen H^1-Funktionen mit fixiertem Mittelwert Null bzw. in $(-1,1)$ auf der Basis von [6]. In den eigenen Hauptresultaten ziehen wir jedoch eine neuere Methode aus [5] heran.
Als Vorbereitung stellen wir zum Einen am Anfang kurz einige Eigenschaften von Lösungen der Cahn-Hilliard-Gleichung mit periodischen Randbedingungen und einem periodischen Anfangsdatum vor und zum Anderen behandeln wir in **Abschnitt 2.1** zwei weitere Minimierungsprobleme für die Ginzburg-Landau-Energie, da die zugehörigen Minimierer in [6] und auch in den nachfolgenden Abschnitten dieses Kapitels eine wichtige Rolle spielen.
In **Abschnitt 2.2** zitieren wir dann die Ausgangssituation aus [6], darunter insbesondere die sogenannte **slow manifold of evolution**, in der die Minimierer aus dem vorigen Abschnitt verwendet werden, sowie das zugehörige Hauptresultat bzgl. metastabilen Lösungen. Zudem führen wir einige Hilfsresultate aus [6, 4], wie z.B. nichtlineare Energie- und Dissipations-Abschätzungen und Lipschitz-Bedingungen, für den nächsten Abschnitt an, wobei wir meistens einen allgemeinen Mittelwert in $(-1,1)$ zulassen.
Im letzten **Abschnitt 2.3** entwickeln wir für Lösungen mit einem Anfangsdatum wie in [6] unter vereinfachenden Annahmen und mit Methoden aus [5] Annäherungsraten für die Lösung bzw. deren Energie und Abschätzungen für deren Nullstellen unter Benutzung der sogenannten **excess mass**. Zum Abschluss stellen wir skizzenhaft mittels Energie-Abschätzungen noch einen Zusammenhang zwischen diesen Lösungen und den Minimierern aus Kapitel 1 her.

1 Minimierer der 1-D-Ginzburg-Landau-Energie unter einer Mittelwertbedingung

Schon vor längerer Zeit betrachtete man in der Forschung die Energie

$$\widehat{E}(\widehat{u}) := \int_{-1}^{1} G(\widehat{u})\, \mathrm{d}y, \tag{1.1}$$

wobei $\widehat{u} \in H^1\big((-1,1)\big)$ und G ein Potenzial mit folgenden Eigenschaften sei.

Voraussetzungen 1.0.1. (Annahmen bzgl. des Potenzials G)
Es sei $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ein nicht-degeneriertes Doppelmulden-Potenzial, *d.h. G besitze die folgenden Charakteristika:*

($\mathcal{G}1$) *Es sei $G \in C^2(\mathbb{R})$ und G sei gerade.*
($\mathcal{G}2$) *Es seien $G(t) > 0$ für $t \neq \pm 1$ und $G(\pm 1) = 0$.*
($\mathcal{G}3$) *Es seien $G'(t) \leq 0$ für $t \in [0,1]$ und $G''(\pm 1) > 0$.*

Daher existiert eine eindeutige positive Funktion $H \in C(\mathbb{R}) \cap C^2(\mathbb{R} \setminus \{\pm 1\})$, die

$$G(t) = H(t) \cdot \Big(1 - t^2\Big)^2 \tag{1.2}$$

für alle $t \in \mathbb{R}$ erfüllt. Dabei ist $H(\pm 1) = \frac{1}{8} G''(\pm 1) = \frac{1}{8} G''(1)$ und es gibt Konstanten $c_H, C_H \in (0,\infty)$ mit

$$c_H \leq H(t) \leq C_H \tag{1.3}$$

für alle $t \in [-1,1]$.

Zusätzlich muss in einigen Resultaten manche der folgenden Anforderungen gestellt werden:

($\mathcal{G}4$) *Es gelte $G'' \in C^{0,1}_{loc}(\mathbb{R})$.*
($\mathcal{G}4s$) *Es gelte $G \in C^4(\mathbb{R})$.*
($\mathcal{G}5$) *Es sei $\sqrt{G}$ konkav in $[-1,1]$.*
($\mathcal{G}6$) *Es existiere ein $\alpha \in (0,1)$, sodass $H(t) \geq H(\pm 1)$ in $(-1,-1+\alpha) \cup (1-\alpha,1)$ gelte.*

Bemerkung 1.0.2.
Dabei ist hervorzuheben, dass G ein nicht-konvexes Potenzial ist. Vielmehr nimmt G in genau zwei Punkten, und zwar in ± 1, sein globales Minimum an, das die Bezeichnung „Doppelmulden-Potenzial" rechtfertigt. Diese Eigenschaft macht die Energie $\widehat{E}$ in (1.1) besonders interessant.

Beispiel 1.0.3. (Kanonische Wahl von G)
In der Literatur wird oft die Funktion

$$G(t) := \frac{1}{4}\left(1 - t^2\right)^2 \tag{1.4}$$

für $t \in \mathbb{R}$ gewählt. Dann ist $G \in C^\infty(\mathbb{R})$ mit

$$G'(t) = t^3 - t, \quad G''(t) = 3t^2 - 1 \quad \text{und} \quad H(t) := \frac{1}{4}$$

für $t \in \mathbb{R}$. Offenbar erfüllt G die Axiome $(\mathcal{G}1)$ bis $(\mathcal{G}6)$. $\diamond$

Jedenfalls ist $\widehat{E}(\widehat{u})$ in (1.1) dann wohldefiniert mit $\widehat{E}(\widehat{u}) \in [0, \infty)$; denn zum Einen folgt aus den Einbettungssätzen für Sobolev-Funktionen, dass es für alle $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ eine stetige Einbettung

$$H^1\left((a,b)\right) \hookrightarrow C^{0,\frac{1}{2}}([a,b]) \tag{1.5}$$

gibt, das die Wohldefiniertheit und Endlichkeit von $\widehat{E}(\widehat{u})$ impliziert, und zum Anderen ist $\widehat{E}(\widehat{u}) \geq 0$ aufgrund von $(\mathcal{G}2)$.

Speziell interessierte man sich dabei für das Minimierungsproblem

$$\begin{cases} \inf\limits_{\widehat{u} \in \mathcal{M}_\mathfrak{m}} \widehat{E}(\widehat{u}) \qquad \text{mit} \\ \mathcal{M}_\mathfrak{m} := \left\{ \widehat{u} \in H^1\left((-1,1)\right) \;\middle|\; \widehat{u}(-1) = \widehat{u}(1),\ \fint_{-1}^{1} \widehat{u}\,\mathrm{d}y = \mathfrak{m} \right\} \end{cases} \tag{1.6}$$

für ein $\mathfrak{m} \in (-1,1)$. Jedoch besitzt dieses Problem keinen Minimierer.

Beweis
Damit $\widehat{E}(\widehat{u})$ minimal wird, denkt man wegen $(\mathcal{G}2)$, der periodischen Randbedingung $\widehat{u}(-1) = \widehat{u}(1)$ und der Mittelwertbedingung $\fint_{-1}^{1} \widehat{u}\,\mathrm{d}y = \mathfrak{m} \in (-1,1)$ zunächst z.B. an die Funktion $\widehat{u} : (-1,1) \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$\widehat{u}(y) := \begin{cases} 1, & \text{falls } y \in \left(-1, \frac{\mathfrak{m}}{2} - \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2} - \frac{\mathfrak{m}}{2}, 1\right), \\ -1, & \text{falls } y \in \left[\frac{\mathfrak{m}}{2} - \frac{1}{2}, \frac{1}{2} - \frac{\mathfrak{m}}{2}\right], \end{cases}$$

die tatsächlich $\widehat{u}(-1) = \widehat{u}(1)$ und $\fint_{-1}^{1} \widehat{u}\,\mathrm{d}y = \mathfrak{m}$ erfüllt, aber nicht in $H^1\left((-1,1)\right)$ liegt. Trotzdem ist $\widehat{E}(\widehat{u})$ auch hier wohldefiniert und es gilt $\widehat{E}(\widehat{u}) = 0$. Dabei können wir $\widehat{u}$ durch Funktionen in $\mathcal{M}_{\mathfrak{m}}$ approximieren; denn sei $\delta_0 > 0$ so klein, dass $\widehat{u}_\delta : (-1,1) \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$\widehat{u}_\delta(y) := \begin{cases} 1, & \text{falls } y \in \left(-1, \frac{\mathfrak{m}}{2} - \frac{1}{2} - \frac{\delta}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2} - \frac{\mathfrak{m}}{2} + \frac{\delta}{2}, 1\right), \\ \frac{2}{\delta}\left(\frac{\mathfrak{m}}{2} - \frac{1}{2} - y\right), & \text{falls } y \in \left[\frac{\mathfrak{m}}{2} - \frac{1}{2} - \frac{\delta}{2}, \frac{\mathfrak{m}}{2} - \frac{1}{2} + \frac{\delta}{2}\right), \\ -1, & \text{falls } y \in \left[\frac{\mathfrak{m}}{2} - \frac{1}{2} + \frac{\delta}{2}, \frac{1}{2} - \frac{\mathfrak{m}}{2} - \frac{\delta}{2}\right], \\ \frac{2}{\delta}\left(\frac{\mathfrak{m}}{2} - \frac{1}{2} + y\right), & \text{falls } y \in \left(\frac{1}{2} - \frac{\mathfrak{m}}{2} - \frac{\delta}{2}, \frac{1}{2} - \frac{\mathfrak{m}}{2} + \frac{\delta}{2}\right], \end{cases}$$

für alle $\delta \in (0, \delta_0)$ wohldefiniert ist. Dann gilt offenbar $\widehat{u}_\delta \in \mathcal{M}_{\mathfrak{m}}$ für alle $\delta \in (0, \delta_0)$ und

$$\begin{aligned} 0 \leq \widehat{E}(\widehat{u}_\delta) &\underset{(\mathcal{G}2)}{=} \int\limits_{\frac{\mathfrak{m}}{2}-\frac{1}{2}-\frac{\delta}{2}}^{\frac{\mathfrak{m}}{2}-\frac{1}{2}+\frac{\delta}{2}} G(\widehat{u}_\delta)\,\mathrm{d}y + \int\limits_{\frac{1}{2}-\frac{\mathfrak{m}}{2}-\frac{\delta}{2}}^{\frac{1}{2}-\frac{\mathfrak{m}}{2}+\frac{\delta}{2}} G(\widehat{u}_\delta)\,\mathrm{d}y \\ &\underset{(\mathcal{G}1),(\mathcal{G}3)}{\leq} \int\limits_{\frac{\mathfrak{m}}{2}-\frac{1}{2}-\frac{\delta}{2}}^{\frac{\mathfrak{m}}{2}-\frac{1}{2}+\frac{\delta}{2}} G(1)\,\mathrm{d}y + \int\limits_{\frac{1}{2}-\frac{\mathfrak{m}}{2}-\frac{\delta}{2}}^{\frac{1}{2}-\frac{\mathfrak{m}}{2}+\frac{\delta}{2}} G(1)\,\mathrm{d}y \\ &= 2\delta G(1) \xrightarrow[\delta \to 0]{} 0, \end{aligned}$$

also gilt $\lim\limits_{\delta \to 0} \widehat{E}(\widehat{u}_\delta) = \widehat{E}(\widehat{u}) = 0$. Dies impliziert $\inf\limits_{\widehat{v} \in \mathcal{M}_{\mathfrak{m}}} \widehat{E}(\widehat{v}) = 0$, da $\widehat{E}(\widehat{v}) \geq 0$ für alle $\widehat{v} \in \mathcal{M}_{\mathfrak{m}}$ gilt.

Aber es existiert offenbar kein $\widehat{v} \in \mathcal{M}_{\mathfrak{m}}$ mit $\widehat{E}(\widehat{v}) = 0$; denn aufgrund von $(\mathcal{G}2)$ müsste ansonsten für ein solches, insbesondere stetiges $\widehat{v}$ die Identität $|\widehat{v}| \equiv 1$ in $(-1,1)$ gelten, wobei $\{v = 1\}$ und $\{v = -1\}$ aufgrund der Mittelwert-Bedingung $⨍_{-1}^{1} \widehat{v}\,\mathrm{d}y = \mathfrak{m} \in (-1,1)$ jeweils nicht-leer sind. Daher kann $\widehat{v}$ nicht stetig sein und somit ist $\widehat{v} \notin \mathcal{M}_{\mathfrak{m}}$, das uns einen Widerspruch beschert. □

Um dieser Problematik entgegenzuwirken, muss in der Energie neben den Funktionswerten von $\widehat{u}$ auch deren erste schwache Ableitung „in zumindest geringem Ausmaß" berücksichtigt werden. Deshalb untersuchte man die leicht modifizierte Energie

$$\widehat{E}_\epsilon(\widehat{u}) := \int\limits_{-1}^{1} \frac{\epsilon}{2}\widehat{u}_y^2 + G(\widehat{u})\,\mathrm{d}y$$

für ein $\widehat{u} \in H^1\big((-1,1)\big)$ und ein (kleines) $\epsilon > 0$ sowie das entsprechende Problem

$$\begin{cases} \inf\limits_{\widehat{u} \in \mathcal{M}_{\mathfrak{m}}} \widehat{E}_\epsilon(\widehat{u}) \qquad \text{mit} \\ \mathcal{M}_{\mathfrak{m}} = \left\{ \widehat{u} \in H^1\big((-1,1)\big) \;\middle|\; \widehat{u}(-1) = \widehat{u}(1),\ ⨍_{-1}^{1} \widehat{u}\,\mathrm{d}y = \mathfrak{m} \right\} \end{cases} \tag{1.7}$$

für ein $\mathfrak{m} \in (-1,1)$. Dabei hat man sich folgende Fragen gestellt:

1. Gibt es von (1.7) für manche (oder sogar alle) $\mathfrak{m} \in (-1,1)$ und alle (hinreichend kleinen) $\epsilon > 0$ einen Minimierer?
2. Falls es für ein fest gewähltes $\mathfrak{m} \in (-1,1)$ und für jedes beliebige (hinreichend kleine) $\epsilon > 0$ einen Minimierer $\widehat{w}_\epsilon \in \mathcal{M}_\mathfrak{m}$ von (1.7) gibt: Können wir die Minimierer $\widehat{w}_\epsilon$ so wählen, dass eine Funktion $\widehat{w}$ existiert, sodass
$$\widehat{w}_\epsilon(x) \xrightarrow[\epsilon \to 0]{} \widehat{w}(x) \tag{1.8}$$
für fast alle $x \in (-1,1)$ gilt und die Energie $\widehat{E}(\widehat{w})$ wohldefiniert ist mit
$$\lim_{\epsilon \to 0} \widehat{E}_\epsilon(\widehat{w}_\epsilon) = \widehat{E}(\widehat{w}) = 0?$$
Falls dies alles zutrifft, gilt nach der obigen Überlegung $\widehat{w} \notin \mathcal{M}_\mathfrak{m}$, wobei wir aufgrund der 2-Periodizität der Minimierer $\widehat{w}_\epsilon$ und (1.8) annehmen dürfen, dass $\widehat{w}(-1) = \widehat{w}(1)$ gilt, aber kann $\widehat{w}$ zugleich noch eine weitere Eigenschaft aus der Definition von $\mathcal{M}_\mathfrak{m}$ erfüllen, d.h. kann darüber hinaus entweder $\widehat{w} \in H^1\big((-1,1)\big)$ oder $⨍_{-1}^{1} \widehat{w}\,\mathrm{d}y = \mathfrak{m}$ zutreffen?

Diesen Fragen gehen auch wir nach, aber nur indirekt, indem wir in diesem Kapitel ein zu (1.7) äquivalentes Problem betrachten: Für (kleine) $\epsilon > 0$ und $\widehat{u} \in \mathcal{M}_\mathfrak{m}$ seien $L := \frac{1}{\sqrt{\epsilon}}$ sowie $u(x) := \widehat{u}\left(\frac{x}{L}\right)$ mit $x \in (-L,L)$, sodass wir zum Einen $u \in H^1\big((-L,L)\big)$ und $u(-L) = u(L)$ erhalten. Zum Anderen ergeben sich mit der Substitution $x = Ly$ die Identitäten
$$\mathfrak{m} = ⨍_{-1}^{1} \widehat{u}\,\mathrm{d}y = ⨍_{-L}^{L} u\,\mathrm{d}x$$
und
$$\begin{aligned}\widehat{E}_\epsilon(\widehat{u}) = \int_{-1}^{1} \frac{\epsilon}{2}\widehat{u}_y^2 + G(\widehat{u})\,\mathrm{d}y &= \sqrt{\epsilon} \int_{-\frac{1}{\sqrt{\epsilon}}}^{\frac{1}{\sqrt{\epsilon}}} \frac{\epsilon}{2}\widehat{u}_y\left(\sqrt{\epsilon}\cdot x\right)^2 + G(\widehat{u}(\sqrt{\epsilon}\cdot x))\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} \frac{1}{2}u_x(x)^2 + G(u(x))\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Daher ist das Minimierungsproblem (1.7) für festes $\epsilon > 0$ äquivalent dazu, dass wir die folgende Energie für das korrespondierende $L > 0$ auf einer entsprechend angepassten Menge (siehe Definition 1.0.5) minimieren, sofern dies möglich ist.

Definition 1.0.4. (Ginzburg-Landau-Energie)
Für $L > 0$ ist die Ginzburg-Landau-Energie *auf dem Intervall $[-L,L]$ definiert durch*
$$E_L(u) := \int_{-L}^{L} \frac{1}{2}u_x^2 + G(u)\,\mathrm{d}x, \tag{1.9}$$
wobei $u \in H^1\big((-L,L)\big)$ sei.

In der Situation der Definition 1.0.4 ergibt sich wieder direkt aus der Definition sowie der Einbettung (1.5), dass $E_L(u)$ wohldefiniert ist mit $E_L(u) \in [0, \infty)$. Ferner lautet das zu (1.7) äquivalente Problem wie folgt.

Definition 1.0.5.
Für $L > 0$ und $\mathfrak{m} \in (-1, 1)$ bezeichnen wir

$$\begin{cases} \inf\limits_{u \in \mathcal{A}_L} E_L(u) \qquad \textit{mit} \\ \mathcal{A}_L := \mathcal{A}_{L,\mathfrak{m}} := \left\{ u \in H^1\big((-L, L)\big) \;\middle|\; u(-L) = u(L),\ ⨍_{-L}^{L} u \, \mathrm{d}x = \mathfrak{m} \right\} \end{cases} \tag{1.10}$$

als das Minimierungsproblem für die Ginzburg-Landau-Energie unter periodischen Randbedingungen und einer Mittelwertbedingung.

Genau dieses Problem werden wir im Hinblick auf die beiden oben aufgeworfenen Fragen - natürlich angepasst auf das Problem (1.10) - in diesem Kapitel hauptsächlich für $L \gg 1$ näher beleuchten, wobei wir hier gerade die Notation 1.1.5 a) verwendet haben.

1.1 Existenz und Regularität eines Minimierers

Zu Beginn untersuchen wir die erste Frage der vorigen Einleitung, die in der Situation von Definition 1.0.5 wie folgt lautet: Gibt es einen Minimierer vom Minimierungsproblem (1.10) und müssen wir dazu ggf. Anforderungen an $\mathfrak{m} \in (-1, 1)$ und $L > 0$ stellen? Die zugehörigen Antworten liefert der anschließende

Satz 1.1.1. (Existenz eines Minimierers)
Für jedes $\mathfrak{m} \in (-1, 1)$ und $L > 0$ existiert mindestens ein Minimierer von (1.10).

Beweis
Zunächst ist $\mathcal{A}_L$ nicht-leer, da z.B. $u \equiv \mathfrak{m}$ in $\mathcal{A}_L$ liegt. In Kombination mit der Tatsache, dass $E_L(u) \in [0, \infty)$ für alle $u \in H^1\big((-L, L)\big)$ ist, ergibt sich somit $\inf\limits_{\mathcal{A}_L} E_L \in [0, \infty)$.

Sei nun $(u_k)_{k \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{A}_L$ eine Minimierungsfolge von E_L, d.h. es gelte

$$E_L(u_k) \xrightarrow[k \to \infty]{} \inf_{\mathcal{A}_L} E_L.$$

Dann existiert eine Konstante $C > 0$, sodass

$$C \geq \sqrt{E_L(u_k)} = \sqrt{\int_{-L}^{L} \frac{1}{2}(u_k)_x^2 + G(u_k)\,\mathrm{d}x} \underset{(\mathcal{G}2)}{\geq} \frac{1}{\sqrt{2}} \|(u_k)_x\|_{L^2((-L,L))}$$

$$\geq \frac{1}{2\sqrt{2}} \|(u_k)_x\|_{L^2((-L,L))} + \frac{1}{2\sqrt{2}C_P} \Big(\|u_k\|_{L^2((-L,L))} - \sqrt{2L}|\mathfrak{m}| \Big) \tag{1.11}$$

$$\geq \min\left\{ \frac{1}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{2\sqrt{2}C_P} \right\} \|u_k\|_{H^1((-L,L))} - \frac{\sqrt{L}|\mathfrak{m}|}{2C_P} \tag{1.12}$$

für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt, wobei wir in (1.11) die Poincaré-Ungleichung

$$\left\| u_k - \fint_{-L}^{L} u_k \,\mathrm{d}x \right\|_{L^2((-L,L))} \leq C_P \|(u_k)_x\|_{L^2((-L,L))}$$

mit der zugehörigen Konstante $C_P > 0$, die Identität $\fint_{-L}^{L} u_k \,\mathrm{d}x = \mathfrak{m}$ und die untere Dreiecksungleichung sowie in (1.12) die Ungleichung $\sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}$ für alle $a, b \geq 0$ verwendet haben. Somit ist $\|u_k\|_{H^1((-L,L))}$ gleichmäßig beschränkt. Da $H^1\big((-L,L)\big)$ als Hilbertraum reflexiv ist, finden wir somit ein $u \in H^1\big((-L,L)\big)$ und eine in $H^1\big((-L,L)\big)$ gegen u schwach konvergierende Teilfolge $\big(u_{k_i}\big)_{i\in\mathbb{N}}$.

Dabei ist $u \in \mathcal{A}_L$, denn zum Einen ist das Funktional

$$H^1\big((-L,L)\big) \to \mathbb{R}, \quad v \mapsto \fint_{-L}^{L} v \,\mathrm{d}x$$

linear und stetig, sodass wir aus $(u_{k_i})_{i\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{A}_L$ und der schwachen Konvergenz schließen, dass $\fint_{-L}^{L} u \,\mathrm{d}x = \mathfrak{m}$ gilt. Zum Anderen folgern wir zusammen mit (1.5), dass auch $\|u_{k_i}\|_{C^{0,\frac{1}{2}}([-L,L])}$ gleichmäßig beschränkt ist. Aus dem Satz von Arzelà-Ascoli ergibt sich nun, dass eine weitere Teilfolge existiert, die wir ohne Einschränkung der Allgemeinheit wieder $\big(u_{k_i}\big)_{i\in\mathbb{N}}$ nennen, die in $C([-L,L])$ gegen u konvergiert. Insbesondere gilt daher

$$u(-L) = \lim_{i\to\infty} u_{k_i}(-L) = \lim_{i\to\infty} u_{k_i}(L) = u(L),$$

also insgesamt $u \in \mathcal{A}_L$.

Des Weiteren folgt aus der Konvergenz von $\big(u_{k_i}\big)_{i\in\mathbb{N}}$ gegen u in $C([-L,L])$ zum Einen, dass $\big(u_{k_i}\big)_{i\in\mathbb{N}}$ insbesondere in $L^2\big((-L,L)\big)$ gegen u konvergiert, das in Kombination mit der schwachen Unterhalbstetigkeit der $H^1\big((-L,L)\big)$-Norm

$$\int_{-L}^{L} \frac{1}{2} u_x^2 \,\mathrm{d}x \leq \liminf_{i\to\infty} \int_{-L}^{L} \frac{1}{2} \big(u_{k_i}\big)_x^2 \,\mathrm{d}x \tag{1.13}$$

impliziert. Zum Anderen schließen wir zusammen mit der Stetigkeit von G, dass auch $\left(G\left(u_{k_i}\right)\right)_{i\in\mathbb{N}}$ in $C([-L,L])$ gegen $G(u)$ konvergiert, das wiederum $\int_{-L}^{L} G(u)\,\mathrm{d}x = \lim\limits_{i\to\infty} \int_{-L}^{L} G\left(u_{k_i}\right)\,\mathrm{d}x$ liefert. In Kombination mit (1.13) folgt insgesamt

$$E_L(u) = \int\limits_{-L}^{L} \frac{1}{2}u_x^2 + G(u)\,\mathrm{d}x \leq \liminf_{i\to\infty} \int\limits_{-L}^{L} \frac{1}{2}\left(u_{k_i}\right)_x^2 + G\left(u_{k_i}\right)\,\mathrm{d}x = \liminf_{i\to\infty} E_L\left(u_{k_i}\right)$$

und damit

$$\inf_{\mathcal{A}_L} E_L \leq E_L(u) \leq \liminf_{i\to\infty} E_L\left(u_{k_i}\right) = \lim_{i\to\infty} E_L\left(u_{k_i}\right) = \lim_{k\to\infty} E_L(u_k) = \inf_{\mathcal{A}_L} E_L, \tag{1.14}$$

also $\inf\limits_{\mathcal{A}_L} E_L = E_L(u)$, d.h. u ist ein Minimierer von (1.10). □

Dies ermöglicht folgende

Definition 1.1.2.
Sei $\mathfrak{m} \in (-1,1)$ beliebig, aber fest. Dann wählen wir zu jedem $L > 0$ einen Minimierer von (1.10) und bezeichnen ihn mit $w_L := w_{L,\mathfrak{m}}$.

Anschließend widmen wir uns der Regularität der Minimierer sowie den zentralen Gleichungen, die sie erfüllen.

Lemma 1.1.3.
Sei $\mathfrak{m} \in (-1,1)$ und $L > 0$. Der zugehörige Minimierer w_L aus Definition 1.1.2 besitzt folgende Eigenschaften:

(i) Es gilt mindestens $w_L \in C^{k+1}([-L,L])$, falls $G \in C^k([-L,L])$ für $k \geq 2$ ist. Falls G das kanonische Potenzial (1.4) ist, gilt sogar $w_L \in C^\infty([-L,L])$.

(ii) Es existieren Konstanten $\lambda_L, \theta_L \in \mathbb{R}$, sodass die Euler-Lagrange-Gleichung

$$-(w_L)_{xx} + G'(w_L) = \lambda_L \tag{1.15}$$

sowie die Identität

$$-\frac{1}{2}(w_L)_x^2 + G(w_L) = \lambda_L w_L + \theta_L \tag{1.16}$$

in $[-L,L]$ gelten.

(iii) Es gilt $w_L^{(n)}(-L) = w_L^{(n)}(L)$ für alle $0 \leq n \leq k+1$ für k aus (i).

Bemerkung 1.1.4. (Periodizität und Eindeutigkeit der Minimierer)
Die Eigenschaften (i) und (iii) bedeuten also, dass man w_L zu einer $2L$-periodischen Funktion $\widehat{w}_L$ auf $\mathbb{R}$ fortsetzen kann, welche in $C^{k+1}(\mathbb{R})$ liegt. Ferner definieren wir $\widehat{w}_{L|y} := \widehat{w}_L(\cdot - y)$ für ein beliebiges, aber festes $y \in \mathbb{R}$, welche im Vergleich zu $\widehat{w}_L$ um y nach rechts verschoben ist. Dann ist $w_{L|y} := \widehat{w}_{L|y}\big|_{[-L,L]}$ ebenfalls ein Minimierer von (1.10).
In Kombination mit dem späteren Lemma 1.2.8 impliziert dies insbesondere, dass der Minimierer w_L nicht eindeutig ist.

Beweis von Lemma 1.1.3
(i), (ii) Sei ein beliebiges $\phi \in H^1\big((-L,L)\big)$ mit $\phi(-L) = \phi(L)$ und $⨍_{-L}^{L} \phi \, \mathrm{d}x = 0$ gegeben. Dann definieren wir die Funktion

$$\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \psi(s) := E_L(w_L + s\phi).$$

Diese ist wohldefiniert, da $w_L + s\phi \in \mathcal{A}_L$ für alle $s \in \mathbb{R}$ gilt. Zudem ist

$$\psi(s) = E_L(w_L + s\phi) \geq E_L(w_L) = \psi(0)$$

für alle $s \in \mathbb{R}$ aufgrund der Minimierungseigenschaft von w_L und mit dem Satz von der majorisierten Konvergenz folgern wir, dass ψ in $s = 0$ differenzierbar ist, sodass wir

$$\begin{aligned} 0 = \frac{d}{ds}\psi(s)\Big|_{s=0} &= \frac{d}{ds}\int_{-L}^{L} \frac{1}{2}((w_L)_x + s\phi_x)^2 + G(w_L + s\phi)\,\mathrm{d}x\Bigg|_{s=0} \\ &= \int_{-L}^{L} ((w_L)_x + s\phi_x)\phi_x + G'(w_L + s\phi)\phi\,\mathrm{d}x\Bigg|_{s=0} \\ &= \int_{-L}^{L} (w_L)_x\phi_x + G'(w_L)\phi\,\mathrm{d}x \end{aligned} \tag{1.17}$$

erhalten.

Nun zeigen wir, dass daraus $(w_L)_x \in C^1([-L,L])$ und somit $w_L \in C^2([-L,L])$ folgt: Dazu setzen wir w_L zuerst zu einer $2L$-periodischen Funktion $\widehat{w}_L$ auf $\mathbb{R}$ fort und erhalten damit $\widehat{w}_L \in H^1_{loc}(\mathbb{R})$, da $w_L(-L) = w_L(L)$ gilt. Ferner sind nach Lemma A.0.2 fast alle Punkte in $\mathbb{R}$ Lebesgue-Punkte von $(\widehat{w}_L)_x$, also sei $a \in \mathbb{R}$ ein beliebiger, aber fester Lebesgue-Punkt von $(\widehat{w}_L)_x$. Dabei können wir ohne Einschränkung der Allgemeinheit $a = -L$ annehmen. (Andernfalls verfahre man analog zum Rest des Beweises dieses Lemmas für $\widehat{w}_{L|-L-a} := \widehat{w}_L(\cdot + L + a)$ statt $\widehat{w}_L$, wobei man für den Nachweis der zu (1.17) analogen Identität verwende, dass $w_{L|-L-a} := \widehat{w}_{L|-L-a}\big|_{[-L,L]}$ ebenfalls einen Minimierer von (1.10) darstellt. Dann erhält man zu (i) bis (iii) analoge Aussagen für $w_{L|-L-a}$ statt w_L. Wie in der Bemerkung 1.1.4 übertragen sich anschließend die zu (i) analogen Regularitätsaussagen auf $\widehat{w}_{L|-L-a}$ in $\mathbb{R}$ und somit gelten auch die Gleichungen (1.15) und (1.16) für $\widehat{w}_{L|-L-a}$ (statt w_L) in $\mathbb{R}$. Schließlich folgen dann alle Behauptungen für w_L.) Zudem sei $y \in (-L,L)$ ein weiterer Lebesgue-Punkt von $(\widehat{w}_L)_x$. Jetzt sei $\epsilon_0 > 0$ so klein, dass die Funktion $\tilde{\phi}_\epsilon : [-L,L] \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$\tilde{\phi}_\epsilon(x) := \begin{cases} \frac{1}{\epsilon}(-L - x), & \text{falls } x \in [-L, -L+\epsilon), \\ -1, & \text{falls } x \in [-L+\epsilon, y-\epsilon), \\ \frac{1}{\epsilon}(x - y) & \text{falls } x \in [y-\epsilon, y+\epsilon), \\ 1, & \text{falls } x \in [y+\epsilon, L-\epsilon), \\ \frac{1}{\epsilon}(L - x), & \text{falls } x \in [L-\epsilon, L], \end{cases}$$

für alle $\epsilon \in (0, \epsilon_0)$ wohldefiniert ist. Dann ist $\tilde{\phi}_\epsilon \in W^{1,\infty}\big((-L,L)\big) \subseteq H^1\big((-L,L)\big)$ mit $\tilde{\phi}_\epsilon(-L) = 0 = \tilde{\phi}_\epsilon(L)$ und

$$\fint_{-L}^{L} \tilde{\phi}_\epsilon \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2L}\left[(y+L-2\epsilon)(-1) + (L-y-2\epsilon)\right] = \frac{-2y}{2L} =: \eta(y)$$

für alle $\epsilon \in (0,\epsilon_0)$. Nun sei $\phi_\epsilon := \tilde{\phi}_\epsilon - \eta(y) \in H^1\big((-L,L)\big)$, welche $\phi_\epsilon(-L) = -\eta(y) = \phi_\epsilon(L)$ und $\fint_{-L}^{L} \phi_\epsilon \,\mathrm{d}x = 0$ für alle $\epsilon \in (0,\epsilon_0)$ erfüllt, sodass wir $\phi = \phi_\epsilon$ in (1.17) wählen können und damit

$$-\int_{-L}^{L} G'(\widehat{w}_L)\phi_\epsilon \,\mathrm{d}x = \int_{-L}^{L} (\widehat{w}_L)_x(\phi_\epsilon)_x \,\mathrm{d}x$$

bzw.

$$\begin{aligned}
-\int_{-L}^{L} G'(\widehat{w}_L)\phi_\epsilon \,\mathrm{d}x &= -\frac{1}{\epsilon}\int_{-L}^{-L+\epsilon} (\widehat{w}_L)_x \,\mathrm{d}x + 2\cdot\frac{1}{2\epsilon}\int_{y-\epsilon}^{y+\epsilon} (\widehat{w}_L)_x \,\mathrm{d}x - \frac{1}{\epsilon}\int_{L-\epsilon}^{L} (\widehat{w}_L)_x \,\mathrm{d}x \\
&= -2\cdot\frac{1}{2\epsilon}\int_{-L-\epsilon}^{-L+\epsilon} (\widehat{w}_L)_x \,\mathrm{d}x + 2\cdot\frac{1}{2\epsilon}\int_{y-\epsilon}^{y+\epsilon} (\widehat{w}_L)_x \,\mathrm{d}x \qquad (1.18)
\end{aligned}$$

für alle $\epsilon \in (0,\epsilon_0)$ erhalten, wobei wir in (1.18) benutzt haben, dass $(\widehat{w}_L)_x$ $2L$-periodisch ist. Da $-L$ und y Lebesgue-Punkte von $(\widehat{w}_L)_x$ sind, ergibt sich mit dem Grenzübergang $\epsilon \to 0$ unter Verwendung des Satzes von der majorisierten Konvergenz

$$-\int_{-L}^{y} G'(\widehat{w}_L)(-1-\eta(y)) \,\mathrm{d}x - \int_{y}^{L} G'(\widehat{w}_L)(1-\eta(y)) \,\mathrm{d}x = -2(\widehat{w}_L)_x(-L) + 2(\widehat{w}_L)_x(y)$$

bzw.

$$(\widehat{w}_L)_x(y) = \frac{\eta(y)+1}{2}\int_{-L}^{y} G'(\widehat{w}_L)\,\mathrm{d}x + \frac{\eta(y)-1}{2}\int_{y}^{L} G'(\widehat{w}_L)\,\mathrm{d}x + (\widehat{w}_L)_x(-L) =: f(y).$$

Dabei gilt diese Identität für fast alle $y \in (-L,L)$, da fast alle Punkte in $(-L,L)$ Lebesgue-Punkte von $(\widehat{w}_L)_x$ sind. Da zum Einen nach (1.5) insbesondere $\widehat{w}_L \in C(\mathbb{R})$ und daher auch $G'(\widehat{w}_L) \in C(\mathbb{R})$ ist und zum Anderen η ein Polynom in y ist, ist die rechte Seite $f \in C^1([-L,L])$, mit der $(\widehat{w}_L)_x$ fast überall in $(-L,L)$ übereinstimmt. Daher können wir ohne Einschränkung der Allgemeinheit

$$(w_L)_x = (\widehat{w}_L)_x\big|_{[-L,L]} \in C^1([-L,L])$$

annehmen, d.h. es gilt $w_L \in C^2([-L,L])$.

Wenn wir jetzt in (1.17) sogar $\phi \in C_c^\infty\big((-L,L)\big)$ mit $⨍_{-L}^{L} \phi \,\mathrm{d}x = 0$ wählen und beachten, dass $(w_L)_x \in C^1([-L,L])$ ist, liefert eine partielle Integration

$$0 = \int_{-L}^{L} \left[-(w_L)_{xx} + G'(w_L)\right] \phi \,\mathrm{d}x.$$

Aufgrund der beliebigen Wahl von $\phi \in C_c^\infty\big((-L,L)\big)$ mit $⨍_{-L}^{L} \phi \,\mathrm{d}x = 0$ folgt mit Lemma A.0.3 die Existenz einer Konstante $\lambda_L \in \mathbb{R}$, sodass

$$-(w_L)_{xx} + G'(w_L) = \lambda_L$$

in $[-L,L]$ gilt, das der Identität (1.15) entspricht.

Ein Umstellen der Gleichung (1.15) ergibt

$$(w_L)_{xx} = G'(w_L) - \lambda_L \tag{1.19}$$

in $[-L,L]$. Da $G \in C^2(\mathbb{R})$ nach $(\mathcal{G}1)$ und $w_L \in C^2([-L,L])$ sind, liegt die rechte Seite von (1.19) in $C^1([-L,L])$, sodass $(w_L)_{xx} \in C^1([-L,L])$ und somit $w_L \in C^3\big([-L,L]\big)$ gilt. Eine Iteration der vorigen Argumentation liefert $w_L \in C^{k+1}([-L,L])$, falls $G \in C^k([-L,L])$ mit $k \geq 2$ ist. Falls G das kanonische Potenzial (1.4) ist, welches in $C^\infty([-L,L])$ liegt, folgt demnach $w_L \in C^\infty([-L,L])$. Dies entspricht den Behauptungen in (i).

Um die Identitäten (1.16) zu erhalten, multiplizieren wir die Gleichung (1.15) mit $(w_L)_x$ und integrieren diese anschließend von y bis x für beliebige $x, y \in [-L,L]$, das

$$-\frac{1}{2}(w_L)_x^2(x) + \frac{1}{2}(w_L)_x^2(y) + G(w_L(x)) - G(w_L(y)) = \lambda_L w_L(x) - \lambda_L w_L(y)$$

bzw.

$$-\frac{1}{2}(w_L)_x^2(x) + G(w_L(x)) - \lambda_L w_L(x) = -\frac{1}{2}(w_L)_x^2(y) + G(w_L(y)) - \lambda_L w_L(y) \tag{1.20}$$

für alle $x, y \in [-L,L]$ ergibt. Daher muss eine Konstante $\theta_L \in \mathbb{R}$ mit

$$\theta_L \equiv -\frac{1}{2}(w_L)_x^2(y) + G(w_L(y)) - \lambda_L w_L(y)$$

für alle $y \in [-L,L]$ existieren. Wenn wir dies in die Gleichung (1.20) einsetzen, haben wir auch die letzte Identität in (ii) hergeleitet.

(iii) Zunächst ist $w_L(-L) = w_L(L)$, da $w_L \in \mathcal{A}_L$ ist.

Ferner wählen wir in (1.17) eine Testfunktion $\phi \in C^1([-L,L]) \subseteq H^1\big((-L,L)\big)$ mit $⨍_{-L}^{L} \phi \,\mathrm{d}x = 0$ und $\phi(-L) = \phi(L) = 1$. Da zumindest $w_L \in C^3([-L,L])$ gilt, können wir wieder partiell integrieren und erhalten

$$
\begin{aligned}
0 = \int_{-L}^{L} (w_L)_x \phi_x + G'(w_L)\phi \, \mathrm{d}x &= \Big[(w_L)_x \phi\Big]_{-L}^{L} - \int_{-L}^{L} \big[\overbrace{-(w_L)_{xx} + G'(w_L)}^{\overset{(1.15)}{=} \lambda_L}\big]\phi \, \mathrm{d}x \\
&= (w_L)_x(L)\phi(L) - (w_L)_x(-L)\phi(-L) - \lambda_L \int_{-L}^{L} \phi \, \mathrm{d}x \\
&= (w_L)_x(L) - (w_L)_x(-L),
\end{aligned}
$$

also $(w_L)_x(L) = (w_L)_x(-L)$.

Schließlich folgt auch $w_L^{(n)}(-L) = w_L^{(n)}(L)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $2 \leq n \leq k+1$ für k aus (i), indem wir die Identität (1.15) bzw. die Identitäten, die entstehen, indem wir beide Seiten von (1.15) oft genug differenzieren, sowie $w_L(-L) = w_L(L)$ und $(w_L)_x(-L) = (w_L)_x(L)$ verwenden. □

Abschließend führen wir noch einige Notationen ein, die hauptsächlich im folgenden Abschnitt sowie im zweiten Kapitel sehr nützlich sind.

Notation 1.1.5.

a) Gelegentlich schreiben wir $A \ll B$, falls für jede Konstante $c > 0$ ein $\mathfrak{L} > 0$ existiert, sodass $A \leq cB$ für alle $L \geq \mathfrak{L}$ oder im zweiten Kapitel ggf. für alle $l \geq \mathfrak{L}$ gilt. Dabei ergibt sich im zweiten Kapitel aus dem jeweiligen Kontext, welcher Fall zutrifft.

b) Die Notation $A \lesssim B$ bedeutet, dass eine universelle Konstante $C > 0$ existiert, die im Wesentlichen von G und häufig auch von $\mathfrak{m} \in (-1, 1)$ abhängt, sodass $A \leq CB$ für hinreichend große L und/oder l gilt, wobei die Variable l wiederum erst im zweiten Kapitel benutzt wird und dann aus dem jeweiligen Zusammenhang folgt, welcher Fall zutrifft. Ferner kann sie

   (i) **in diesem Kapitel** zusätzlich von der Wahl der Minimierer $(w_L)_{L>0}$ (abgesehen von Translationen wie in Bemerkung 1.1.4) und ggf. von weiteren in dem jeweiligen Resultat gegebenen Konstanten abhängig sein, wie z.B. von ϵ in Lemma 1.2.20, und

   (ii) **im zweiten Kapitel** ebenfalls zusätzlich von weiteren in dem jeweiligen Resultat vorkommenden Konstanten abhängig sein. Dabei sind Abhängigkeiten von den Konstanten C_1, C_E, C_H oder C_V besonders zu beachten und daher werden diese explizit erwähnt, und zwar entweder wie in Satz 2.2.7 oder, wenn sie z.B. wie in Lemma 2.2.9 von C_H abhängt, durch die Verwendung der Notation $\lesssim_{C_H}$.

1.2 Approximation des Minimierers

In diesem Abschnitt gehen wir im Wesentlichen der (dem Minimierungsproblem (1.10) entsprechend angepassten) zweiten offenen Frage aus der Einleitung von diesem Kapitel nach. Kurz gesagt: Wie verhalten sich die Minimierer w_L aus Definition 1.1.2 zu gegebenem $\mathfrak{m} \in (-1,1)$ für $L \gg 1$?

Dazu überlegen wir uns zunächst skizzenhaft, wie Funktionen $u_L \in \mathcal{A}_L$ mit kleiner Energie $E_L(u_L)$ in etwa aussehen. Bis jetzt kennen wir nämlich nur $\tilde{u}_L \equiv \mathfrak{m} \in \mathcal{A}_L$, für die $E_L(\tilde{u}_L) = 2LG(\mathfrak{m})$ mit $G(\mathfrak{m}) > 0$ nach $(\mathcal{G}2)$ gilt, d.h. $E_L(\tilde{u}_L)$ wächst linear in L.
Im Folgenden konstruieren wir Funktionen $u_L \in \mathcal{A}_L$, deren Energie für $L \gg 1$ sogar gleichmäßig beschränkt bleibt: Da $E_L(u_L)$ klein sein soll, muss der Integrand $\frac{1}{2}(u_L)_x^2 + G(u_L)$ in $E_L(u_L)$ im Mittel über das Intervall $[-L, L]$ ziemlich klein sein. Dabei wäre $\frac{1}{2}(u_L)_x^2 + G(u_L)$ gleichmäßig minimal in $[-L, L]$, wenn $(u_L)_x \equiv 0$ und $G(u_L) \equiv 0$ in $[-L, L]$ gälte, das nach $(\mathcal{G}2)$ genau dann der Fall wäre, wenn $u_L \equiv -1$ oder $u_L \equiv 1$ in $[-L, L]$ gälte. Dann würde u_L aber sicherlich nicht der Mittelwertbedingung $⨍_{-L}^{L} u_L \,\mathrm{d}x = \mathfrak{m} \in (-1,1)$ genügen. Deshalb soll nur auf möglichst großen Teilintervallen $u_L \approx -1$ bzw. $u_L \approx 1$ gelten und ansonsten soll u Werte in etwa zwischen -1 und 1 annehmen, da u_L schließlich stetig sein muss. Jedoch dürfen diese Teilintervalle auch nicht zu groß sein, da ansonsten der Summand $\frac{1}{2}(u_L)_x^2$ im Integranden von $E_L(u_L)$ zwischen diesen zu groß wird. Somit muss hier ein Kompromiss gefunden werden.
Ferner trägt offenbar jeder Wechsel zwischen den Bereichen mit $u_L \approx -1$ und $u_L \approx 1$ wegen der betragsmäßig größeren Steigung und wegen $G(t) > 0$ in $(-1,1)$ einen nicht unerheblichen Teil zu der Energie $E_L(u_L)$ bei, sodass u_L nur möglichst wenige dieser Wechsel aufweisen soll. Jedoch muss auch die periodische Randbedingung $u_L(-L) = u_L(L)$ erfüllt sein, sodass es sinnvoll erscheint, u_L so zu wählen, dass sie zwei solche Übergänge aufweist. Dabei wählen wir u_L z.B. so, dass

1) $u_L \approx 1$ in der Nähe der Ränder und $u_L \approx -1$ in der Mitte des Intervalls $[-L, L]$

gelte, wobei man die Größe dieser Bereiche für $L \gg 1$ so variieren muss, dass u_L die Mittelwert-Bedingung erfüllt. Ferner nehmen wir an, dass

2) $(u_L)_x \leq 0$ in $[-L, 0]$ und $(u_L)_x \geq 0$ in $[0, L]$ gelten und dass

3) u_L gerade ist.

Um jetzt eine Idee für eine präzisere Darstellung von u_L zu erhalten, verwenden wir die bekannte **Modica-Mortola-Rechnung**:

$$
\begin{aligned}
E_L(u_L) &= \int_{-L}^{L} \frac{1}{2}(u_L)_x^2 + \frac{1}{2}\, 2G(u_L)\,\mathrm{d}x \geq \int_{-L}^{L} |(u_L)_x| \sqrt{2G(u_L)}\,\mathrm{d}x && (1.21)\\
&\underset{2)}{=} \int_{-L}^{0} -(u_L)_x \sqrt{2G(u_L)}\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{L} (u_L)_x \sqrt{2G(u_L)}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{u_L(-L)}^{u_L(0)} -\sqrt{2G(t)}\,\mathrm{d}t + \int_{u_L(0)}^{u_L(L)} \sqrt{2G(t)}\,\mathrm{d}t && (1.22)\\
&= 2\int_{u_L(0)}^{u_L(L)} \sqrt{2G(t)}\,\mathrm{d}t \underset{1)}{\approx} 2\int_{-1}^{1} \sqrt{2G(t)}\,\mathrm{d}t,
\end{aligned}
$$

wobei wir in (1.21) die Ungleichung $ab \leq \frac{1}{2}(a^2+b^2)$ mit $a = |(u_L)_x|$ und $b = \sqrt{2G(u_L)}$ und in (1.22) die Substitution $t = u_L$ verwendet haben. Zudem besteht in (1.21) genau dann Gleichheit, wenn

$$
(u_L)_x = -\sqrt{2G(u_L)} \ \text{ in } [-L,0] \qquad \text{und} \qquad (u_L)_x = \sqrt{2G(u_L)} \ \text{ in } [0,L] \tag{1.23}
$$

gelten. Daher bietet es sich an, kurz die gewöhnliche Differentialgleichung $v_x = \sqrt{2G(v)}$ in $\mathbb{R}$ mit z.B. $v(0) = 0$ zu untersuchen.

Lemma 1.2.1.
Das Anfangswertproblem

$$
\begin{cases} v_x = \sqrt{2G(v)} & \text{in } \mathbb{R}, \\ v(0) = 0, \end{cases} \tag{1.24}
$$

besitzt eine eindeutig bestimmte Lösung v mit folgenden Charakteristika:

(i) Es ist mindestens $v \in C^{k+1}(\mathbb{R})$, falls $G\big|_{(-1,1)} \in C^k\big((-1,1)\big)$ für ein $k \geq 2$ ist, und v ist ungerade.

(ii) Es gelten $v_x > 0$ in $\mathbb{R}$, $|v| < 1$ in $\mathbb{R}$ und $\lim\limits_{x\to\pm\infty} v(x) = \pm 1$.

(iii) Seien $c_H, C_H \in (0,\infty)$ die Konstanten aus den Voraussetzungen 1.0.1. Dann gelten die Abschätzungen

$$
|\tanh(\sqrt{2c_H}x)| \leq |v(x)| \leq |\tanh(\sqrt{2C_H}x)| \tag{1.25}
$$

für alle $x \in \mathbb{R}$.

Bemerkung 1.2.2.

a) Die Funktion v aus Lemma 1.2.1 wird in der Literatur regelmäßig als der **kink** (dt.: „Knick“) bezeichnet.

b) Offenbar sind Translationen des Kinks, also $v(\cdot - y)$ für ein festes $y \in \mathbb{R}$, auch Lösungen der Differentialgleichung $w_x = \sqrt{2G(w)}$ in $\mathbb{R}$.

Beweis von Lemma 1.2.1
Da insbesondere $G \in C([-1,1])$ nach $(\mathcal{G}1)$ gilt, folgt zusammen mit $(\mathcal{G}2)$, dass $\sqrt{2G}$ lokal Lipschitz-stetig in $(-1,1)$ ist, sodass es nach dem Satz von Picard-Lindelöf eine eindeutig bestimmte Lösung $v \in C^1(\mathbb{R})$ von (1.24) gibt. Ferner folgen alle weiteren Eigenschaften in (i) und (ii) unmittelbar aus der Gestalt des Anfangswertproblems (1.24), den jeweiligen Regularitätsvoraussetzungen für $G|_{(-1,1)}$ und den Annahmen $(\mathcal{G}1)$ und $(\mathcal{G}2)$.

(iii) Aufgrund der Identität (1.2) gilt

$$\sqrt{2G(t)} = \sqrt{2H(t)}\left(1-t^2\right)$$

für alle $t \in [-1,1]$, sodass wir mit (1.3) die Abschätzungen

$$\sqrt{2c_H}\left(1-t^2\right) \leq \sqrt{2G(t)} \leq \sqrt{2C_H}\left(1-t^2\right)$$

für alle $t \in [-1,1]$ und in Kombination mit (1.24) und der Ungleichung $|v| < 1$ in $\mathbb{R}$ daher

$$\sqrt{2c_H}\left(1-v^2\right) \leq v_x \leq \sqrt{2C_H}\left(1-v^2\right) \tag{1.26}$$

in $\mathbb{R}$ erhalten. Dabei ist für jedes $C > 0$ die eindeutig bestimmte Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{cases} u_x = C\left(1-u^2\right) & \text{in } \mathbb{R}, \\ u(0) = 0, \end{cases}$$

durch $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $u(x) := \tanh(Cx)$ gegeben, das zusammen mit (1.26) die Abschätzungen (1.25) impliziert. □

Beispiel 1.2.3. (kink bei kanonischer Wahl von G)
Falls G das kanonische Potenzial (1.4) ist, vereinfacht sich das Anfangswertproblem (1.24) zu

$$\begin{cases} v_x = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(1-v^2\right) & \text{in } \mathbb{R}, \\ v(0) = 0. \end{cases}$$

In diesem Fall ist der kink durch $v(x) := \tanh\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)$ für $x \in \mathbb{R}$ gegeben. Dabei ist $v \in C^\infty(\mathbb{R})$; dies folgt unmittelbar daraus, dass $G\big|_{(-1,1)} \in C^\infty\big((-1,1)\big)$ gilt, und aus Lemma 1.2.1 (i). ◇

Nun kommen wir zu den Funktionen $u_L \in \mathcal{A}_L$ aus der Einleitung dieses Abschnitts zurück: Dabei haben wir mit den Annahmen 1) und 2) die Modica-Mortola-Rech-nung in (1.21) und (1.22) durchgeführt und dabei erkannt, dass die Energie $E_L(u_L)$ in dieser Abschätzung genau dann die „konstante, von L unabhängige“ untere Schranke annimmt, wenn wir fordern, dass u_L das Gleichungssystem in (1.23) löst. Aufgrund der Annahmen 1), 2) und 3) muss u_L darüber hinaus etwa in $\pm\xi_L$ für $\xi_L \in (0,L)$ Nullstellen besitzen, sodass u_L durch diese Nullstellen und durch das Gleichungssystem (1.23) mit einer ähnlichen Begründung wie im Beweis der Existenz und Eindeutigkeit des kinks v in Lemma 1.2.1 eindeutig bestimmt ist und durch

$$u_L(x) = \begin{cases} -v(x+\xi_L), & \text{falls } x \in [-L,0), \\ v(x-\xi_L), & \text{falls } x \in [0,L], \end{cases}$$

gegeben ist. Zwar gilt dann $u \in H^1\big((-L,L)\big)$ und $u(-L) = u(L)$. Jedoch ist noch unklar, ob $\xi_L \in (0,L)$ auch so gewählt werden kann, dass die Mittelwertbedingung $⨍_{-L}^{L} u_L \, \mathrm{d}x = \mathfrak{m}$ erfüllt ist. Bevor wir uns dieser Frage widmen, führen wir die folgende Klasse von Funktionen ein, der insbesondere u_L angehört.

Definition 1.2.4.
Sei v der kink aus Lemma 1.2.1. Dann definieren wir die Funktion $v_{L,z} : [-L,L] \to \mathbb{R}$ durch

$$v_{L,z}(x) := \begin{cases} -v(x+z), & \textit{falls } x \in [-L,0), \\ v(x-z), & \textit{falls } x \in [0,L], \end{cases} \tag{1.27}$$

für ein festes $z \in \mathbb{R}$.

Aus dieser Funktionenklasse können wir jetzt ein nicht-triviales Element in $\mathcal{A}_L$ konstruieren. Zur erleichterten Formulierung des zugehörigen Lemmas sowie einiger weiterer Resultate führen wir vorab die „Landau-Symbole“ ein.

Notation 1.2.5. (Landau-Symbole)
Seien $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$, $U = U(a) \subseteq \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ eine nicht-leere Umgebung von a und $f, g : U \to \mathbb{R}$ Funktionen mit $g \neq 0$ in $U \setminus \{a\}$. Dann schreiben wir

(i) $f = o(g)$ für $y \to a$, falls $\lim\limits_{y \to a} \left|\frac{f(y)}{g(y)}\right| = 0$ gilt, und

(ii) $f = \mathcal{O}(g)$ für $y \to a$, falls $\limsup\limits_{y \to a} \left|\frac{f(y)}{g(y)}\right| < \infty$ gilt.

Dabei rechnen wir meistens direkt mit den Ausdrücken, wie $o(g)$ bzw. $\mathcal{O}(g)$ für $y \to a$, das dann bedeutet, dass es sich dabei um eine Funktion f handelt, die sich wie in (i) bzw. (ii) verhält. (Als Beispiel dient die Gleichung (1.28).)

Außerdem kommt es gelegentlich vor, dass wir in (Un-)Gleichungsketten z.B. stets $o(g)$ verwenden, auch wenn sich dahinter ggf. von Zeile zu Zeile eine andere Funktion verbirgt, die sich aber für $y \to a$ alle wie in (i) verhalten.

Ferner lassen wir ab jetzt den Teil $y \to a$ genau dann weg, falls $y = L$ und $a = \infty$ ist.

Lemma 1.2.6.
Sei $\mathfrak{m} \in (-1,1)$ gegeben. Dann existiert ein $\widehat{L}_0 = \widehat{L}_0(G,\mathfrak{m}) > 0$, sodass es für jedes $L \geq \widehat{L}_0$ ein eindeutiges $z_L = z_L(G,\mathfrak{m}) \in (0,L)$ mit $v_L := v_{L,z_L} \in \mathcal{A}_L$ gibt, wobei die Funktion $v_{L,z}$ für ein beliebiges $z \in \mathbb{R}$ in Definition 1.2.4 eingeführt wurde. Dabei gilt

$$z_L = \frac{1}{2}(1-\mathfrak{m})L + o(1). \tag{1.28}$$

Falls G das kanonische Potenzial (1.4) ist, ist

$$z_L = \sqrt{2}\,\operatorname{artanh}\left(\frac{\cosh\left(\frac{L}{\sqrt{2}}\right) - \exp\left(\frac{L}{\sqrt{2}}\mathfrak{m}\right)}{\sinh\left(\frac{L}{\sqrt{2}}\right)}\right) \tag{1.29}$$

für alle $L \geq \widehat{L}_0$.

Bemerkung 1.2.7.
Die Funktion v_L ist für kein $L \geq \widehat{L}_0$ ein Minimierer von (1.10), da der Minimierer w_L nach Lemma 1.1.3 (i) mindestens in $C^3([-L,L])$ liegt, während v_L nur $H^1\big((-L,L)\big)$ angehört. Denn v_L ist in $x=0$ für kein $L \geq \widehat{L}_0$ differenzierbar.

Beweis von Lemma 1.2.6
Sei $L > 0$ und $\mu_L : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\mu_L(z) := \fint_{-L}^{L} v_{L,z}\,\mathrm{d}x$, welche wohldefiniert ist, da $v_{L,z} \in H^1\big((-L,L)\big)$ für alle $z \in \mathbb{R}$ gilt. Aus der Definition von $v_{L,z}$ und daraus, dass der kink v nach Lemma 1.2.1 insbesondere stetig, streng monoton wachsend und ungerade in $\mathbb{R}$ ist, folgt, dass

$$\mu_L(z) = \fint_{-L}^{L} v_{L,z}\,\mathrm{d}x \begin{cases} > 0, & \text{falls } z < \frac{L}{2}, \\ = 0, & \text{falls } z = \frac{L}{2}, \\ < 0, & \text{falls } z > \frac{L}{2}, \end{cases}$$

gilt und dass μ_L streng monoton fallend und stetig ist. Darüber hinaus können wir wegen Lemma 1.2.1 (ii) mit dem Satz von der monotonen Konvergenz folgern, dass $\mu_L(z) \xrightarrow[z\to\pm\infty]{} \mp 1$ gilt. Da ferner $\mathfrak{m} \in (-1,1)$ ist, folgt mit dem Zwischenwertsatz und der strengen Monotonie von μ_L, dass ein eindeutiges $z_L = z_L(G,\mathfrak{m}) \in \mathbb{R}$ mit

$$\mathfrak{m} = \mu_L(z_L) = \fint_{-L}^{L} v_{L,z_L}\,\mathrm{d}x$$

existiert. In Kombination mit $v_L := v_{L,z_L} \in H^1\big((-L,L)\big)$ und $v_L(-L) = v_L(L)$ erhalten wir somit $v_L \in \mathcal{A}_L$.

Sei nun $\alpha > 0$ und $G_\alpha(t) := \frac{\alpha^2}{2}\left(1-t^2\right)^2$ für $t \in \mathbb{R}$, welche offenbar $(\mathcal{G}1)$ bis $(\mathcal{G}3)$ erfüllt. Der zugehörige kink ist dann durch $v_\alpha(x) := \tanh(\alpha x)$ für $x \in \mathbb{R}$ gegeben. Ferner sei $\mu_{L,\alpha} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\mu_{L,\alpha}(z) := \fint_{-L}^{L} (v_\alpha)_{L,z}\,\mathrm{d}x$, wobei $(v_\alpha)_{L,z}$ analog zu $v_{L,z}$ in

Definition 1.2.4 definiert sei. Nach der vorigen Überlegung existiert auch hier ein eindeutiges $z_{L,\alpha} \in \mathbb{R}$ mit $\mu_{L,\alpha}(z_{L,\alpha}) = \mathfrak{m}$. Des Weiteren folgern wir aus (1.25), dass

$$\mu_{L,\sqrt{2c_H}}(z) \leq \mu_L(z) \leq \mu_{L,\sqrt{2C_H}}(z) \quad \text{für } z \leq \frac{L}{2}$$

und

$$\mu_{L,\sqrt{2C_H}}(z) \leq \mu_L(z) \leq \mu_{L,\sqrt{2c_H}}(z) \quad \text{für } z > \frac{L}{2}$$

gilt, sodass wir

$$\min\{z_{L,\sqrt{2c_H}}, z_{L,\sqrt{2C_H}}\} \leq z_L \leq \max\{z_{L,\sqrt{2c_H}}, z_{L,\sqrt{2C_H}}\} \tag{1.30}$$

erhalten. Um jetzt (1.28) für z_L zu beweisen, genügt es daher, dies für $z_{L,\alpha}$ für ein beliebiges $\alpha > 0$ zu zeigen. Dazu betrachten wir

$$\begin{aligned}
\mathfrak{m} &= \fint_{-L}^{L} (v_\alpha)_{L,z_{L,\alpha}} \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2L}\left(\int_{-L}^{0} -\tanh(\alpha(x+z_{L,\alpha}))\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{L} \tanh(\alpha(x-z_{L,\alpha}))\,\mathrm{d}x\right) \\
&= \frac{1}{2\alpha L}\left(\int_{-\alpha z_{L,\alpha}}^{\alpha(L-z_{L,\alpha})} \tanh(y)\,\mathrm{d}y + \int_{-\alpha z_{L,\alpha}}^{\alpha(L-z_{L,\alpha})} \tanh(y)\,\mathrm{d}y\right) \qquad (1.31) \\
&= \frac{1}{\alpha L}\int_{-\alpha z_{L,\alpha}}^{\alpha(L-z_{L,\alpha})} \tanh(y)\,\mathrm{d}y = \frac{1}{\alpha L}\int_{-\alpha z_{L,\alpha}}^{\alpha(L-z_{L,\alpha})} \frac{\sinh(y)}{\cosh(y)}\,\mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{\alpha L}\int_{\cosh(\alpha z_{L,\alpha})}^{\cosh(\alpha(L-z_{L,\alpha}))} \frac{1}{s}\,\mathrm{d}s = \frac{1}{\alpha L}\Big[\ln(s)\Big]_{\cosh(\alpha z_{L,\alpha})}^{\cosh(\alpha(L-z_{L,\alpha}))} \qquad (1.32) \\
&= \frac{1}{\alpha L}\ln\left(\frac{\cosh(\alpha(L-z_{L,\alpha}))}{\cosh(\alpha z_{L,\alpha})}\right),
\end{aligned}$$

wobei wir in (1.31) für das erste Integral die Substitution $y = -\alpha(x + z_{L,\alpha})$ bzw. für das zweite Integral die Substitution $y = \alpha(x - z_{L,\alpha})$ und in (1.32) die Substitution $s = \cosh(y)$ verwendet haben. Dann können wir die Gleichung unter Benutzung der Additionstheoreme für cosh wie folgt umformen:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{m} &= \frac{1}{\alpha L}\ln\left(\frac{\cosh(\alpha(L-z_{L,\alpha}))}{\cosh(\alpha z_{L,\alpha})}\right) \\
\Leftrightarrow \quad \exp(\alpha L\mathfrak{m}) &= \cosh(\alpha L) - \sinh(\alpha L)\tanh(\alpha z_{L,\alpha}) \\
\Leftrightarrow \quad \tanh(\alpha z_{L,\alpha}) &= \frac{\cosh(\alpha L) - \exp(\alpha L\mathfrak{m})}{\sinh(\alpha L)} \\
\Leftrightarrow \quad z_{L,\alpha} &= \frac{1}{\alpha}\operatorname{artanh}\left(\frac{\cosh(\alpha L) - \exp(\alpha L\mathfrak{m})}{\sinh(\alpha L)}\right). \qquad (1.33)
\end{aligned}$$

Wenn wir jetzt $\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$ wählen, ist G_α das kanonische Potenzial (1.4) und (1.33) entspricht dann der zu zeigenden Gleichung (1.29).

Jedenfalls untersuchen wir anschließend für ein $x > 0$ den Term

$$\begin{aligned}
\operatorname{artanh}\left(\frac{\cosh(x) - e^{\mathfrak{m}x}}{\sinh(x)}\right) &= \operatorname{artanh}\left(\frac{\frac{1}{2}\left(e^{x} + e^{-x}\right) - e^{\mathfrak{m}x}}{\frac{1}{2}\left(e^{x} - e^{-x}\right)}\right) \\
&= \operatorname{artanh}\left(\frac{1 + e^{-2x} - 2e^{(\mathfrak{m}-1)x}}{1 - e^{-2x}}\right) \\
&= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1 + \frac{1+e^{-2x}-2e^{(\mathfrak{m}-1)x}}{1-e^{-2x}}}{1 - \frac{1+e^{-2x}-2e^{(\mathfrak{m}-1)x}}{1-e^{-2x}}}\right) \\
&= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{2 - 2e^{(\mathfrak{m}-1)x}}{1 - e^{-2x}} \cdot \frac{1 - e^{-2x}}{-2e^{-2x} + 2e^{(\mathfrak{m}-1)x}}\right) \qquad (1.34) \\
&= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1 - e^{(\mathfrak{m}-1)x}}{-e^{-2x} + e^{(\mathfrak{m}-1)x}}\right) \\
&= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{e^{(\mathfrak{m}-1)x}} \cdot \frac{e^{(\mathfrak{m}-1)x}\left(1 - e^{(\mathfrak{m}-1)x}\right)}{-e^{-2x} + e^{(\mathfrak{m}-1)x}}\right) \\
&= \frac{1}{2}(1 - \mathfrak{m})x + R(x),
\end{aligned}$$

wobei

$$R(x) = \frac{1}{2}\ln\underbrace{\left(\frac{e^{(\mathfrak{m}-1)x}\left(1 - e^{(\mathfrak{m}-1)x}\right)}{-e^{-2x} + e^{(\mathfrak{m}-1)x}}\right)}_{\xrightarrow[x\to\infty]{} 1,\text{ da } \mathfrak{m}\in(-1,1)} \xrightarrow[x\to\infty]{} 0$$

gilt. Dann ergibt sich

$$z_{L,\alpha} \underset{(1.33),(1.34)}{=} \frac{1}{\alpha}\left(\frac{1}{2}(1 - \mathfrak{m})\alpha L + R(\alpha L)\right) = \frac{1}{2}(1 - \mathfrak{m})L + o(1).$$

Damit haben wir (1.28) für $z_{L,\alpha}$ für ein beliebiges $\alpha > 0$ nachgewiesen, sodass dies aufgrund von (1.30) ebenfalls für z_L bewiesen ist. Insbesondere ergibt sich daraus wegen $\mathfrak{m} \in (-1, 1)$, dass ein $\widehat{L}_0 = \widehat{L}_0(G, \mathfrak{m}) > 0$ existiert, sodass $z_L \in (0, L)$ für alle $L \geq \widehat{L}_0$ gilt. □

Somit haben wir eine nicht-triviale Funktion in $\mathcal{A}_L$ gefunden. Jedoch steht noch der Nachweis dessen aus, dass die Energie von v_L tatsächlich für $L \gg 1$ gleichmäßig beschränkt bleibt, das unser ursprüngliches Ziel war. Dabei werden wir sogar feststellen, dass $E_L(v_L)$ beliebig nahe an die Energie des Minimierers w_L aus Definition 1.1.2 für $L \gg 1$ kommt, obwohl v_L nach Bemerkung 1.2.7 kein Minimierer von (1.10) ist. Dies zeigen wir in Korollar 1.2.9. Im Wesentlichen wird darin nur die Idee der Modica-Mortola-Rechnung (1.21) und (1.22) präzisiert.

Als Basis dafür sowie für die meisten anderen nachfolgenden Ergebnisse benötigen wir zunächst das anschließende

Lemma 1.2.8.
Sei $\mathfrak{m} \in (-1,1)$. *Für die zugehörigen Minimierer* w_L *aus Definition 1.1.2 existieren*

$$M_L := \max_{[-L,L]} w_L \qquad \textit{und} \qquad m_L := \min_{[-L,L]} w_L$$

und für diese gelten

$$M_L = 1 + o(1) \qquad \textit{und} \qquad m_L = -1 + o(1). \tag{1.35}$$

Beweis
Die Existenzen von M_L und m_L ergeben sich unmittelbar aus der Stetigkeit von w_L und der Kompaktheit des Intervalls $[-L, L]$.

Bevor wir die Identitäten in (1.35) zeigen, machen wir die folgende Beobachtung: Es gibt eine Konstante $C > 0$ und ein $L_0 > 0$ mit $E_L(w_L) < C$ für alle $L \geq L_0$; denn nach Lemma 1.2.6 existiert ein $L_0 := \widehat{L}_0 > 0$, sodass es für alle $L \geq L_0$ die Funktion $v_L \in \mathcal{A}_L$ gibt, für die dann aufgrund der Minimierungseigenschaft von w_L offenbar $E_L(w_L) \leq E_L(v_L)$ für alle $L \geq L_0$ gilt. Außerdem erfüllt v_L per Konstruktion die Differentialgleichungen

$$(v_L)_x = \begin{cases} -\sqrt{2G(v_L)}, & \text{falls } x \in [-L, 0), \\ \sqrt{2G(v_L)}, & \text{falls } x \in [0, L], \end{cases}$$

infolgedessen die Modica-Mortola-Rechnung für v_L analog zu (1.21) und (1.22) die Gleichung

$$E_L(v_L) = 2 \int_{v_L(0)}^{v_L(L)} \sqrt{2G(t)}\,\mathrm{d}t \tag{1.36}$$

für alle $L \geq L_0$ liefert. Dabei folgt aus der Definition von v_L und Lemma 1.2.1 (ii), dass $|v_L| < 1$ in $[-L, L]$ gilt, sodass wir insgesamt

$$E_L(w_L) \leq 2 \int_{v(0)}^{v(L)} \sqrt{2G(t)}\,\mathrm{d}t \underset{(\mathcal{G}2)}{<} 2 \int_{-1}^{1} \sqrt{2G(t)}\,\mathrm{d}t =: C < \infty \tag{1.37}$$

für alle $L \geq L_0$ schließen.

Jetzt widmen wir uns den Behauptungen in (1.35). Zuerst zeigen wir, dass $M_L \geq 1 + o(1)$ und $m_L \leq -1 + o(1)$ gelten. Dazu nehmen wir z.B. an, dass $M_L \geq 1 + o(1)$ nicht gelte, d.h. es existiert ein $\delta \in (0,1)$ und eine Folge $(\tilde{L}_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}_{>0}$ mit $\lim_{n\to\infty} \tilde{L}_n = \infty$, sodass $1 - M_{\tilde{L}_n} \geq \delta$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Dabei sei ohne Einschränkung der Allgemeinheit $\delta < 1 - |\mathfrak{m}|$. Jetzt definieren wir

$$B_L^{(1)} := \{x \in [-L, L] \mid w_L(x) \in [\delta - 1, 1 - \delta]\}$$

sowie

$$B_L^{(2)} := \{x \in [-L, L] \mid w_L(x) < \delta - 1\}$$

für $L > 0$. Aufgrund der Annahme bzgl. der Folge $(\tilde{L}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist

$$[-\tilde{L}_n, \tilde{L}_n] = B^{(1)}_{\tilde{L}_n} \,\dot{\cup}\, B^{(2)}_{\tilde{L}_n} \tag{1.38}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Ferner finden wir ein $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass $\tilde{L}_n \geq L_0$ und daher die Abschätzung

$$\begin{aligned} C \quad &\underset{(1.37)}{>} \quad E_{\tilde{L}_n}(w_{\tilde{L}_n}) \\ &\underset{(1.38)}{=} \quad \int\limits_{B^{(1)}_{\tilde{L}_n}} \frac{1}{2}\left(w_{\tilde{L}_n}\right)_x^2 + G\left(w_{\tilde{L}_n}\right) \mathrm{d}x + \int\limits_{B^{(2)}_{\tilde{L}_n}} \frac{1}{2}\left(w_{\tilde{L}_n}\right)_x^2 + G\left(w_{\tilde{L}_n}\right) \mathrm{d}x \\ &\underset{(\mathcal{G}1),(\mathcal{G}2),(\mathcal{G}3)}{\geq} \quad \int\limits_{B^{(1)}_{\tilde{L}_n}} G(1-\delta)\,\mathrm{d}x = \mathcal{L}\left(B^{(1)}_{\tilde{L}_n}\right) \cdot \underbrace{G(1-\delta)}_{\underset{(\mathcal{G}2)}{>} 0} \end{aligned}$$

für alle $n \geq n_0$ gilt, wobei $\mathcal{L}$ das Lebesgue-Maß auf $\mathbb{R}$ bezeichne. Somit muss $\mathcal{L}\left(B^{(1)}_{\tilde{L}_n}\right)$ bzgl. $n \in \mathbb{N}$ gleichmäßig beschränkt sein, sodass $\mathcal{L}\left(B^{(2)}_{\tilde{L}_n}\right)$ dementsprechend bzgl. $n \in \mathbb{N}$ unbeschränkt sein muss. Dies liefert

$$\frac{1}{2\tilde{L}_n} \int\limits_{-\tilde{L}_n}^{\tilde{L}_n} w_{\tilde{L}_n}\,\mathrm{d}x \leq \delta - 1 + o(1) \quad \text{für } n \to \infty,$$

sodass wir wegen $\delta - 1 < -|\mathfrak{m}| \leq \mathfrak{m}$ (siehe Annahme bzgl. δ) einen Widerspruch dazu erhalten, dass $\fint_{-L}^{L} w_L\,\mathrm{d}x = \mathfrak{m}$ für alle $L > 0$ gilt. Daher war die Annahme falsch, d.h. es gilt $M_L \geq 1 + o(1)$. Analog zeigt man $m_L \leq -1 + o(1)$.

Um nun sogar jeweils Gleichheit zu erhalten, wenden wir erneut die Modica-Mortola-Rechnung analog zu (1.21) und (1.22) an: Dazu dürfen wir nach Bemerkung 1.1.4 ohne Einschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass $w_L(L) = M_L$ für alle $L > 0$ gilt. Zudem sei $x_L^{(min)} \in (-L, L)$ mit $w_L\left(x_L^{(min)}\right) = m_L$ für alle $L > 0$, sodass

$$\begin{aligned} 2\int\limits_{-1}^{1} \sqrt{2G(t)}\,\mathrm{d}t \underset{(1.37)}{>} E_L(w_L) &= \int\limits_{-L}^{x_L^{(min)}} \frac{1}{2}(w_L)_x^2 + G(w_L)\,\mathrm{d}x + \int\limits_{x_L^{(min)}}^{L} \frac{1}{2}(w_L)_x^2 + G(w_L)\,\mathrm{d}x \\ &\geq \int\limits_{-L}^{x_L^{(min)}} -(w_L)_x\sqrt{2G(w_L)}\,\mathrm{d}x + \int\limits_{x_L^{(min)}}^{L} (w_L)_x\sqrt{2G(w_L)}\,\mathrm{d}x \\ &= 2\int\limits_{m_L}^{M_L} \sqrt{2G(t)}\,\mathrm{d}t \end{aligned} \tag{1.39}$$

für alle $L \geq L_0$ folgt, wobei wir in (1.39) keine Aussagen bzgl. des Vorzeichens von $(w_L)_x$ benötigt haben. In Kombination mit $(\mathcal{G}2)$, $M_L \geq 1 + o(1)$ und $m_L \leq -1 + o(1)$ schließen wir dann, dass $M_L = 1 + o(1)$ und $m_L = -1 + o(1)$ gelten müssen. □

Damit können wir jetzt leicht eine Aussage darüber treffen, wie sich die minimale Energie verhält und wie nahe die Energie der Funktion v_L aus Lemma 1.2.6 an diese für $L \gg 1$ kommt.

Korollar 1.2.9. (Energie des Minimierers und von v_L)
Sei $\mathfrak{m} \in (-1,1)$. Dazu seien zum Einen das $\widehat{L}_0 > 0$ sowie die Funktion $v_L \in \mathcal{A}_L$ für $L \geq \widehat{L}_0$ aus Lemma 1.2.6 und zum Anderen der zugehörige Minimierer w_L aus Definition 1.1.2 für $L \geq \widehat{L}_0$ gegeben. Dann gelten

$$\inf_{u \in \mathcal{A}_L} E_L(u) = E_L(w_L) = 2 \int_{-1}^{1} \sqrt{2G(t)}\,\mathrm{d}t + o(1) \tag{1.40}$$

und

$$E_L(w_L) = E_L(v_L) + o(1). \tag{1.41}$$

Beweis
Für alle $L \geq \widehat{L}_0$ gilt

$$\begin{aligned} 2 \int_{-1}^{1} \sqrt{2G(t)}\,\mathrm{d}t \underset{(1.37)}{>} 2 \int_{v_L(0)}^{v_L(L)} \sqrt{2G(t)}\,\mathrm{d}t \underset{(1.36)}{=} E_L(v_L) \geq E_L(w_L) \\ \underset{(1.39)}{\geq} 2 \int_{m_L}^{M_L} \sqrt{2G(t)}\,\mathrm{d}t, \end{aligned} \tag{1.42}$$

das in Kombination mit (1.35) und der Stetigkeit von G die Behauptungen impliziert. $\square$

Darüber hinaus haben wir in Lemma 1.1.3 (ii) bewiesen, dass es Konstanten $\lambda_L, \theta_L \in \mathbb{R}$ gibt, sodass der Minimierer w_L die Euler-Lagrange-Gleichung

$$-(w_L)_{xx} + G'(w_L) = \lambda_L$$

und die daraus resultierende Gleichung

$$-\frac{1}{2}(w_L)_x^2 + G(w_L) = \lambda_L w_L + \theta_L$$

in $[-L, L]$ erfüllt. Aufgrund von Lemma 1.2.8 können wir etwas über die Größe der beiden Konstanten λ_L und θ_L für $L \gg 1$ aussagen.

Korollar 1.2.10.
Sei $\mathfrak{m} \in (-1,1)$. Zudem seien die zugehörigen Minimierer w_L aus Definition 1.1.2 und die Konstanten $\lambda_L, \theta_L \in \mathbb{R}$ aus Lemma 1.1.3 (ii) gegeben. Dann gelten $\lambda_L = o(1)$ und $\theta_L = o(1)$.

Beweis
Zu Beginn wählen wir zu jedem $L > 0$ zwei Punkte $x_L^{(max)}, x_L^{(min)} \in [-L, L]$ mit

$$w_L\left(x_L^{(max)}\right) = \max_{[-L,L]} w_L = M_L \quad \text{und} \quad w_L\left(x_L^{(min)}\right) = \min_{[-L,L]} w_L = m_L. \tag{1.43}$$

Anschließend setzen wir in die Identität (1.16) den Punkt $y \in \left\{x_L^{(max)}, x_L^{(min)}\right\}$ ein und erhalten

$$\begin{aligned}\theta_L &= -\frac{1}{2}(w_L)_x^2(y) + G(w_L(y)) - \lambda_L w_L(y) \\ &= G(w_L(y)) - \lambda_L w_L(y) \qquad (1.44) \\ &= \begin{cases} G(M_L) - \lambda_L M_L, & \text{falls } y = x_L^{(max)}, \\ G(m_L) - \lambda_L m_L, & \text{falls } y = x_L^{(min)}, \end{cases}\end{aligned}$$

wobei wir in (1.44) benutzt haben, dass y eine Extremstelle von w_L ist, sodass aufgrund von Lemma 1.1.3 (i), (iii) die Identität $(w_L)_x(y) = 0$ gilt. Dann ergibt sich

$$G(M_L) - \lambda_L M_L = \theta_L = G(m_L) - \lambda_L m_L. \tag{1.45}$$

Ferner folgt aus (1.35), $(\mathcal{G}2)$ und der Stetigkeit von G, dass

$$M_L - m_L = 2 + o(1), \quad G(M_L) = o(1) \quad \text{und} \quad G(m_L) = o(1) \tag{1.46}$$

gelten, das somit

$$\lambda_L \underset{(1.45)}{=} \frac{G(M_L) - G(m_L)}{M_L - m_L} = o(1) \tag{1.47}$$

impliziert.

Zudem erhalten wir

$$\theta_L \underset{(1.44)}{=} G(m_L) - \lambda_L m_L \underset{(1.35),(1.46),(1.47)}{=} o(1). \tag{1.48}$$

□

In Kombination mit Lemma 1.2.8 können wir bei erneuter Anwendung der Modica-Mortola-Rechnung folgern, wie viele Nullstellen der Minimierer w_L für $L \gg 1$ besitzen muss.

Lemma 1.2.11. (Nullstellen des Minimierers)
Seien $\mathfrak{m} \in (-1, 1)$ und die zugehörigen Minimierer w_L aus Definition 1.1.2 gegeben. Dann existiert ein $\widehat{L}_1 > 0$, sodass w_L genau zwei Nullstellen in $[-L, L)$ für alle $L \geq \widehat{L}_1$ besitzt.

Bemerkung 1.2.12.
In Lemma 1.2.11 wird die Aussage bewusst auf das Intervall $[-L, L)$ für alle $L \geq \widehat{L}_1$ bezogen; denn es ist möglich, dass eine der beiden Nullstellen in $-L$ und die andere in $(-L, L)$ für ein $L \geq \widehat{L}_1$ liegt, sodass w_L aufgrund der periodischen Randbedingung ebenfalls in L eine Nullstelle besitzt. Dann hat w_L insgesamt also drei Nullstellen in $[-L, L]$. Dieses Phänomen können wir durch die obige Einschränkung jedoch vermeiden.

Beweis von Lemma 1.2.11
Zunächst ergibt sich unmittelbar aus der periodischen Randbedingung $w_L(-L) = w_L(L)$ und (1.35), dass ein $L_0 > 0$ existiert, sodass w_L mindestens zwei Nullstellen in $[-L, L)$ für alle $L \geq L_0$ besitzt.

Zudem beobachten wir, dass wir für jede Nullstelle $x_L \in [-L, L)$ und jedes $L \geq L_0$ durch Einsetzen von x_L in die Gleichung (1.16)

$$-\frac{1}{2}(w_L)_x^2(x_L) + G(0) = \theta_L$$

erhalten. Da $\theta_L = o(1)$ nach Korollar 1.2.10 und $G(0) > 0$ wegen $(\mathcal{G}2)$ gelten, finden wir ein $L_1 > L_0$, sodass

$$(w_L)_x(x_L) \neq 0 \tag{1.49}$$

für alle Nullstellen x_L von w_L und alle $L \geq L_1$ gilt.

Nun nehmen wir an, dass eine Folge $(\tilde{L}_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}_{\geq L_1}$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} \tilde{L}_n = \infty$ existiert, sodass $w_{\tilde{L}_n}$ mindestens drei Nullstellen in $[-\tilde{L}_n, \tilde{L}_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ besitzt. Wegen (1.49), $w_L(-L) = w_L(L)$ und $(w_L)_x(-L) = (w_L)_x(L)$ für alle $L > 0$ nach Lemma 1.1.3 (iii) muss $w_{\tilde{L}_n}$ sogar mindestens vier Nullstellen in $[-\tilde{L}_n, \tilde{L}_n)$, etwa $c_{\tilde{L}_n} < d_{\tilde{L}_n} < e_{\tilde{L}_n} < f_{\tilde{L}_n}$, für alle $n \in \mathbb{N}$ besitzen. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit gelte dabei

$$(w_{\tilde{L}_n})_x(c_{\tilde{L}_n}), (w_{\tilde{L}_n})_x(e_{\tilde{L}_n}) > 0 \qquad \text{und} \qquad (w_{\tilde{L}_n})_x(d_{\tilde{L}_n}), (w_{\tilde{L}_n})_x(f_{\tilde{L}_n}) < 0$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Da für alle $L > 0$ die $2L$-periodische Fortsetzung $\widehat{w}_L$ von w_L aus Bemerkung 1.1.4 mindestens in $C^3(\mathbb{R})$ liegt, existieren nach dem Mittelwertsatz somit Extrempunkte $\tilde{c}_{\tilde{L}_n} \in (c_{\tilde{L}_n}, d_{\tilde{L}_n})$, $\tilde{d}_{\tilde{L}_n} \in (d_{\tilde{L}_n}, e_{\tilde{L}_n})$, $\tilde{e}_{\tilde{L}_n} \in (e_{\tilde{L}_n}, f_{\tilde{L}_n})$ und $\tilde{f}_{\tilde{L}_n} \in [-\tilde{L}_n, \tilde{L}_n] \setminus [c_{\tilde{L}_n}, f_{\tilde{L}_n}]$, wobei ohne Einschränkung der Allgemeinheit $\tilde{f}_{\tilde{L}_n} \in (f_{\tilde{L}_n}, \tilde{L}_n]$ gelte, mit $(w_{\tilde{L}_n})_x(x) = 0$ für $x \in \{\tilde{c}_{\tilde{L}_n}, \tilde{d}_{\tilde{L}_n}, \tilde{e}_{\tilde{L}_n}, \tilde{f}_{\tilde{L}_n}\}$ und

$$w_{\tilde{L}_n}(\tilde{c}_{\tilde{L}_n}), w_{\tilde{L}_n}(\tilde{e}_{\tilde{L}_n}) > 0 \qquad \text{und} \qquad w_{\tilde{L}_n}(\tilde{d}_{\tilde{L}_n}), w_{\tilde{L}_n}(\tilde{f}_{\tilde{L}_n}) < 0 \tag{1.50}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$.

Dabei stellen wir fest, dass sich für jeden kritischen Punkt $y_L \in [-L, L]$ von w_L, der also $(w_L)_x(y_L) = 0$ erfüllt, und jedes $L > 0$ durch Einsetzen von y_L in die Gleichung (1.16)

$$G(w_L(y_L)) = \lambda_L w_L(y_L) + \theta_L$$

ergibt. Da

$$|w_L(y_L)| \leq \max\{|M_L|, |m_L|\} \underset{(1.35)}{=} 1 + o(1)$$

sowie $\lambda_L = o(1)$ und $\theta_L = o(1)$ nach Korollar 1.2.10 gelten, folgt $G(w_L(y_L)) = o(1)$ und wegen $(\mathcal{G}2)$ somit

$$|w_L(y_L)| = 1 + o(1) \tag{1.51}$$

gleichmäßig für alle kritischen Punkte y_L von w_L.

Zusammen mit (1.50) schließen wir daher

$$w_{\tilde{L}_n}(\tilde{c}_{\tilde{L}_n}) = 1 + o(1) \quad \text{für } n \to \infty \qquad \text{und} \qquad w_{\tilde{L}_n}(\tilde{e}_{\tilde{L}_n}) = 1 + o(1) \quad \text{für } n \to \infty$$

sowie

$$w_{\tilde{L}_n}(\tilde{d}_{\tilde{L}_n}) = -1 + o(1) \quad \text{für } n \to \infty \qquad \text{und} \qquad w_{\tilde{L}_n}(\tilde{f}_{\tilde{L}_n}) = -1 + o(1) \quad \text{für } n \to \infty,$$

sodass wir mit ähnlichen Abschätzungen wie in der Modica-Mortola-Rechnung (1.21) und (1.22) die Ungleichungskette

$$\begin{aligned}
&E_{\tilde{L}_n}(w_{\tilde{L}_n}) \\
&\geq \int_{\tilde{c}_{\tilde{L}_n}}^{\tilde{d}_{\tilde{L}_n}} \frac{1}{2}(w_{\tilde{L}_n})_x^2 + G(w_{\tilde{L}_n})\,\mathrm{d}x + \int_{\tilde{d}_{\tilde{L}_n}}^{\tilde{e}_{\tilde{L}_n}} \frac{1}{2}(w_{\tilde{L}_n})_x^2 + G(w_{\tilde{L}_n})\,\mathrm{d}x + \int_{\tilde{e}_{\tilde{L}_n}}^{\tilde{f}_{\tilde{L}_n}} \frac{1}{2}(w_{\tilde{L}_n})_x^2 + G(w_{\tilde{L}_n})\,\mathrm{d}x \\
&\geq \int_{\tilde{c}_{\tilde{L}_n}}^{\tilde{d}_{\tilde{L}_n}} -(w_{\tilde{L}_n})_x \sqrt{2G(w_{\tilde{L}_n})}\,\mathrm{d}x + \int_{\tilde{d}_{\tilde{L}_n}}^{\tilde{e}_{\tilde{L}_n}} (w_{\tilde{L}_n})_x \sqrt{2G(w_{\tilde{L}_n})}\,\mathrm{d}x + \int_{\tilde{e}_{\tilde{L}_n}}^{\tilde{f}_{\tilde{L}_n}} -(w_{\tilde{L}_n})_x \sqrt{2G(w_{\tilde{L}_n})}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{w_{\tilde{L}_n}(\tilde{d}_{\tilde{L}_n})}^{w_{\tilde{L}_n}(\tilde{c}_{\tilde{L}_n})} \sqrt{2G(t)}\,\mathrm{d}t + \int_{w_{\tilde{L}_n}(\tilde{d}_{\tilde{L}_n})}^{w_{\tilde{L}_n}(\tilde{e}_{\tilde{L}_n})} \sqrt{2G(t)}\,\mathrm{d}t + \int_{w_{\tilde{L}_n}(\tilde{f}_{\tilde{L}_n})}^{w_{\tilde{L}_n}(\tilde{e}_{\tilde{L}_n})} \sqrt{2G(t)}\,\mathrm{d}t \\
&= 3\int_{-1}^{1} \sqrt{2G(t)}\,\mathrm{d}t + o(1)
\end{aligned}$$

für $n \to \infty$ erhalten, die aber (1.40) widerspricht, da $G > 0$ in $(-1, 1)$ wegen $(\mathcal{G}2)$ gilt. Daher war die Annahme falsch, d.h. es existiert ein $\widehat{L}_1 > L_1$, sodass w_L genau zwei Nullstellen für alle $L \geq \widehat{L}_1$ besitzt. □

Die bisherigen Ergebnisse ermöglichen nun einige Annahmen.

Voraussetzungen 1.2.13. (Annahmen und Bezeichnungen, Teil 1)
Sei $\mathfrak{m} \in (-1, 1)$. Zudem seien die zugehörigen Minimierer w_L aus Definition 1.1.2 sowie die zugehörigen Konstanten $\widehat{L}_0 > 0$ aus Lemma 1.2.6 und $\widehat{L}_1 > 0$ aus Lemma 1.2.11 gegeben. Dann treffen wir folgende Annahmen bzw. führen folgende Bezeichnungen ein:

(i) Für $L \geq \widehat{L}_1$ besitzt w_L nach Lemma 1.2.11 genau zwei Nullstellen in $[-L, L)$. Dabei können wir aufgrund von Bemerkung 1.1.4 ohne Einschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass es zum Einen ein $x_L \in (0, L)$ gibt, sodass x_L und $-x_L$ gerade die Nullstellen von w_L in $[-L, L]$ sind. Zum Anderen gelte $w_L(-L) = w_L(L) > 0$.

(ii) *Sei* $\widehat{L}_2 > \max\{\widehat{L}_0, \widehat{L}_1\}$ *so groß, dass*

$$(w_L)_x(-x_L) < 0 \qquad \text{und} \qquad (w_L)_x(x_L) > 0 \tag{1.52}$$

für alle $L \geq \widehat{L}_2$ *gilt, das nach (1.49) möglich ist, und dass darüber hinaus*

$$|w_L(y_L)| \in \left(\frac{3}{4}, \frac{5}{4}\right) \tag{1.53}$$

für alle kritischen Punkte $y_L \in [-L, L]$ *von* w_L *für alle* $L \geq \widehat{L}_2$ *gilt, das nach (1.51) möglich ist.*

Außerdem existiert die Funktion $v_L \in \mathcal{A}_L$ *aus Lemma 1.2.6 für alle* $L \geq \widehat{L}_2$.

Unter diesen Annahmen betrachten wir jetzt für eine Weile die Funktion v_{L,x_L} (statt wie bisher v_L aus Lemma 1.2.6) für $L \gg 1$, wobei wir erneut die Definition 1.2.4 mit $z = x_L$ aus den Voraussetzungen 1.2.13 (i) verwenden. Per Konstruktion besitzt diese Funktion genau dieselben Nullstellen wie der Minimierer w_L und weist noch einige weitere Ähnlichkeiten zu ihm auf, jedoch gehört v_{L,x_L} nicht der Menge $\mathcal{A}_L$ an, da sie die Mittelwertbedingung nicht erfüllt.

Dennoch können wir zeigen, dass sie beliebig nahe an den Minimierer w_L hinsichtlich der $C^1([-L, L])$-Norm für $L \gg 1$ kommt. Diese Erkenntnis entspricht dem **ersten Hauptresultat dieses Kapitels**. Später zeigen wir dies dann auch für v_L, aber unter stärkeren Voraussetzungen.

Satz 1.2.14.
Sei $\mathfrak{m} \in (-1, 1)$. *Zudem seien die zugehörigen Minimierer* w_L *aus Definition 1.1.2, die Voraussetzungen 1.2.13 und die Funktion* v_{L,x_L} *unter Verwendung der Definition 1.2.4 mit* $z = x_L$ *für* $L \geq \widehat{L}_2$ *gegeben. Dann gilt*

$$\|w_L - v_{L,x_L}\|_{C^1([-L,L])} = o(1), \tag{1.54}$$

wobei wir $(v_{L,x_L})_x(0) := 0$ *für alle* $L \geq \widehat{L}_2$ *definieren.*

Nützlich für den Beweis dieses Satzes sind Kenntnisse über die Symmetrie des Minimierers w_L. Insbesondere sind dabei folgende Punkte von Interesse.

Definition 1.2.15.
Sei $\mathfrak{m} \in (-1,1)$. Zudem seien die zugehörigen Minimierer w_L aus Definition 1.1.2, ihre $2L$-periodischen Fortsetzungen $\widehat{w}_L$ aus Bemerkung 1.1.4 und die Voraussetzungen 1.2.13 gegeben. Dann definieren wir

$$a_L(\pm x_L + 2kL) := \max\{x \in (-\infty, \pm x_L + 2kL) \mid (\widehat{w}_L)_x(x) = 0\}$$

sowie

$$b_L(\pm x_L + 2kL) := \min\{x \in (\pm x_L + 2kL, \infty) \mid (\widehat{w}_L)_x(x) = 0\}$$

für $k \in \mathbb{Z}$ und für alle $L \geq \widehat{L}_2$.

Bemerkung 1.2.16.

a) Die Wohldefiniertheit der Punkte $a_L(\pm x_L + 2kL)$ und $b_L(\pm x_L + 2kL)$ für ein $k \in \mathbb{Z}$ und $L \geq \widehat{L}_2$ ergibt sich zum Einen daraus, dass die $2L$-periodische Fortsetzung $\widehat{w}_L$ von w_L genau in $\pm x_L + 2mL$, $m \in \mathbb{Z}$, Nullstellen besitzt und mindestens in $C^3(\mathbb{R})$ liegt, sodass der Mittelwertsatz die Existenz eines kritischen Punktes von $\widehat{w}_L$ zwischen je zwei aufeinander folgenden Nullstellen impliziert, und zum Anderen aus (1.52).

b) Sei eine Nullstelle $c_L := \pm x_L + 2kL$ von $\widehat{w}_L$ für ein $k \in \mathbb{Z}$ und $L \geq \widehat{L}_2$ gegeben. Dann entspricht $a_L(c_L)$ bzw. $b_L(c_L)$ dem bzgl. c_L nächstkleineren bzw. nächstgrößeren kritischen Punkt von $\widehat{w}_L$.

c) Seien $c_L, d_L \in \mathbb{R}$ zwei benachbarte Nullstellen von $\widehat{w}_L$ mit $c_L < d_L$ für ein $L \geq \widehat{L}_2$, dann gilt

$$c_L < b_L(c_L) \leq a_L(d_L) < d_L.$$

Im folgenden Lemma sammeln wir nun einige Symmetrie-Eigenschaften des Minimierers w_L.

Lemma 1.2.17. (Symmetrie der Minimierer)
Sei $\mathfrak{m} \in (-1,1)$. Zudem seien die zugehörigen Minimierer w_L aus Definition 1.1.2, ihre $2L$-periodischen Fortsetzungen $\widehat{w}_L$ aus Bemerkung 1.1.4 und die Voraussetzungen 1.2.13 gegeben. Dann existiert ein $\widehat{L}_3 > 0$, sodass Folgendes für alle $L \geq \widehat{L}_3$ gilt:

(i) Die Funktion $\widehat{w}_L$ ist bzgl. der vertikalen Achse durch $d_L \in \{-L, 0\}$ symmetrisch, d.h. es gilt

$$\widehat{w}_L(x + d_L) = \widehat{w}_L(-x + d_L) \tag{1.55}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$.

> *(ii) Unter Verwendung der Bezeichnungen aus Definition 1.2.15 gelten die Identitäten*
>
> $$a_L(-x_L) = -L, \qquad b_L(-x_L) = a_L(x_L) = 0 \qquad \textit{und} \qquad b_L(x_L) = L \tag{1.56}$$
>
> *sowie die Ungleichungen*
>
> $$(w_L)_x < 0 \quad \textit{in } (-L, 0) \qquad \textit{und} \qquad (w_L)_x > 0 \quad \textit{in } (0, L). \tag{1.57}$$
>
> *(iii) Unter Verwendung der Bezeichnungen m_L, M_L aus Lemma 1.2.8 gelten*
>
> $$w_L(0) = m_L > -1 \qquad \textit{und} \qquad w_L(-L) = M_L < 1. \tag{1.58}$$

Beweis
(i), (ii) Zunächst beobachten wir, dass es für den Nachweis von (1.55) aufgrund der $2L$-Periodizität von $\widehat{w}_L$ genügt, die Identität (1.55) für $d_L = -L$ und $x \in [x_L - 2L, -x_L]$ bzw. für $d_L = 0$ und $x \in [-x_L, x_L]$ für alle $L \geq \widehat{L}_3$ mit einem noch zu bestimmenden $\widehat{L}_3 > 0$ zu zeigen, wobei wir uns hier nur auf den letzteren Fall beschränken. Insbesondere zeigen wir dabei, dass $b_L(-x_L) = a_L(x_L) = 0$ sowie $(w_L)_x < 0$ in $(-x_L, 0)$ und $(w_L)_x > 0$ in $(0, x_L)$ für alle $L \geq \widehat{L}_3$ gelten. Der Nachweis der übrigen Identitäten in (1.56) und der übrigen Ungleichungen in (1.57) verläuft dann analog.

Dazu sei $L \geq L_0 := \widehat{L}_2$ $\big(\widehat{L}_2$ aus den Voraussetzungen 1.2.13 (ii)$\big)$. Dann schließen wir aus (1.16) und (1.44), dass

$$(w_L)_x^2 = 2G(w_L) - 2G(m_L) - 2\lambda_L(w_L - m_L) \tag{1.59}$$

in $[-x_L, x_L]$ gilt, und, da wegen (1.52) und der Definition von $b_L(-x_L)$ und $a(x_L)$ die Ungleichungen $(w_L)_x < 0$ in $[-x_L, b_L(-x_L))$ und $(w_L)_x > 0$ in $(a_L(x_L), x_L]$ gelten, folgt somit

$$(w_L)_x = -\sqrt{2}\,\sqrt{G(w_L) - G(m_L) - \lambda_L(w_L - m_L)} \tag{1.60}$$

in $[-x_L, b_L(-x_L)]$ bzw.

$$(w_L)_x = \sqrt{2}\,\sqrt{G(w_L) - G(m_L) - \lambda_L(w_L - m_L)} \tag{1.61}$$

in $[a_L(x_L), x_L]$ für alle $L \geq L_0$. Zusammen mit $(w_L)_x(y) = 0$ für $y \in \{b_L(-x_L), a_L(x_L)\}$ ergibt sich daher für die C^2-Funktion

$$g_L : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad g_L(t) := G(t) - G(m_L) - \lambda_L(t - m_L), \tag{1.62}$$

dass einerseits

$$g_L(w_L(b_L(-x_L))) = 0 \qquad \text{und} \qquad g_L(t) > 0 \ \text{ für } \ t \in (w_L(b_L(-x_L)), 0] \tag{1.63}$$

und andererseits

$$g_L(w_L(a_L(x_L))) = 0 \qquad \text{und} \qquad g_L(t) > 0 \ \text{ für } \ t \in (w_L(a_L(x_L)), 0]$$

gilt, sodass wir

$$\eta_L := w_L(b_L(-x_L)) = w_L(a_L(x_L)) \underset{(1.53)}{\in} \left(-\frac{5}{4}, -\frac{3}{4}\right) \tag{1.64}$$

schließen. Anschließend definieren wir

$$\tilde{w}_L : [-x_L, -a_L(x_L)] \to \mathbb{R}, \quad \tilde{w}_L(x) := w_L(-x),$$

welche dann der Gleichung

$$(\tilde{w}_L)_x \underset{(1.61)}{=} -\sqrt{2}\,\sqrt{G(\tilde{w}_L) - G(m_L) - \lambda_L(\tilde{w}_L - m_L)} = -\sqrt{2}\,\sqrt{g_L(\tilde{w}_L)}$$

in $[-x_L, -a_L(x_L)]$ mit $\tilde{w}_L(-x_L) = 0$ genügt. In (1.60) haben wir hergeleitet, dass w_L die gleiche Differentialgleichung in $[-x_L, b_L(-x_L)]$ mit $w_L(-x_L) = 0$ erfüllt. Zudem ist $\sqrt{g_L}$ in $(\eta_L, 0]$ lokal Lipschitz-stetig wegen (1.63) und $g_L \in C^2(\mathbb{R})$, sodass mit dem Satz von Picard-Lindelöf folgt, dass

$$w_L(x) = \tilde{w}_L(x) = w_L(-x) \tag{1.65}$$

für alle $x \in \big[-x_L, \min\{b_L(-x_L), -a_L(x_L)\}\big]$ gilt. In Kombination mit $w_L(b_L(-x_L)) = w_L(a_L(x_L)) = \tilde{w}_L(-a_L(x_L))$ und der strengen Monotonie von w_L in $[-x_L, b_L(-x_L)]$ und $[a_L(x_L), x_L]$, das insbesondere die strenge Monotonie von $\tilde{w}_L$ in $[-x_L, -a_L(x_L)]$ impliziert, ergibt sich daher $b_L(-x_L) = -a_L(x_L)$ und daraus wiederum

$$b_L(-x_L) \le 0 \le a_L(x_L) \quad \text{und} \quad |(-x_L) - b_L(-x_L)| = |x_L - a_L(x_L)| \tag{1.66}$$

für alle $L \ge L_0$. Daher bleibt zu zeigen, dass ein $L_1 > L_0$ existiert, sodass $b_L(-x_L) = 0 = a_L(x_L)$ für alle $L \ge L_1$ gilt; denn dann erhalten wir insbesondere (1.55) für $d_L = 0$ und $x \in [-x_L, x_L]$ aus (1.65) sowie die Ungleichungen $(w_L)_x < 0$ in $(-x_L, 0)$ und $(w_L)_x > 0$ in $(0, x_L)$ aufgrund der Definition von $b_L(-x_L)$ und $a_L(x_L)$ für alle $L \ge L_1$.

Um dies zu beweisen, betrachten wir die Funktion g_L für $L \gg 1$ näher: Sei $K > \frac{5}{4}$ beliebig, aber fest. Dann wissen wir einerseits, dass g_L in $\eta_L \in \left(-\frac{5}{4}, -\frac{3}{4}\right) \subseteq (-K, 0)$ nach (1.63) und (1.64) eine Nullstelle für alle $L \ge L_0$ besitzt. Andererseits folgern wir mit Lemma 1.2.8, Korollar 1.2.10 und ($\mathcal{G}2$), dass

$$\max_{t \in [-K,0]} \{|G(m_L) + \lambda_L(t - m_L)|\} = o(1)$$

gilt, sodass wir zusammen mit der zweimaligen stetigen Differenzierbarkeit von G, ($\mathcal{G}2$) und ($\mathcal{G}3$) ein hinreichend großes $L_1 > L_0$ wählen können, sodass

$$t \to g_L(t) = G(t) - \Big(G(m_L) + \lambda_L(t - m_L)\Big)$$

höchstens zwei Nullstellen in $(-K, 0)$, etwa in $c_L, e_L \in (-K, 0)$ mit $c_L \le e_L$, für alle $L \ge L_1$ besitzt, sodass

$$g_L > 0 \quad \text{in } [-K, c_L) \cup (e_L, 0] \qquad \text{und} \qquad g_L < 0 \quad \text{in } (c_L, e_L), \tag{1.67}$$

$c_L = -1 + o(1)$ und $e_L = -1 + o(1)$ sowie $G''(c_L) > 0$ und $G''(e_L) > 0$ für alle $L \geq L_1$ gelten. Dabei implizieren (1.63) und (1.64), dass $e_L = \eta_L$ für alle $L \geq L_1$ ist. Jedoch ist $c_L = e_L = \eta_L$ nicht möglich; denn ansonsten ist η_L mindestens eine zweifache Nullstelle von g_L bzw. wegen $g_L''(\eta_L) = G''(\eta_L) > 0$ sogar genau eine zweifache Nullstelle von g_L, sodass mit einem ähnlichen Argument wie im 3. Fall der nachfolgenden Fallunterscheidung ein Widerspruch hergeleitet werden kann. Deshalb gilt $c_L < \eta_L$ und beide sind jeweils einfache Nullstellen von g_L für alle $L \geq L_1$.

Sei nun $L \geq L_1$ und wir nehmen an, dass $b_L(-x_L) = 0 = a_L(x_L)$ nicht gelte. So erhalten wir aufgrund von (1.66) die Ungleichung $b_L(-x_L) < a_L(x_L)$. Ausgehend von der Gleichung (1.59) diskutieren wir nun das Verhalten von w_L in $[b_L(-x_L), a_L(x_L)]$:

1.Fall: $\exists\, x \in [b_L(-x_L), a_L(x_L)] :\ w_L(x) < \eta_L$
Nach dem Zwischenwertsatz gibt es dann ein $y \in [b_L(-x_L), a_L(x_L)]$ mit $w_L(y) \in (c_L, \eta_L)$ und somit

$$0 \underset{(1.67)}{>} 2g_L(w_L(y)) \underset{(1.59)}{=} (w_L)_x^2(y) \geq 0,$$

das also einen Widerspruch liefert.

2.Fall: $\exists\, x \in [b_L(-x_L), a_L(x_L)] :\ w_L(x) > \eta_L$
Dann existieren insbesondere nach dem Mittelwertsatz $y, z \in [b_L(-x_L), a_L(x_L)]$ mit $y < z$, $(w_L)_x > 0$ in $[y, z]$ und $w_L(y) > \eta_L$, sodass aus (1.59) folgt, dass w_L die Gleichung

$$(w_L)_x = \sqrt{2}\,\sqrt{g_L(w_L)}$$

in $[y, z]$ erfüllt. Weil $g_L > 0$ in $(\eta_L, 0]$ nach (1.67) gilt, erfüllt w_L diese Gleichung mindestens bis zur nächsten Nullstelle von w_L, also mindestens in $[y, x_L]$. Ferner gilt dann $(w_L)_x > 0$ in $[y, x_L]$, das aber $(w_L)_x(a_L(x_L)) = 0$ widerspricht.

3.Fall: $w_L \equiv \eta_L$ in $[b_L(-x_L), a_L(x_L)]$
So erhalten wir $\eta_L = m_L$, da $w_L > w_L(b_L(-x_L)) = \eta_L$ in $[-L, L] \setminus [b_L(-x_L), a_L(x_L)]$ gilt. (Diese Identität ist natürlich auch richtig, falls $b_L(-x_L) = a_L(x_L)$ gilt.) Jedenfalls gilt in dieser Situation deshalb insbesondere

$$0 = (w_L)_{xx}(x) \underset{(1.15)}{=} G'(w_L(x)) - \lambda_L = G'(m_L) - \lambda_L = g_L'(m_L)$$

für alle $x \in [b_L(-x_L), a_L(x_L)]$ und, da per Definition ebenfalls $g_L(m_L) = 0$ und nach Annahme $g_L''(m_L) = G''(\eta_L) > 0$ gelten, besitzt g_L in m_L eine Nullstelle von genau zweiter Ordnung. Damit existiert eine stetige Funktion $h_L : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$g_L(x) = h_L(x)(x - m_L)^2 \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R} \qquad \text{und} \qquad h_L(m_L) > 0. \tag{1.68}$$

Darüber hinaus ist h_L positiv und gleichmäßig beschränkt in $[m_L, 0]$, d.h. wir finden ein $\sigma > 0$ mit

$$0 < h_L \leq \sigma \tag{1.69}$$

in $[m_L, 0]$. Wegen (1.60), $w_L > m_L$ in $[-x_L, b(-x_L))$, $w_L \equiv m_L$ in $[b(-x_L), a(x_L)]$ und $m_L = \eta_L < 0$ nach (1.64) erfüllt w_L die Differential(un-)gleichung

$$
\begin{aligned}
(w_L)_x = -\sqrt{2}\,\sqrt{g_L(w_L)} \underset{(1.68),(1.69)}{\geq} -\sqrt{2\sigma}(w_L - m_L) &= -\sqrt{2\sigma}(-m_L)\left(1 + \frac{w_L}{-m_L}\right) \\
&\geq -\sqrt{2\sigma}(-m_L)\left(1 - \left(\frac{w_L}{-m_L}\right)^2\right) \qquad (1.70)
\end{aligned}
$$

und somit

$$
\left(\frac{w_L}{-m_L}\right)_x \geq -\sqrt{2\sigma}\left(1 - \left(\frac{w_L}{-m_L}\right)^2\right)
$$

in $[-x_L, a_L(x_L)]$ mit $w_L(-x_L) = 0$, wobei wir in (1.70) die Ungleichung $1 + x \leq 1 - x^2$ für alle $x \in [-1, 0]$ und $\frac{w_L}{-m_L} \in [-1, 0]$ in $[-x_L, a_L(x_L)]$ verwendet haben. Dies impliziert $\frac{w_L}{-m_L} \geq u_L$ in $[-x_L, a_L(x_L)]$, wobei u_L die eindeutig bestimmte Lösung des Anfangswertproblems

$$
\begin{cases}
(u_L)_x = -\sqrt{2\sigma}\left(1 - u_L^2\right) & \text{in } [-x_L, a_L(x_L)], \\
u_L(-x_L) = 0,
\end{cases}
$$

ist. Es gilt

$$
u_L(x) = -\tanh\left(\sqrt{2\sigma}(x + x_L)\right)
$$

für $x \in [-x_L, a_L(x_L)]$, sodass wir dann insgesamt

$$
\frac{w_L(x)}{-m_L} \geq u_L(x) = -\tanh\left(\sqrt{2\sigma}(x + x_L)\right)
$$

bzw.

$$
w_L(x) \geq -\tanh\left(\sqrt{2\sigma}(x + x_L)\right)(-m_L) > (-1)(-m_L) = m_L
$$

für alle $x \in [-x_L, a_L(x_L)]$ folgern. Das ist aber ein Widerspruch zu $w_L \equiv m_L$ in $[b_L(-x_L), a_L(x_L)]$.

Insgesamt haben alle drei möglichen Fälle zu einem Widerspruch geführt, also war unsere Annahme falsch, sodass in Kombination mit (1.66) demnach $b_L(-x_L) = a_L(x_L) = 0$ für alle $L \geq L_1$ gelten muss.

(iii) Wir zeigen hier nur, dass $w_L(0) = m_L > -1$ für alle $L \geq L_1$ gilt, da man die andere Aussage in (1.58) mit ähnlichen Argumenten beweist.

Dazu sei $L \geq L_1$. Wie zu Beginn des 3. Falls im Beweis von (i), (ii) erwähnt, gilt dann $w_L(0) = m_L$. Jetzt nehmen wir an, dass $m_L \leq -1$ gelte, und unterscheiden zwei Fälle bzgl. m_L:

1.Fall: $m_L = -1$
So vereinfacht sich $g_L(t)$, $t \in \mathbb{R}$, wegen $(\mathcal{G}2)$ zu

$$
g_L(t) = G(t) - \lambda_L(t + 1),
$$

sodass $\lambda_L \geq 0$ gelten muss. (Denn falls $\lambda_L < 0$ ist, ist $-\lambda_L(t+1) > 0$ für alle $t \in [0, \infty)$, sodass g_L wegen ($\mathcal{G}2$) in $[0, \infty)$ keine Nullstelle besitzt. Aber nach (ii) ist $w_L(-L) = w_L(a_L(-x_L)) \in [0, \infty)$ wegen $(w_L)_x(-L) = (w_L)_x(a_L(-L)) = 0$ und (1.59) eine Nullstelle von g_L, das ein Widerspruch ist.) Einerseits folgt dann

$$(w_L)_{xx}(0) \underset{(1.15)}{=} G'(w_L(0)) - \lambda_L = G'(\underbrace{m_L}_{=\,-1}) - \lambda_L \underset{(\mathcal{G}2)}{=} -\lambda_L \leq 0,$$

aber andererseits ist $(w_L)_{xx}(0) \geq 0$, da der Minimierer w_L in $0 \in [-L, L]$ sein globales Minimum annimmt, sodass dies insgesamt $\lambda_L = 0$ liefert. Dies impliziert wiederum, dass $g_L = G$ in $\mathbb{R}$ gilt, sodass g_L in $m_L = -1$ wegen ($\mathcal{G}2$) und ($\mathcal{G}3$) eine Nullstelle von genau zweiter Ordnung besitzt, das wie im 3. Fall des Beweises von von (i), (ii) einen Widerspruch liefert.

2.Fall: $m_L < -1$
Dann muss obendrein $M_L < 1$ gelten; denn ansonsten erhalten wir mit der Ungleichungskette (1.42) in Kombination mit ($\mathcal{G}2$) einen Widerspruch, da $L \geq L_1 \geq \widehat{L}_2 \geq \widehat{L}_0$ ist. Zudem existiert nach (i), (ii) und wegen $w_L(0) = m_L < -1$ ein $\epsilon \in (0, x_L)$, sodass

$$w_L(x) \begin{cases} < -1, & \text{falls } x \in (-\epsilon, \epsilon), \\ \geq -1, & \text{falls } x \in [-L, L] \setminus (-\epsilon, \epsilon), \end{cases} \tag{1.71}$$

gilt. Anschließend definieren wir zu $\delta \in [0, L-\epsilon]$ die Funktion $\tilde{w}_{L,\delta} : [-L, L] \to \mathbb{R}$ durch

$$\tilde{w}_{L,\delta}(x) := \begin{cases} w_L(x+\delta), & \text{falls } x \in [-L, -\delta-\epsilon), \\ -1, & \text{falls } x \in [-\delta-\epsilon, \delta+\epsilon], \\ w_L(x-\delta), & \text{falls } x \in (\delta+\epsilon, L], \end{cases}$$

für die $\tilde{w}_{L,\delta} \in H^1\big((-L, L)\big)$ wegen (1.71) und $\tilde{w}_{L,\delta}(-L) = \tilde{w}_{L,\delta}(L)$ wegen (i) und der $2L$-Periodizität von $\widehat{w}_L$ für alle $\delta \in [0, L-\epsilon]$ gelten. Dazu sei $\mu_L : [0, L-\epsilon] \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$\mu_L(\delta) := \fint_{-L}^{L} \tilde{w}_{L,\delta} \, \mathrm{d}x,$$

welche stetig ist, das unmittelbar mit dem Satz von der majorisierten Konvergenz folgt. Da nun zum Einen $\tilde{w}_{L,0} = \max\{w_L, -1\}$ und daher $\mu_L(0) > \mathfrak{m}$ wegen (1.71) gilt und zum Anderen $\tilde{w}_{L,L-\epsilon} \equiv -1$ und somit $\mu_L(L-\epsilon) = -1 < \mathfrak{m}$ gilt, folgt mit dem Zwischenwertsatz, dass ein $\delta_0 \in (0, L-\epsilon)$ mit $\fint_{-L}^{L} \tilde{w}_{L,\delta_0} \, \mathrm{d}x = \mu_L(\delta_0) = \mathfrak{m}$ existiert. Damit ergibt sich insgesamt $\tilde{w}_{L,\delta_0} \in \mathcal{A}_L$ und für dessen Energie erhalten wir die Abschätzung

$$\begin{aligned}
E_L(\tilde{w}_{L,\delta_0}) &\underset{(\mathcal{G}2)}{=} \int_{-L}^{-\delta_0-\epsilon} \frac{1}{2}\left(\tilde{w}_{L,\delta_0}\right)_x^2 + G\left(\tilde{w}_{L,\delta_0}\right)\,\mathrm{d}x + \int_{\delta_0+\epsilon}^{L} \frac{1}{2}\left(\tilde{w}_{L,\delta_0}\right)_x^2 + G\left(\tilde{w}_{L,\delta_0}\right)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{-L+\delta_0}^{-\epsilon} \frac{1}{2}(w_L)_y^2 + G(w_L)\,\mathrm{d}y + \int_{\epsilon}^{L-\delta_0} \frac{1}{2}(w_L)_y^2 + G(w_L)\,\mathrm{d}y \\
&\underset{(1.71),(\mathcal{G}2)}{<} \int_{-L+\delta_0}^{-\epsilon} \frac{1}{2}(w_L)_y^2 + G(w_L)\,\mathrm{d}y + \int_{\epsilon}^{L-\delta_0} \frac{1}{2}(w_L)_y^2 + G(w_L)\,\mathrm{d}y \\
&\quad + \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \frac{1}{2}(w_L)_y^2 + G(w_L)\,\mathrm{d}y + \int_{-L}^{-L+\delta_0} \frac{1}{2}(w_L)_y^2 + G(w_L)\,\mathrm{d}y \\
&\quad + \int_{L-\delta_0}^{L} \frac{1}{2}(w_L)_y^2 + G(w_L)\,\mathrm{d}y \\
&= E_L(w_L),
\end{aligned}$$

das aber einen Widerspruch dazu liefert, dass w_L ein Minimierer ist.

Schließlich haben beide Fälle zu einem Widerspruch geführt, sodass $m_L > -1$ für alle $L \geq \widehat{L}_3 := L_1$ gelten muss. □

Nun widmen wir uns dem Beweis von Satz 1.2.14, wobei der Teil des Beweises bis (1.85) bewusst sehr ausführlich geführt wird. Denn die zugehörige Idee ist essentiell und wird in dem späteren Satz 1.2.23 erneut verwendet werden, wobei wir dann mit längeren und komplizierteren Termen arbeiten werden.

Beweis von Satz 1.2.14
Sei $L \geq L_0 := \max\{\widehat{L}_2, \widehat{L}_3\}$ ($\widehat{L}_2$ aus den Voraussetzungen 1.2.13 (ii) und $\widehat{L}_3$ aus Lemma 1.2.17).

Nachfolgend beweisen wir dann nur, dass

$$\|w_L - v_{L,x_L}\|_{C^1([0,L])} = o(1) \tag{1.72}$$

gilt, denn die entsprechende Aussage auf dem Intervall $[-L, 0]$ ergibt sich anschließend aufgrund der Symmetrie von w_L bzgl. $d_L = 0$ in (1.55) und der Symmetrie von v_{L,x_L}, die aus der Definition 1.2.4 und daraus folgt, dass der kink v nach Lemma 1.2.1 (i) ungerade ist.

Dazu setzen wir zunächst die Identität

$$\theta_L \underset{(1.44)}{=} G(M_L) - \lambda_L M_L$$

in (1.16) ein, sodass wir

$$(w_L)_x^2 = 2G(w_L) - 2G(M_L) - 2\lambda_L(w_L - M_L)$$

in $[-L, L]$ erhalten. Zusammen mit (1.57) folgt

$$(w_L)_x = \sqrt{2G(w_L) - 2G(M_L) - 2\lambda_L(w_L - M_L)} \tag{1.73}$$

in $[0, L]$ und es ist $w_L(x_L) = 0$ mit $x_L \in (0, L)$ aufgrund der Voraussetzungen 1.2.13 (i). Im Vergleich dazu erfüllt die Funktion

$$u_L : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad u_L(x) := v(x - x_L), \tag{1.74}$$

wobei v der kink aus Lemma 1.2.1 ist und $u_L = v_{L,x_L}$ in $[0, L]$ gilt, die Differentialgleichung

$$(u_L)_x = \sqrt{2G(u_L)} \tag{1.75}$$

in $[0, L]$ mit $u_L(x_L) = v(0) = 0$ nach (1.24).

Die zentrale Aufgabe in diesem Beweis ist es nun, die Ableitung der Funktion $\phi_L := w_L - u_L$ in $[0, L]$ geeignet abzuschätzen, und dazu benötigen wir vorab einige Abschätzungen. Zuerst betrachten wir den Term

$$\left| \sqrt{2G(w_L) - 2G(M_L) - 2\lambda_L(w_L - M_L)} - \sqrt{2G(w_L)} \right|$$

in $[0, L]$ näher: Mit Lemma 1.2.8, Korollar 1.2.10 und $(\mathcal{G}2)$ folgt, dass

$$|2G(M_L) + 2\lambda_L(w_L - M_L)| \leq 2G(M_L) + 2|\lambda_L||m_L - M_L| =: R_L = o(1) \tag{1.76}$$

gleichmäßig in $\mathbb{R}$ gilt. Jetzt sei $\widehat{R}_L := \max \left\{ R_L, \frac{1}{L} \right\}$ und anschließend unterscheiden wir zwei Fälle bzgl. der Größe von $2G(w_L(x))$ für $x \in [0, L]$:

<u>1.Fall:</u> $2G(w_L(x)) \geq 2\,\widehat{R}_L$
Dann ergibt sich mit dem Mittelwertsatz angewendet auf $t \mapsto \sqrt{t}$, $t \in (0, \infty)$, die Abschätzung

$$\begin{aligned} &\left| \sqrt{2G(w_L(x)) - 2G(M_L) - 2\lambda_L(w_L(x) - M_L)} - \sqrt{2G(w_L(x))} \right| \\ &\underset{(1.76)}{\leq} \frac{1}{2\sqrt{\widehat{R}_L}} \left| \Big(2G(w_L(x)) - 2G(M_L) - 2\lambda_L(w_L(x) - M_L) \Big) - 2G(w_L(x)) \right| \\ &\underset{(1.76)}{\leq} \frac{1}{2\sqrt{\widehat{R}_L}}\, \widehat{R}_L = \frac{\sqrt{\widehat{R}_L}}{2}. \end{aligned} \tag{1.77}$$

2.Fall: $2G(w_L(x)) \leq 2\,\widehat{R}_L$
So erhalten wir

$$\begin{aligned}
&\left|\sqrt{2G(w_L(x)) - 2G(M_L) - 2\lambda_L(w_L(x) - M_L)} - \sqrt{2G(w_L(x))}\right| \\
\leq\ &\sqrt{2G(w_L(x)) + |2G(M_L) + 2\lambda_L(w_L(x) - M_L)|} + \sqrt{2G(w_L(x))} \qquad (1.78)\\
\underset{(1.76)}{\leq}\ &4\sqrt{\widehat{R}_L}.
\end{aligned}$$

Ferner benötigen wir eine Abschätzung für $\left|\sqrt{2G(w_L)} - \sqrt{2G(u_L)}\right|$ in $[0, L]$: Sei dazu $g : [-1, 1] \to \mathbb{R}$, $g(t) := \sqrt{2G(t)}$. Wegen $G \in C^2(\mathbb{R})$ und ($\mathcal{G}2$) ist g in $(-1, 1)$ zweimal stetig differenzierbar mit

$$g'(t) = \frac{G'(t)}{\sqrt{2G(t)}}$$

für $t \in (-1, 1)$. Dann erhalten wir unter Verwendung der Funktion H aus den Voraussetzungen 1.0.1, dass für $t \in (-1, 1)$

$$g'(t) = \frac{G'(t)}{\sqrt{2G(t)}} \underset{(1.2)}{=} \frac{\frac{G'(t)}{1-t}}{\sqrt{2H(t)}(1+t)} \xrightarrow[t\to 1]{(\mathcal{G}2),(\mathcal{G}3)} \frac{-G''(1)}{2\sqrt{2H(1)}} = -\sqrt{G''(1)} \qquad (1.79)$$

gilt, wobei wir in der letzten Gleichheit $H(1) = \frac{1}{8}G''(1)$ (siehe Voraussetzungen 1.0.1) benutzt haben. Dies impliziert

$$g'(t) \xrightarrow[t\to -1]{} -\left(-\sqrt{G''(1)}\right) = \sqrt{G''(1)}, \qquad (1.80)$$

da g' ungerade ist, weil G und somit ebenfalls g nach ($\mathcal{G}1$) gerade ist. Insgesamt können wir g' somit in $t \in \{\pm 1\}$ durch $\mp\sqrt{G''(1)}$ stetig fortsetzen, sodass

$$K_G := \max_{t\in[-1,1]} |g'(t)|\ (> 0) \qquad (1.81)$$

existiert. Mit dem Mittelwertsatz schließen wir dann, dass g Lipschitz-stetig ist. Da außerdem $|w_L| < 1$ in $[-L, L]$ wegen Lemma 1.2.17 (iii) und $|u_L| < 1$ in $[-L, L]$ wegen $|v| < 1$ in $\mathbb{R}$ nach Lemma 1.2.1 (ii) gelten, ergibt sich

$$\left|\sqrt{2G(w_L)} - \sqrt{2G(u_L)}\right| = |g(w_L) - g(u_L)| \leq K_G|w_L - u_L| \qquad (1.82)$$

in $[0, L]$.

Mit diesen Hilfsmitteln können wir uns der Abschätzung von $(\phi_L)_x$ widmen: Es existiert eine Konstante $C > 0$ mit

$$
\begin{aligned}
|(\phi_L)_x| &\underset{(1.73),(1.75)}{\leq} \left|\sqrt{2G(w_L)} - \sqrt{2G(u_L)}\right| \\
&\quad + \left|\sqrt{2G(w_L) - 2G(M_L) - 2\lambda_L(w_L - M_L)} - \sqrt{2G(w_L)}\right| \\
&\underset{(1.77),(1.78)}{\leq} \left|\sqrt{2G(w_L)} - \sqrt{2G(u_L)}\right| + \underbrace{C\sqrt{\widehat{R}_L}}_{=:\,\tilde{R}_L} \\
&\underset{(1.82)}{\leq} K_G|w_L - u_L| + \tilde{R}_L = K_G|\phi_L| + \tilde{R}_L
\end{aligned}
\tag{1.83}
$$

in $[0, L]$. Da zudem $\phi_L(x_L) = 0$ ist, folgt

$$
|\phi_L(x)| \leq \begin{cases} |\psi_L(2x_L - x)|, & \text{falls } x \in [0, x_L), \\ |\psi_L(x)|, & \text{falls } x \in [x_L, L], \end{cases} \tag{1.84}
$$

wobei ψ_L die eindeutig bestimmte Lösung des Anfangswertproblems

$$
\begin{cases} (\psi_L)_x = K_G\psi_L + \tilde{R}_L & \text{in } [x_L, \infty), \\ \psi_L(x_L) = 0, \end{cases}
$$

ist. Es gilt

$$
\psi_L(x) = \left[\left(-\frac{\tilde{R}_L}{K_G}\right)\exp(-K_G(x - x_L)) + \frac{\tilde{R}_L}{K_G}\right]\exp(K_G(x - x_L)) \tag{1.85}
$$

für $x \in [x_L, \infty)$. Wegen $\tilde{R}_L = o(1)$ folgt mit (1.84) und (1.85) unmittelbar, dass zu jedem $\sigma > 0$ und zu jedem $A > 0$ ein $L_1 = L_1(\sigma, A) > L_0$ existiert, sodass

$$
\begin{aligned}
\max_{x\in[\max\{0,x_L-A\},\min\{L,x_L+A\}]} |\phi_L(x)| &\leq \max_{x\in[x_L,x_L+\max\{\min\{x_L,A\},\min\{L-x_L,A\}\}]} |\psi_L(x)| \\
&< \sigma
\end{aligned}
\tag{1.86}
$$

für alle $L \geq L_1$ gilt.

Sei jetzt ein beliebiges, aber festes $\delta > 0$ gegeben. Dann wählen wir in (1.86) zum Einen $A > 0$ so groß, dass

$$
|u_L(x_L \pm A) \mp 1| = |v(\pm A) \mp 1| < \frac{\delta}{4} \tag{1.87}
$$

für alle $L > L_0$ gilt, das wegen Lemma 1.2.1 (ii) möglich ist, und zum Anderen $\sigma = \frac{\delta}{4}$, sodass wir ein $L_1 = L_1(\sigma, A) > L_0$ mit

$$
\max_{x\in[\max\{0,x_L-A\},\min\{L,x_L+A\}]} |\phi_L(x)| < \frac{\delta}{4} \tag{1.88}
$$

für alle $L \geq L_1$ erhalten. Dabei dürfen wir ohne Einschränkung der Allgemeinheit $0 < x_L - A$ und $L > x_L + A$ für alle $L \geq L_1$ annehmen; denn andernfalls gibt es ein $L \geq L_1$, sodass $0 \geq x_L - A$ oder $L \leq x_L + A$ gilt, infolgedessen $[0, x_L - A)$ oder $(x_L + A, L]$ die leere Menge ist und somit in der nachfolgenden Argumentation nicht mehr zusätzlich betrachtet werden muss. Unter dieser Annahme vereinfacht sich (1.88) zu

$$\max_{x \in [x_L - A, x_L + A]} |\phi_L(x)| < \frac{\delta}{4} \tag{1.89}$$

und damit gilt insbesondere $|w_L(x_L \pm A) - u_L(x_L \pm A)| < \frac{\delta}{4}$ für alle $L \geq L_1$. Zusammen mit der Ungleichung (1.87) impliziert dies

$$|w_L(x_L - A) + 1| < \frac{\delta}{2} \qquad \text{und} \qquad |w_L(x_L + A) - 1| < \frac{\delta}{2} \tag{1.90}$$

für alle $L \geq L_1$. Ferner stellen wir fest, dass

$$w_L(0) \underset{(1.58)}{=} m_L \underset{(1.35)}{=} -1 + o(1) \quad \text{und} \quad w_L(L) = w_L(-L) \underset{(1.58)}{=} M_L \underset{(1.35)}{=} 1 + o(1) \tag{1.91}$$

gelten, sodass wir ein $L_2 > L_1$ mit

$$|w_L(0) + 1| < \frac{\delta}{2} \qquad \text{und} \qquad |w_L(L) - 1| < \frac{\delta}{2} \tag{1.92}$$

für alle $L \geq L_2$ wählen können. Da w_L in $[0, x_L - A]$ und $[x_L + A, L]$ wegen (1.57) streng monoton wächst, erhalten wir zusammen mit den Abschätzungen (1.90) und (1.92) sogar

$$\max_{x \in [0, x_L - A]} |w_L(x) + 1| < \frac{\delta}{2} \qquad \text{und} \qquad \max_{x \in [x_L + A, L]} |w_L(x) - 1| < \frac{\delta}{2} \tag{1.93}$$

und, da nach Lemma 1.2.1 (ii) auch u_L in $[0, x_L - A]$ und $[x_L + A, L]$ streng monoton wächst, aber stets $|u_L| < 1$ gilt, erhalten wir zusammen mit der Abschätzung (1.87)

$$\max_{x \in [0, x_L - A]} |u_L(x) + 1| < \frac{\delta}{4} \qquad \text{und} \qquad \max_{x \in [x_L + A, L]} |u_L(x) - 1| < \frac{\delta}{4} \tag{1.94}$$

für alle $L \geq L_2$. Schließlich ergibt sich

$$\max_{x \in [0, x_L - A] \cup [x_L + A, L]} |w_L(x) - u_L(x)| \underset{(1.93),(1.94)}{<} \frac{3\delta}{4} < \delta$$

und mit der Ungleichung (1.89) daher

$$\max_{x \in [0, L]} |w_L(x) - u_L(x)| < \delta$$

für alle $L \geq L_2$. Aufgrund der beliebigen Wahl von $\delta > 0$ folgt insgesamt

$$\|w_L - v_{L, x_L}\|_{C([0,L])} = \|w_L - u_L\|_{C([0,L])} = o(1),$$

sodass wir in Kombination mit der Abschätzung (1.83) und $\tilde{R}_L = o(1)$ darüber hinaus

$$\|(w_L)_x - (v_{L, x_L})_x\|_{C([0,L])} = \|(w_L)_x - (u_L)_x\|_{C([0,L])} = o(1) \tag{1.95}$$

schließen, wobei zu beachten ist, dass es sich hier bei $(v_{L,x_L})_x(0)$ um die rechtsseitige Ableitung von v_{L,x_L} in $x = 0$ handelt. Falls wir jetzt die vorausgesetzte Definition $(v_{L,x_L})_x(0) := 0$ benutzen, gilt (1.95) aber immer noch, da auch $(w_L)_x(0) = 0$ wegen (1.56) gilt. Somit ist (1.72) gezeigt. □

Im Folgenden verfolgen wir das Ziel, die Aussage in Satz 1.2.14 zu verbessern, indem wir untersuchen, wie schnell der Term in (1.54) für $L \gg 1$ klein wird. Dazu betrachten wir zunächst die zwei Nullstellen $\pm x_L$ des Minimierers w_L für $L \gg 1$ näher. Dabei ist unsere Idee, sie mit den Nullstellen $\pm z_L$ der Funktion $v_L \in \mathcal{A}_L$ aus Lemma 1.2.6 für $L \gg 1$ zu vergleichen, indem wir zum Einen (1.54) ausnutzen und zum Anderen verwenden, dass w_L und v_L den gleichen Mittelwert besitzen.

Korollar 1.2.18.
Sei $\mathfrak{m} \in (-1, 1)$. Zudem sei der zugehörige Minimierer w_L aus Definition 1.1.2, die Voraussetzungen 1.2.13 und die zu $\mathfrak{m}$ gehörige Funktion $v_L \in \mathcal{A}_L$ zusammen mit ihren zwei Nullstellen $\pm z_L$ aus Lemma 1.2.6 für alle $L \geq \widehat{L}_2$ gegeben. Dann gilt

$$x_L = \frac{1}{2}(1 - \mathfrak{m})L + o(L) = z_L + o(L). \tag{1.96}$$

Beweis
Sei $L \geq L_0 := \widehat{L}_2$ ($\widehat{L}_2$ aus den Voraussetzungen 1.2.13 (ii)). Dann sind $z_L, x_L \in (0, L)$ nach Lemma 1.2.6 bzw. den Voraussetzungen 1.2.13 (i). Dabei nehmen wir ohne Einschränkung der Allgemeinheit $x_L \leq z_L$ an. Zudem sei v_{L,x_L} unter Verwendung der Definition 1.2.4 mit $z = x_L$ gegeben, dann folgt $v_{L,x_L} \geq v_L$, da der kink v in $\mathbb{R}$ nach Lemma 1.2.1 (ii) streng monoton wächst. In Kombination mit $\fint_{-L}^{L} v_L \,\mathrm{d}x = \mathfrak{m}$, da $v_L \in \mathcal{A}_L$ gilt, erhalten wir

$$\begin{aligned}
\delta_L &:= \|v_{L,x_L} - w_L\|_{C^1([-L,L])} \geq \fint_{-L}^{L} |v_{L,x_L} - w_L| \,\mathrm{d}x \geq \left| \fint_{-L}^{L} v_{L,x_L} - w_L \,\mathrm{d}x \right| \\
&= \left| \fint_{-L}^{L} v_{L,x_L} \,\mathrm{d}x - \mathfrak{m} \right| = \left| \fint_{-L}^{L} v_{L,x_L} - v_L \,\mathrm{d}x \right| = \fint_{-L}^{L} v_{L,x_L} - v_L \,\mathrm{d}x \\
&= \fint_{0}^{L} v(x - x_L) - v(x - z_L) \,\mathrm{d}x = \frac{1}{L} \left(\int_{-x_L}^{L-x_L} v(y) \,\mathrm{d}y - \int_{-z_L}^{L-z_L} v(y) \,\mathrm{d}y \right) \qquad (1.97) \\
&= \frac{1}{L} \left(\int_{L-z_L}^{L-x_L} v(y) \,\mathrm{d}y - \int_{-z_L}^{-x_L} v(y) \,\mathrm{d}y \right) = \frac{1}{L} \left(\int_{L-z_L}^{L-x_L} v(y) \,\mathrm{d}y + \int_{x_L}^{z_L} v(z) \,\mathrm{d}z \right), \qquad (1.98)
\end{aligned}$$

wobei wir zum Einen in (1.97) benutzt haben, dass v_{L,x_L} und v_L gerade sind, das aus deren Definition und daraus folgt, dass der kink v nach Lemma 1.2.1 (i) ungerade ist. Zum Anderen haben wir in (1.98) erneut verwendet, dass v ungerade ist, sowie die Substitution $z = -y$ durchgeführt.

Des Weiteren finden wir wegen Lemma 1.2.1 (ii) ein $B > 0$ mit $v(x) \geq \frac{1}{2}$ für alle $x \geq B$. Außerdem existiert ein $L_1 > L_0$, sodass $x_L, L - x_L, z_L, L - z_L \geq B$ und somit

$$v(x) \geq \frac{1}{2} \qquad \text{für alle } \ x \geq \min\{x_L, L - x_L, z_L, L - z_L\} = \min\{x_L, L - z_L\} \tag{1.99}$$

und alle $L \geq L_1$ gelten. Denn zum Einen gelten

$$z_L \underset{(1.28)}{=} \frac{1}{2}(1 - \mathfrak{m})L + o(1) \qquad \text{und} \qquad L - z_L \underset{(1.28)}{=} \frac{1}{2}(1 + \mathfrak{m})L + o(1)$$

mit $\mathfrak{m} \in (-1, 1)$ und zum Anderen existiert zu jedem $A > 0$ ein $\tilde{L} = \tilde{L}(A) > 0$, sodass

$$x_L \geq A \qquad \text{und} \qquad L - x_L \geq A$$

für alle $L \geq \tilde{L}$ gilt; denn falls Letzteres nicht gilt, existieren eine Folge $(\tilde{L}_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}_{\geq L_0}$ mit $\lim\limits_{n \to \infty} \tilde{L}_n = \infty$ und eine Konstante $C > 0$, sodass z.B. $x_{\tilde{L}_n} \leq C$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. In Kombination mit der Definition von $v_{\tilde{L}_n, x_{\tilde{L}_n}}$, $n \in \mathbb{N}$, und Lemma 1.2.1 (ii) impliziert dies die Identität $⨍_{-\tilde{L}_n}^{\tilde{L}_n} v_{\tilde{L}_n, x_{\tilde{L}_n}} \,\mathrm{d}x = 1 + o(1)$ für $n \to \infty$. Andererseits ergibt sich für ein beliebiges $L \geq L_0$ die Abschätzung

$$\begin{aligned} \left| ⨍_{-L}^{L} v_{L,x_L} \,\mathrm{d}x - \mathfrak{m} \right| = \left| ⨍_{-L}^{L} v_{L,x_L} - w_L \,\mathrm{d}x \right| \leq ⨍_{-L}^{L} |v_{L,x_L} - w_L| \,\mathrm{d}x \quad &\leq \quad \|v_{L,x_L} - w_L\|_{C^1([-L,L])} \\ &\underset{(1.54)}{=} o(1) \end{aligned}$$

und somit $⨍_{-L}^{L} v_{L,x_L} \,\mathrm{d}x = \mathfrak{m} + o(1)$, sodass wir wegen $\mathfrak{m} \in (-1, 1)$ einen Widerspruch erhalten.

Jedenfalls folgt dann für $L \geq L_1$, dass

$$\begin{aligned} \delta_L \underset{(1.97),(1.98)}{\geq} \frac{1}{L} \left(\int_{L-z_L}^{L-x_L} v(y) \,\mathrm{d}y + \int_{x_L}^{z_L} v(z) \,\mathrm{d}z \right) &\underset{(1.99)}{\geq} \frac{1}{L} \left(\int_{L-z_L}^{L-x_L} \frac{1}{2} \,\mathrm{d}y + \int_{x_L}^{z_L} \frac{1}{2} \,\mathrm{d}z \right) \\ &= \frac{z_L - x_L}{L} = \frac{|z_L - x_L|}{L} \end{aligned} \tag{1.100}$$

bzw.

$$|z_L - x_L| \leq L\delta_L \underset{(1.54)}{=} o(L)$$

gilt, das zusammen mit der Darstellung (1.28) von z_L die Behauptung liefert. □

Anschließend leiten wir die essentiellen Abschätzungen her, die als Grundbaustein dienen, um die Geschwindigkeit des Abklingens des Terms in (1.54) für $L \gg 1$ zu beschreiben. Vorab benötigen wir weitere Bezeichnungen.

Voraussetzungen 1.2.19. (Annahmen und Bezeichnungen, Teil 2)
Sei $\mathfrak{m} \in (-1,1)$. Zudem seien die zugehörigen Minimierer w_L aus Definition 1.1.2 und die zugehörigen Konstanten λ_L aus Lemma 1.1.3 gegeben. Dann treffen wir folgende Annahmen bzw. führen folgende Bezeichnungen ein:

Für $L > 0$ definieren wir

$$G_L : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad G_L(t) := G(t) - \lambda_L t. \tag{1.101}$$

Nun folgt aus ($\mathcal{G}$1), ($\mathcal{G}$2) und ($\mathcal{G}$3), dass $G'(\pm 1) = 0$ gilt und dass ein $\sigma \in (0,1)$ existiert, sodass $G'' > \frac{G''(1)}{2} > 0$ in $(\pm 1 - \sigma, \pm 1 + \sigma)$ ist, infolgedessen G' in diesen Teilintervallen streng monoton wächst. Da zudem $\lambda_L = o(1)$ nach Korollar 1.2.10 gilt, finden wir ein $\widehat{L}_4 > 0$, sodass $G'_L = G' - \lambda_L$ in $(\pm 1 - \sigma, \pm 1 + \sigma)$ jeweils genau eine einfache Nullstelle, etwa in

$$s_L \in (-1-\sigma, -1+\sigma) \qquad \text{und in} \qquad t_L \in (1-\sigma, 1+\sigma), \tag{1.102}$$

für alle $L \geq \widehat{L}_4$ besitzt. Dabei gelten die Identitäten

$$s_L = -1 + o(1) \qquad \text{sowie} \qquad t_L = 1 + o(1). \tag{1.103}$$

Damit können wir das Lemma mit den zentralen Ungleichungen formulieren. Die Idee stammt aus dem Beweis von [4, Lemma 3.1].

Lemma 1.2.20.
Sei $\mathfrak{m} \in (-1,1)$ und das Potenzial G erfülle zusätzlich ($\mathcal{G}$4). Außerdem seien die zugehörigen Minimierer w_L aus Definition 1.1.2, die Voraussetzungen 1.2.13 und 1.2.19 sowie M_L, m_L aus Lemma 1.2.8 gegeben. Dann existiert für jedes $\epsilon > 0$ ein $\widehat{L}_\epsilon > 0$, sodass die Abschätzungen

(i) $|M_L - t_L| \lesssim \exp\left(-\left(\frac{\sqrt{G''(1)}}{2}(1+\mathfrak{m}) - \epsilon\right) L\right)$ *und*

(ii) $|m_L - s_L| \lesssim \exp\left(-\left(\frac{\sqrt{G''(1)}}{2}(1-\mathfrak{m}) - \epsilon\right) L\right)$

für alle $L \geq \widehat{L}_\epsilon$ gelten, wobei wir hier die Notation 1.1.5 b) verwendet haben.

Beweis
Sei $\epsilon > 0$ gegeben. Darüber hinaus sei $L_0 := \max\{\widehat{L}_2, \widehat{L}_3, \widehat{L}_4\}$ ($\widehat{L}_2$ aus den Voraussetzungen 1.2.13 (ii), $\widehat{L}_3$ aus Lemma 1.2.17 und $\widehat{L}_4$ aus den Voraussetzungen 1.2.19).

(i) Zu Beginn können wir wegen (1.35), (1.58) und wegen $G'' > \frac{G''(1)}{2} > 0$ in $(1 - \sigma, 1+\sigma)$ für $\sigma > 0$ aus den Voraussetzungen 1.2.19 ein $L_1 > L_0$ wählen, sodass

$$M_L \in (1-\sigma, 1) \qquad \text{und somit} \qquad G''(M_L) > \frac{G''(1)}{2} > 0 \tag{1.104}$$

für alle $L \geq L_1$ gelten. Dies impliziert, dass

$$\Theta_L := \frac{G'(M_L) - \lambda_L}{G''(M_L)} \underset{(1.101)}{=} \frac{G_L'(M_L)}{G_L''(M_L)} \tag{1.105}$$

für alle $L \geq L_1$ wohldefiniert ist, und wegen (1.35), $\lambda_L = o(1)$ nach Korollar 1.2.10 und $(\mathcal{G}2)$ folgt $\Theta_L = o(1)$. Ferner liefern das nachfolgende Lemma 1.2.21 (i) und (1.104), dass ein $L_2 > L_1$ mit $\Theta_L \leq 0$ für alle $L \geq L_2$ existiert, sodass wir $\Theta_L < 0$ für alle $L \geq L_2$ annehmen dürfen; denn $\Theta_L = 0$ ist äquivalent zu $G_L'(M_L) = 0$, das wegen (1.104) sowie der strengen Monotonie von G' und somit G_L' in $(1-\sigma, 1+\sigma)$ aufgrund der Voraussetzungen 1.2.19 gleichbedeutend mit $t_L = M_L$ ist, sodass die hier zu zeigende Abschätzung trivialerweise gilt.

Sei nun $L \geq L_2$. Dann gilt die Gleichung

$$\begin{aligned} (w_L)_x &\underset{(1.73)}{=} \sqrt{2}\sqrt{G(w_L) - G(M_L) - \lambda_L(w_L - M_L)} \\ &= \sqrt{2}\sqrt{G_L(w_L) - G_L(M_L)} \end{aligned} \tag{1.106}$$

in $[x_L, L]$, wobei $(w_L)_x > 0$ in $[x_L, L)$ und $(w_L)_x(L) = 0$ nach (1.57) und Lemma 1.1.3 (iii) gelten, sodass wir mit der Substitution $t = w_L(x)$ die Identität

$$\begin{aligned} \Delta_L := L - x_L = \int_{x_L}^{L} 1\,\mathrm{d}x &= \int_0^{M_L} \frac{1}{(w_L)_x(w_L^{-1}(t))}\,\mathrm{d}t \\ &\underset{(1.106)}{=} \int_0^{M_L} \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{G_L(t) - G_L(M_L)}}\,\mathrm{d}t \end{aligned} \tag{1.107}$$

erhalten. Wenn wir anschließend für $G_L - G_L(M_L)$ die Taylor-Formel mit Entwicklungspunkt M_L und Peano-Restglied anwenden, ergibt sich

$$G_L(t) - G_L(M_L) = G_L'(M_L)(t - M_L) + \frac{G_L''(M_L)}{2}(t - M_L)^2 + R_1(L, t) \tag{1.108}$$

für $t \in \mathbb{R}$, wobei ein $\xi(L, t)$ zwischen M_L und t mit

$$\begin{aligned} |R_1(L,t)| &= \left| \frac{G_L''(\xi(L,t)) - G_L''(M_L)}{2} \right| (t - M_L)^2 \\ &= \left| \frac{G''(\xi(L,t)) - G''(M_L)}{2} \right| (t - M_L)^2 \\ &\underset{(1.35),(\mathcal{G}4)}{\lesssim} |\xi(L,t) - M_L|(t - M_L)^2 \\ &\lesssim |t - M_L|^3 = \mathcal{O}(|t - M_L|^3) \end{aligned} \tag{1.109}$$

für $t \to M_L$ existiert. Demnach ist der dominante Term der rechten Seite der Gleichung (1.107) multipliziert mit $\sqrt{G_L''(M_L)} = \sqrt{G''(M_L)}$ gerade

$$\begin{aligned}
&\int_0^{M_L} \frac{\sqrt{G_L''(M_L)}}{\sqrt{2G_L'(M_L)(t-M_L) + G_L''(M_L)(t-M_L)^2}}\,\mathrm{d}t \\
\underset{(1.105)}{=} &\int_0^{M_L} \frac{1}{\sqrt{2\Theta_L(t-M_L) + (t-M_L)^2}}\,\mathrm{d}t \\
= &\int_0^{M_L} \frac{1}{\sqrt{-2\Theta_L s + s^2}}\,\mathrm{d}s,
\end{aligned} \tag{1.110}$$

wobei wir in (1.110) die Substitution $s = M_L - t$ benutzt haben. Zudem ist das letzte Integral wohldefiniert und endlich, da wegen (1.104) die Ungleichung $M_L > 1 - \sigma > 0$ und nach Annahme $-2\Theta_L > 0$ gelten, das $-2\Theta_L s + s^2 \geq -2\Theta_L s > 0$ für alle $s \in (0, M_L]$ impliziert. Daher können wir die Gleichung (1.107) nach Multiplikation mit $\sqrt{G_L''(M_L)} = \sqrt{G''(M_L)}$ wie folgt schreiben:

$$\begin{aligned}
\Delta_L\sqrt{G''(M_L)} = &\int_0^{M_L} \frac{1}{\sqrt{-2\Theta_L t + t^2}}\,\mathrm{d}t + \int_0^{M_L} \frac{\sqrt{G_L''(M_L)}}{\sqrt{2G_L(t) - 2G_L(M_L)}}\,\mathrm{d}t \\
&- \int_0^{M_L} \frac{1}{\sqrt{-2\Theta_L t + t^2}}\,\mathrm{d}t.
\end{aligned} \tag{1.111}$$

Nun betrachten wir den ersten und die beiden letzten Summanden der rechten Seite von (1.111) separat:

1. Summand: Wegen $-\Theta_L > 0$ gilt

$$\begin{aligned}
&\int_0^{M_L} \frac{1}{\sqrt{-2\Theta_L t + t^2}}\,\mathrm{d}t = \left[\ln\left(-\Theta_L + t + \sqrt{t^2 - 2\Theta_L t}\right)\right]_0^{M_L} \\
&= \ln\left(-\Theta_L + M_L + \sqrt{M_L^2 - 2\Theta_L M_L}\right) - \ln(-\Theta_L) \\
&= \ln(2) - \ln(-\Theta_L) + \ln\left(-\Theta_L + M_L + \sqrt{M_L^2 - 2\Theta_L M_L}\right) - \ln(2) \\
&= \ln(2) - \ln(-\Theta_L) + o(1),
\end{aligned} \tag{1.112}$$

wobei wir in (1.112) die Identitäten $\Theta_L = o(1)$ und $M_L = 1 + o(1)$ benutzt haben.

2. und 3. Summand: Es gilt

$$\begin{aligned}
&\int_0^{M_L} \frac{\sqrt{G_L''(M_L)}}{\sqrt{2G_L(t)-2G_L(M_L)}}\,\mathrm{d}t - \int_0^{M_L} \frac{1}{\sqrt{-2\Theta_L t + t^2}}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{M_L} \frac{1}{\sqrt{-2\Theta_L s + s^2 + R_2(L,s)}} - \frac{1}{\sqrt{-2\Theta_L s + s^2}}\,\mathrm{d}s
\end{aligned} \tag{1.113}$$

mit

$$R_2(L,s) := \frac{2R_1(L, M_L - s)}{\sqrt{G_L''(M_L)}} \underset{(1.109)}{=} \mathcal{O}(s^3) \tag{1.114}$$

für $s \to 0$, wobei wir in (1.113) im ersten Integral die Identität (1.108) eingesetzt und anschließend die Substitution $s = M_L - t$ verwendet haben. Um in (1.113) zum Grenzübergang $L \to \infty$ überzugehen, wollen wir den Satz der majorisierten Konvergenz anwenden. Dazu schätzen wir den Integranden des Integrals auf der rechten Seite von (1.113) in Abhängigkeit von s ab: Aufgrund von (1.104), (1.109), (1.114), $M_L = 1 + o(1)$, $M_L < 1$, $\lambda_L = o(1)$ und $(\mathcal{G}2)$ existieren ein $\delta \in (0, \frac{1}{2})$ und ein $L_3 > L_2$, sodass zum Einen

$$\frac{|R_2(L,s)|}{s^2} < \frac{1}{2} \tag{1.115}$$

für alle $s \in (0,\delta)$ und $L \geq L_3$ und zum Anderen

$$M_L \in \left(1 - \frac{\delta}{2}, 1\right) \quad \text{und} \quad G(M_L) + |\lambda_L| < \frac{G(1-\delta)}{2} \tag{1.116}$$

für alle $L \geq L_3$ gelten. Für die Abschätzungen unterscheiden wir nun zwei Fälle bzgl. s für alle $L \geq L_3$:

<u>1.Fall:</u> $s \in (0,\delta)$
Dann ergibt sich mit dem Mittelwertsatz angewendet auf $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t}}$, $t \in \mathbb{R}$, wegen $-\Theta_L > 0$ die Abschätzung

$$\begin{aligned}
&\left| \frac{1}{\sqrt{-2\Theta_L s + s^2 + R_2(L,s)}} - \frac{1}{\sqrt{-2\Theta_L s + s^2}} \right| \\
&\lesssim \frac{1}{\left(-2\Theta_L s + s^2 - |R_2(L,s)|\right)^{\frac{3}{2}}} \left| \Big(-2\Theta_L s + s^2 + R_2(L,s)\Big) - \Big(-2\Theta_L s + s^2\Big) \right| \\
&\leq \frac{1}{\left(s^2\left(1 - \frac{|R_2(L,s)|}{s^2}\right)\right)^{\frac{3}{2}}} |R_2(L,s)| \underset{(1.115)}{\lesssim} \frac{|R_2(L,s)|}{s^3} \underset{(1.114)}{=} \mathcal{O}(1),
\end{aligned}$$

wobei der letzte Term insbesondere wegen (1.104), (1.109) und (1.114) gleichmäßig für alle $s \in (0,\delta)$ und $L \geq L_3$ beschränkt ist. (Insbesondere erkennen wir hier, dass wir auf die Annahme $(\mathcal{G}4)$ oder Vergleichbares nicht verzichten können.)

2.Fall: $s \in (\delta, M_L)$
Dann erhalten wir die Abschätzung

$$\begin{aligned} G_L(M_L - s) - G_L(M_L) &= G(M_L - s) - G(M_L) + \lambda_L s \\ &\underset{(1.116),(\mathcal{G}3)}{\geq} G(1-\delta) - G(M_L) - |\lambda_L| \\ &= G(1-\delta) - (G(M_L) + |\lambda_L|) \\ &\underset{(1.116)}{>} \frac{G(1-\delta)}{2} \underset{(\mathcal{G}2)}{>} 0 \end{aligned}$$

und wegen $-\Theta_L > 0$ somit

$$\begin{aligned} &\left| \frac{1}{\sqrt{-2\Theta_L s + s^2 + R_2(L,s)}} - \frac{1}{\sqrt{-2\Theta_L s + s^2}} \right| \\ \underset{(1.105),(1.108),(1.114)}{=} &\left| \frac{\sqrt{G_L''(M_L)}}{\sqrt{2G_L(M_L - s) - 2G_L(M_L)}} - \frac{1}{\sqrt{-2\Theta_L s + s^2}} \right| \\ \lesssim\ &\left| \frac{1}{\sqrt{G_L(M_L - s) - G_L(M_L)}} \right| + \left| \frac{1}{\sqrt{-2\Theta_L s + s^2}} \right| \\ \lesssim\ &\left| \frac{1}{\sqrt{\frac{G(1-\delta)}{2}}} \right| + \left| \frac{1}{\sqrt{\delta^2}} \right| \lesssim 1. \end{aligned}$$

Da außerdem $M_L = 1 + o(1)$, $\lambda_L = o(1)$ und $\Theta_L = o(1)$ gelten, erhalten wir schließlich mit dem Satz von der majorisierten Konvergenz

$$\begin{aligned} &\int_0^{M_L} \frac{\sqrt{G_L''(M_L)}}{\sqrt{2G_L(t) - 2G_L(M_L)}} - \frac{1}{\sqrt{-2\Theta_L t + t^2}} \, \mathrm{d}t \\ \underset{(1.113)}{=} &\underbrace{\int_0^1 \frac{\sqrt{G''(1)}}{\sqrt{2G(t)}} - \frac{1}{t} \, \mathrm{d}t}_{=:K \in \mathbb{R}} + o(1). \end{aligned} \tag{1.117}$$

Anschließend setzen wir dies sowie die Darstellung (1.112) in die Gleichung (1.111) ein, das

$$\Delta_L \sqrt{G''(M_L)} = \ln(2) + K - \ln(-\Theta_L) + o(1)$$

oder

$$\ln(-\Theta_L) = \ln(2) + K - \Delta_L \sqrt{G''(M_L)} + o(1) \tag{1.118}$$

ergibt. Nun liefert Lemma (1.2.21) (ii), dass

$$\Theta_L = M_L - t_L + o(M_L - t_L)$$

gilt, und, da außerdem per Annahme $\Theta_L < 0$ für alle $L \geq L_3$ gilt, finden wir ein $L_4 > L_3$, sodass $M_L - t_L < 0$ und für den Restterm $|o(M_L - t_L)| < \frac{1}{2}|M_L - t_L|$ für alle $L \geq L_4$ gelten. Dies impliziert

$$\ln(-\Theta_L) = \ln(t_L - M_L) + \ln(1 + o(1)) = \ln(t_L - M_L) + o(1)$$

für alle $L \geq L_4$. In Kombination mit Gleichung (1.118) folgt somit

$$\ln(t_L - M_L) = \ln(2) + K - \Delta_L \sqrt{G''(M_L)} + o(1) \tag{1.119}$$

bzw.

$$|t_L - M_L| = t_L - M_L = \exp(K)(2 + o(1)) \exp\left(-\Delta_L \sqrt{G''(M_L)}\right) \tag{1.120}$$

für alle $L \geq L_4$, wobei

$$\Delta_L \underset{(1.107)}{=} L - x_L \underset{(1.96)}{=} \frac{1}{2}(1 + \mathfrak{m})L + o(L)$$

gilt. Jetzt sei ohne Einschränkung der Allgemeinheit

$$\epsilon < \frac{1}{2}(1 + \mathfrak{m})\sqrt{G''(1)}, \tag{1.121}$$

sodass wir insgesamt ein hinreichend großes $L_\epsilon^{(1)} > L_4$ wählen können, sodass

$$\frac{\Delta_L}{L} > \frac{1}{2}(1+\mathfrak{m}) - \frac{\epsilon}{2\sqrt{G''(1)}} \underset{(1.121)}{>} 0 \quad \text{und} \quad \sqrt{G''(M_L)} > \sqrt{G''(1)} - \frac{\epsilon}{1+\mathfrak{m}} \underset{(1.121)}{>} 0$$

für alle $L \geq L_\epsilon^{(1)}$ gelten. Zusammen mit (1.120) erhalten wir dann

$$\begin{aligned}
|t_L - M_L| &\lesssim \exp\left(-\left(\frac{1}{2}(1 + \mathfrak{m}) - \frac{\epsilon}{2\sqrt{G''(1)}}\right)\left(\sqrt{G''(1)} - \frac{\epsilon}{1 + \mathfrak{m}}\right) L\right) \\
&= \exp\left(-\left(\frac{\sqrt{G''(1)}}{2}(1 + \mathfrak{m}) - \epsilon + \frac{\epsilon^2}{2(1 + \mathfrak{m})\sqrt{G''(1)}}\right) L\right) \\
&\leq \exp\left(-\left(\frac{\sqrt{G''(1)}}{2}(1 + \mathfrak{m}) - \epsilon\right) L\right)
\end{aligned}$$

für alle $L \geq L_\epsilon^{(1)}$.

(ii) Man gehe analog wie in (i) vor, wobei man hier zum Einen von Beginn an das Teilintervall $[0, x_L]$ statt $[x_L, L]$ betrachte und die Gleichung

$$\begin{aligned}
(w_L)_x &\underset{(1.61)}{=} \sqrt{2}\,\sqrt{G(w_L) - G(m_L) - \lambda_L(w_L - m_L)} \\
&= \sqrt{2}\,\sqrt{G_L(w_L) - G_L(m_L)}
\end{aligned}$$

in $[0, x_L]$ für $L \geq L_0$ verwende und zum Anderen am Ende

$$\Delta_L = x_L - 0 = x_L \underset{(1.96)}{=} \frac{1}{2}(1-\mathfrak{m})L + o(L)$$

benutze. Dann erhält man ein hinreichend großes $L_\epsilon^{(2)} > 0$, sodass die zu zeigende Abschätzung für alle $L \geq L_\epsilon^{(2)}$ gilt.

Schließlich wählen wir $\widehat{L}_\epsilon := \max\{L_\epsilon^{(1)}, L_\epsilon^{(2)}\}$. □

Als Hilfsmittel im vorigen Beweis haben wir das folgende Lemma benutzt.

Lemma 1.2.21.
Sei $\mathfrak{m} \in (-1, 1)$. Außerdem seien die zugehörigen Minimierer w_L aus Definition 1.1.2, die Voraussetzungen 1.2.13 und 1.2.19 sowie die zugehörigen Konstanten λ_L aus Lemma 1.1.3 (ii) und M_L, m_L aus Lemma 1.2.8 gegeben. Dann existiert ein $\widehat{L}_5 > 0$, sodass für alle $L \geq \widehat{L}_5$ Folgendes zutrifft:

(i) Es gilt
$$G'(M_L) \leq \lambda_L \qquad \text{und} \qquad G'(m_L) \geq \lambda_L.$$

(ii) Es gilt $G''(M_L), G''(m_L) > 0$ sowie
$$\frac{G''(M_L) - \lambda_L}{G''(M_L)} = M_L - t_L + o(M_L - t_L)$$
und
$$\frac{G''(m_L) - \lambda_L}{G''(m_L)} = m_L - s_L + o(m_L - s_L).$$

Beweis
Sei $\widehat{L}_5 > \max\{\widehat{L}_2, \widehat{L}_3, \widehat{L}_4\}$ ($\widehat{L}_2$ aus den Voraussetzungen 1.2.13 (ii), $\widehat{L}_3$ aus Lemma 1.2.17 und $\widehat{L}_4$ aus den Voraussetzungen 1.2.19) so groß, dass

$$G''(M_L), G''(m_L) > 0 \qquad \text{und} \qquad G''(t_L), G''(s_L) > 0$$

für alle $L \geq \widehat{L}_5$ sind, das wegen (1.35), (1.103) und ($\mathcal{G}3$) möglich ist. Sei nun $L \geq \widehat{L}_5$.

(i) Sei $\widehat{w}_L$ die $2L$-periodische Fortsetzung von w_L auf $\mathbb{R}$ aus Bemerkung 1.1.4, sodass dann mindestens $\widehat{w}_L \in C^3(\mathbb{R})$ gilt. Ferner ist $(\widehat{w}_L)_{xx}(-L) \leq 0$, da $\widehat{w}_L(-L) = M_L$ nach (1.58) gilt, und das Einsetzen von $x = -L$ in die Gleichung (1.15) liefert

$$\lambda_L = -(\widehat{w}_L)_{xx}(-L) + G'(M_L) \geq G'(M_L).$$

Die zweite Ungleichung folgt analog.

(ii) Wir wenden die Taylor-Formel für G_L' und G_L'' mit Entwicklungspunkt t_L und Peano-Restglied an und erhalten die Identitäten

$$G_L'(t) = G_L'(t_L) + G_L''(t_L)(t - t_L) + o(t - t_L)$$

für $t \to t_L$ (vgl. (1.108) und (1.109), aber ohne Verwendung von $(\mathcal{G}4)$), wobei $G_L'(t_L) = 0$ nach Definition von t_L gilt, sowie

$$G_L''(t) = G_L''(t_L) + o(1)$$

für $t \to t_L$. Da zum Einen $M_L = 1 + o(1)$, $t_L = 1 + o(1)$ und somit $M_L - t_L = o(1)$ und zum Anderen nach Annahme $G_L''(y) = G''(y) > 0$ für $y \in \{M_L, t_L\}$ gelten, ergibt sich daher

$$\begin{aligned}\frac{G'(M_L) - \lambda_L}{G''(M_L)} = \frac{G_L'(M_L)}{G_L''(M_L)} &= \frac{G_L''(t_L)(M_L - t_L) + o(M_L - t_L)}{G_L''(t_L) + o(1)} \\ &= M_L - t_L + o(M_L - t_L).\end{aligned}$$

Die zweite Identität erhalten wir erneut mit derselben Argumentation. □

Jedoch ist es jetzt noch nicht offensichtlich, wie uns die Abschätzungen in Lemma 1.2.20 dabei helfen, das Abklingverhalten des Terms in (1.54) zu beschreiben. Deshalb folgern wir aus diesen zunächst Abschätzungen für $|\lambda_L|$, $|1 - M_L|$ und $|1 + m_L|$, die für das weitere Vorgehen eher nützlich sind.

Korollar 1.2.22.
Sei $\mathfrak{m} \in (-1, 1)$ und das Potenzial G erfülle zusätzlich $(\mathcal{G}4)$. Außerdem seien die zugehörigen Minimierer w_L aus Definition 1.1.2, die Voraussetzungen 1.2.13 und 1.2.19 sowie die zugehörigen Konstanten λ_L aus Lemma 1.1.3 (ii) und M_L, m_L aus Lemma 1.2.8 gegeben. Dann existiert für jedes $\epsilon > 0$ ein $\widehat{L}_\epsilon > 0$, sodass die Abschätzungen

(i) $|\lambda_L| \lesssim \exp\left(-\left(\sqrt{G''(1)}(1 - |\mathfrak{m}|) - \epsilon\right) L\right)$,

(ii) $|1 - M_L| \lesssim \exp\left(-\left(\frac{\sqrt{G''(1)}}{2}(1 - |\mathfrak{m}|) - \epsilon\right) L\right)$ *und*

(iii) $|1 + m_L| \lesssim \exp\left(-\left(\frac{\sqrt{G''(1)}}{2}(1 - |\mathfrak{m}|) - \epsilon\right) L\right)$

für alle $L \geq \widehat{L}_\epsilon$ gelten.

Beweis
Seien $\epsilon > 0$ und $L_0 := \max\{\widehat{L}_2, \widehat{L}_3, \widehat{L}_4\}$ ($\widehat{L}_2$ aus den Voraussetzungen 1.2.13 (ii), $\widehat{L}_3$ aus Lemma 1.2.17 und $\widehat{L}_4$ aus den Voraussetzungen 1.2.19) gegeben. Ferner nehmen wir ohne Einschränkung der Allgemeinheit an, dass $\lambda_L \neq 0$ für alle $L \geq L_0$ gilt; denn falls $\lambda_L = 0$ gilt, ist die in (i) zu zeigende Abschätzung trivialerweise erfüllt.

(i) Zunächst erhalten wir für $L \geq L_0$ wie in (1.47) die Identität

$$\lambda_L = \frac{G(M_L) - G(m_L)}{M_L - m_L},$$

wobei $M_L - m_L > \frac{3}{2}$ nach (1.53) gilt, und somit folgt

$$\begin{aligned}|\lambda_L| &\leq \frac{|G(M_L) - G(t_L)| + |G(t_L) - G(s_L)| + |G(s_L) - G(m_L)|}{|M_L - m_L|} \\ &\lesssim |G(M_L) - G(t_L)| + |G(t_L) - G(s_L)| + |G(s_L) - G(m_L)|.\end{aligned} \tag{1.122}$$

Um $G(t_L)$ und $G(s_L)$ näherungsweise auszuwerten, wenden wir die Taylor-Formel für G und G' z.B. mit Entwicklungspunkt 1 und Peano-Restglied an und erhalten durch Einsetzen von $t_L = 1 + o(1)$ (s. (1.103)) unter Verwendung der Definition von t_L die Identitäten

$$\begin{aligned} G(t_L) &= G(1) + G'(1)(t_L - 1) + \frac{G''(1)}{2}(t_L-1)^2 + o((t_L-1)^2) \\ &\underset{(\mathcal{G}2),(\mathcal{G}3)}{=} \frac{G''(1)}{2}(t_L-1)^2 + o((t_L-1)^2) \end{aligned} \tag{1.123}$$

sowie

$$\lambda_L = G'(t_L) = G''(1)(t_L-1) + o(t_L-1). \tag{1.124}$$

Anschließend setzen wir (1.124) in (1.123) ein, das

$$G(t_L) = \frac{\lambda_L}{2}(t_L-1) + o((t_L-1)^2) \underset{(1.124)}{=} \lambda_L \left(\frac{1}{2}(t_L-1) + o(t_L-1)\right)$$

ergibt, wobei wir in der letzten Gleichung zusätzlich $\lambda_L \neq 0$ benutzt haben. Entsprechend können wir auch

$$G(s_L) = \lambda_L \left(\frac{1}{2}(s_L+1) + o(s_L+1)\right)$$

herleiten. Wegen $t_L = 1 + o(1)$ und $s_L = -1 + o(1)$ nach (1.103) finden wir somit ein $L_1 > L_0$ mit

$$\begin{aligned} |G(t_L) - G(s_L)| &\le |\lambda_L| \left(\frac{1}{2}\left(|t_L-1| + |s_L+1|\right) + o(t_L-1) + o(s_L+1)\right) \\ &\le \frac{|\lambda_L|}{2} \end{aligned} \tag{1.125}$$

für alle $L \ge L_1$, sodass

$$|\lambda_L| \underset{(1.122),(1.125)}{\lesssim} |G(M_L) - G(t_L)| + \frac{|\lambda_L|}{2} + |G(s_L) - G(m_L)|$$

bzw. nach Umformen der Ungleichung

$$|\lambda_L| \lesssim |G(M_L) - G(t_L)| + |G(m_L) - G(s_L)| \tag{1.126}$$

für alle $L \ge L_1$ gilt. Um die rechte Seite von (1.126) weiter nach oben abzuschätzen, wenden wir für G erneut die Taylor-Formel z.B. mit Entwicklungspunkt t_L und Peano-Restglied an und setzen anschließend M_L ein, sodass sich

$$\begin{aligned} G(M_L) - G(t_L) &= G'(t_L)(M_L - t_L) + \frac{G''(t_L)}{2}(M_L-t_L)^2 + o((M_L-t_L)^2) \\ &\underset{(1.124)}{=} \lambda_L(M_L - t_L) + (M_L-t_L)^2\left(\frac{G''(t_L)}{2} + o(1)\right) \end{aligned}$$

und daher

$$|G(M_L) - G(t_L)| \lesssim |\lambda_L||M_L - t_L| + |M_L - t_L|^2 \tag{1.127}$$

für alle $L \geq L_1$ ergibt. Auf analoge Weise kann man

$$|G(m_L) - G(s_L)| \lesssim |\lambda_L||m_L - s_L| + |m_L - s_L|^2 \tag{1.128}$$

für alle $L \geq L_1$ folgern. Insgesamt erhalten wir

$$|\lambda_L| \underset{(1.127),(1.128)}{\overset{(1.126),}{\lesssim}} |\lambda_L| \left(|M_L - t_L| + |m_L - s_L|\right) + |M_L - t_L|^2 + |m_L - s_L|^2$$

für alle $L \geq L_1$. In Kombination mit Lemma 1.2.20 können wir ein hinreichend kleines $\delta > 0$ wählen, sodass eine Konstante $C > 0$ und ein $L_2 > L_1$ mit $|M_L - t_L| + |m_L - s_L| < \delta$ und

$$|\lambda_L| \leq \frac{|\lambda_L|}{2} + C\left(|M_L - t_L|^2 + |m_L - s_L|^2\right)$$

für alle $L \geq L_2$ existieren. Mittels Umstellen dieser Ungleichung folgt

$$|\lambda_L| \lesssim |M_L - t_L|^2 + |m_L - s_L|^2 \tag{1.129}$$

für alle $L \geq L_2$. Schließlich impliziert dies wiederum zusammen mit Lemma 1.2.20 die Existenz eines hinreichend großen $\widehat{L}_\epsilon^{(1)} > L_2$, sodass die Abschätzung

$$\begin{aligned}
|\lambda_L| &\lesssim \left(e^{-\left(\frac{\sqrt{G''(1)}}{2}(1+\mathfrak{m})-\frac{\epsilon}{2}\right)L}\right)^2 + \left(e^{-\left(\frac{\sqrt{G''(1)}}{2}(1-\mathfrak{m})-\frac{\epsilon}{2}\right)L}\right)^2 \\
&\lesssim e^{-\left(\sqrt{G''(1)}(1+\mathfrak{m})-\epsilon\right)L} + e^{-\left(\sqrt{G''(1)}(1-\mathfrak{m})-\epsilon\right)L} \\
&\lesssim e^{-\left(\sqrt{G''(1)}(1-|\mathfrak{m}|)-\epsilon\right)L}
\end{aligned}$$

für alle $L \geq \widehat{L}_\epsilon^{(1)}$ gilt.

(ii) Für $L \geq L_0$ gilt

$$|\lambda_L| \underset{(1.124)}{=} |t_L - 1||G''(1) + o(1)|.$$

Aufgrund von $G''(1) > 0$ wegen $(\mathcal{G}3)$ können wir ein $\mu > 0$ und dazu ein $L_3 > L_0$ wählen, sodass für den zweiten Faktor der rechten Seite $|G''(1) + o(1)| > \mu$ und daher

$$|t_L - 1| \lesssim |\lambda_L|$$

für alle $L \geq L_3$ gelten. Somit erhalten wir

$$|1 - M_L| \leq |1 - t_L| + |t_L - M_L| \lesssim |\lambda_L| + |t_L - M_L|$$

für alle $L \geq L_3$, sodass wir nach (i) und Lemma 1.2.20 (i) ein $\widehat{L}_\epsilon^{(2)} > \max\{L_3, \widehat{L}_\epsilon^{(1)}\}$ ($\widehat{L}_\epsilon^{(1)}$ aus dem Beweis von (i)) wählen können, infolgedessen

$$|1 - M_L| \lesssim e^{-\left(\sqrt{G''(1)}(1-|\mathfrak{m}|)-\epsilon\right)L} + e^{-\left(\frac{\sqrt{G''(1)}}{2}(1+\mathfrak{m})-\epsilon\right)L} \lesssim e^{-\left(\frac{\sqrt{G''(1)}}{2}(1-|\mathfrak{m}|)-\epsilon\right)L}$$

für alle $L \geq \widehat{L}_\epsilon^{(2)}$ gilt.

(iii) Da analog zu (1.124) die Gleichung

$$|\lambda_L| = |s_L + 1||G''(-1) + o(1)| = |s_L + 1||G''(1) + o(1)|$$

aufgrund der Symmetrie von G und somit G'' für alle $L \geq L_0$ gilt, folgt wie im Beweis von (ii) die Existenz eines hinreichend großen $\widehat{L}_\epsilon^{(3)} > 0$, sodass

$$|1 + m_L| \lesssim e^{-\left(\frac{\sqrt{G''(1)}}{2}(1-|\mathfrak{m}|)-\epsilon\right)L}$$

für alle $L \geq \widehat{L}_\epsilon^{(3)}$ gilt.

Schließlich wählen wir $\widehat{L}_\epsilon := \max\{\widehat{L}_\epsilon^{(1)}, \widehat{L}_\epsilon^{(2)}, \widehat{L}_\epsilon^{(3)}\}$, sodass die drei behaupteten Abschätzungen für alle $L \geq \widehat{L}_\epsilon$ gelten. □

Damit können wir jetzt die Aussage in Satz 1.2.14 insofern verschärfen, dass der Term in (1.54) sogar „exponentiell klein" für $L \gg 1$ wird. Dafür müssen wir jedoch weitere Voraussetzungen an das Potenzial G stellen und erstmals die Größe des Parameters $\mathfrak{m} \in (-1, 1)$ in der Definition des Minimierungsproblems (1.10) begrenzen.

Satz 1.2.23.
Sei $\mathfrak{m} \in \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ und das Potenzial G erfülle zusätzlich ($\mathcal{G}4$) und ($\mathcal{G}5$). Außerdem seien der zugehörige Minimierer w_L aus Definition 1.1.2, die Voraussetzungen 1.2.13 und 1.2.19 sowie die Funktion v_{L,x_L} unter Verwendung der Definition 1.2.4 mit $z = x_L$ für $L \geq \widehat{L}_2$ gegeben. Dann existiert für jedes $\epsilon > 0$ ein $\widehat{L}_\epsilon > 0$, sodass die Abschätzung

$$\|w_L - v_{L,x_L}\|_{C^1([-L,L])} \lesssim \exp\left(-\left(\frac{\sqrt{G''(1)}}{4}(1 - 3|\mathfrak{m}|) - \epsilon\right) L\right) \tag{1.130}$$

für alle $L \geq \widehat{L}_\epsilon$ gilt, wobei wir $(v_{L,x_L})_x(0) := 0$ für alle $L \geq \widehat{L}_2$ definieren.

Beweis
Seien $\epsilon > 0$ und $L_0 := \max\{\widehat{L}_2, \widehat{L}_3, \widehat{L}_4\}$ ($\widehat{L}_2$ aus den Voraussetzungen 1.2.13 (ii), $\widehat{L}_3$ aus Lemma 1.2.17 und $\widehat{L}_4$ aus den Voraussetzungen 1.2.19) gegeben.

Nachfolgend beweisen wir dann nur, dass es ein $\widehat{L}_\epsilon > 0$ mit

$$\|w_L - v_{L,x_L}\|_{C^1([0,L])} \lesssim e^{-\left(\frac{\sqrt{G''(1)}}{4}(1-3|\mathfrak{m}|)-\epsilon\right)L} \tag{1.131}$$

für alle $L \geq \widehat{L}_\epsilon$ gibt, denn die entsprechende Aussage auf dem Intervall $[-L, 0]$ ergibt sich wie im Beweis von Satz 1.2.14 aus Symmetriegründen. Ferner bezeichne dabei $(v_{L,x_L})_x(0)$ zunächst die rechtsseitige Ableitung von v_{L,x_L} in $x = 0$ für $L \geq \widehat{L}_2$, aber mit derselben Begründung wie am Ende des Beweises von Satz 1.2.14 gilt die

Abschätzung (1.131) auch bei Verwendung unserer Festlegung $(v_{L,x_L})_x(0) := 0$ für $L \geq \widehat{L}_2$.

Dazu sei $L \geq L_0$. Dann gehen wir im Wesentlichen wie im Beweis von Satz (1.2.14) vor: Der Minimierer w_L erfüllt die Differentialgleichung

$$(w_L)_x \underset{(1.73)}{=} \sqrt{2}\sqrt{G(w_L) - G(M_L) - \lambda_L(w_L - M_L)} \tag{1.132}$$

in $[0, L]$ und es gilt $w_L(x_L) = 0$, während die Funktion v_{L,x_L} die Gleichung

$$(v_{L,x_L})_x \underset{(1.75)}{=} \sqrt{2G(v_{L,x_L})} \tag{1.133}$$

in $[0, L]$ mit $v_{L,x_L}(x_L) = 0$ erfüllt.

Nun verfolgen wir erneut das Ziel, die Funktion $\phi_L := w_L - v_{L,x_L}$ in $[0, L]$ geeignet abzuschätzen: Zunächst finden wir nach Korollar (1.2.22) (i), (ii) ein $L_\epsilon^{(1)} > L_0$, sodass sich unter Verwendung der stetigen Funktion H aus den Voraussetzungen 1.0.1 die Abschätzung

$$\begin{aligned}
&|2G(M_L) + 2\lambda_L(w_L - M_L)| \\
&\leq 2H(M_L)|1 + M_L|^2|1 - M_L|^2 + 2|\lambda_L||M_L - m_L| \underset{(1.35)}{\lesssim} |1 - M_L|^2 + |\lambda_L| \\
&\lesssim \left(e^{-\left(\frac{\sqrt{G''(1)}}{2}(1-|\mathfrak{m}|)-\frac{\epsilon}{2}\right)L}\right)^2 + e^{-\left(\sqrt{G''(1)}(1-|\mathfrak{m}|)-\epsilon\right)L} \\
&\lesssim e^{-\left(\sqrt{G''(1)}(1-|\mathfrak{m}|)-\epsilon\right)L}
\end{aligned} \tag{1.134}$$

in $[0, L]$ für alle $L \geq L_\epsilon^{(1)}$ ergibt. Darauf basierend schätzen wir den Term

$$\left|\sqrt{2G(w_L) - 2G(M_L) - 2\lambda_L(w_L - M_L)} - \sqrt{2G(M_L)}\right|$$

wie in (1.77) und (1.78) gleichmäßig in x ab, wobei wir hier die obere Schranke aus (1.134) anstelle des Terms $\widehat{R}_L = \max\left\{R_L, \frac{1}{L}\right\}$ verwenden, und erhalten in beiden Fällen

$$\begin{aligned}
\left|\sqrt{2G(w_L) - 2G(m_L) - 2\lambda_L(w_L - m_L)} - \sqrt{2G(w_L)}\right| &\lesssim \sqrt{e^{-\left(\sqrt{G''(1)}(1-|\mathfrak{m}|)-\epsilon\right)L}} \\
&\lesssim e^{-\left(\frac{\sqrt{G''(1)}}{2}(1-|\mathfrak{m}|)-\frac{\epsilon}{2}\right)L}
\end{aligned}$$

gleichmäßig in $[0, L]$ für alle $L \geq L_\epsilon^{(1)}$, d.h. es existiert eine Konstante $C_1 > 0$ mit

$$\begin{aligned}
&\left|\sqrt{2G(w_L) - 2G(m_L) - 2\lambda_L(w_L - m_L)} - \sqrt{2G(w_L)}\right| \\
&\leq C_1 \cdot e^{-\left(\frac{\sqrt{G''(1)}}{2}(1-|\mathfrak{m}|)-\frac{\epsilon}{2}\right)L}
\end{aligned} \tag{1.135}$$

in $[0, L]$ für alle $L \geq L_\epsilon^{(1)}$.

Darüber hinaus gilt

$$\left|\sqrt{2G(w_L)} - \sqrt{2G(v_{L,x_L})}\right| \underset{(1.82)}{\leq} K_G |w_L - v_{L,x_L}| \tag{1.136}$$

in $[0, L]$ für alle $L \geq L_\epsilon^{(1)}$, wobei

$$K_G \underset{(1.81)}{=} \max_{t\in[-1,1]} |g'(t)| \tag{1.137}$$

mit $g(t) := \sqrt{2G(t)}$, $t \in [-1, 1]$, ist. Dann folgt mit ($\mathcal{G}5$), dass g in $[-1, 1]$ konkav ist, d.h. g' ist in $[-1, 1]$ monoton fallend. Zudem ist

$$g'(0) = \frac{G'(0)}{\sqrt{2G(0)}} = 0,$$

da zum Einen $G(0) > 0$ wegen ($\mathcal{G}2$) und zum Anderen $G'(0) = 0$ wegen der Symmetrie von G nach ($\mathcal{G}1$) gelten, sodass wir insgesamt

$$K_G = \max_{t\in[-1,1]} |g'(t)| = \max\{|g'(-1)|, |g'(1)|\} \underset{(1.79),(1.80)}{=} \sqrt{G''(1)} \tag{1.138}$$

erhalten.

Somit folgt analog zu (1.83) unter Verwendung von (1.135), (1.136) und (1.138) die Abschätzung

$$|(\phi_L)_x| \leq \sqrt{G''(1)}|\phi_L| + C_1 e^{-\left(\frac{\sqrt{G''(1)}}{2}(1-|\mathfrak{m}|)-\frac{\epsilon}{2}\right)L} \tag{1.139}$$

in $[0, L]$ für alle $L \geq L_\epsilon^{(1)}$.

Für die weitere Argumentation beschränken wir uns erst einmal auf das Teilintervall $[x_L, L]$: Da zum Einen $\phi_L(x_L) = 0$ gilt und zum Anderen nach Korollar (1.2.22) (ii) und dem nachfolgenden Lemma (1.2.24) (ii) ein $L_\epsilon^{(2)} > L_\epsilon^{(1)}$ sowie eine Konstante $C_2 > 0$ mit

$$\begin{aligned}
|\phi_L(L)| &= |M_L - v(L - x_L)| \leq |M_L - 1| + |1 - v(L - x_L)| \\
&\leq \frac{C_2}{2}\left(e^{-\left(\frac{\sqrt{G''(1)}}{2}(1-|\mathfrak{m}|)-\frac{\epsilon}{2}\right)L} + e^{-\left(\frac{\sqrt{G''(1)}}{2}(1+\mathfrak{m})-\frac{\epsilon}{2}\right)L}\right) \\
&\leq C_2 e^{-\left(\frac{\sqrt{G''(1)}}{2}(1-|\mathfrak{m}|)-\frac{\epsilon}{2}\right)L}
\end{aligned}$$

für alle $L \geq L_\epsilon^{(2)}$ existiert, folgt in Kombination mit (1.139) zum Einen $|\phi_L(x)| \leq \psi_L(x)$ für alle $x \in \left[x_L, \frac{L+x_L}{2}\right]$, wobei ψ_L die eindeutig bestimmte Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{cases}
(\psi_L)_x(x) = \sqrt{G''(1)}\psi_L(x) + C_1 e^{-\left(\frac{\sqrt{G''(1)}}{2}(1-|\mathfrak{m}|)-\frac{\epsilon}{2}\right)L} & \text{für } x \in \left[x_L, \frac{L+x_L}{2}\right], \\
\psi_L(x_L) = 0,
\end{cases}$$

ist, und zum Anderen $|\phi_L(x)| \leq \eta_L(-x)$ für alle $x \in \left[\frac{L+x_L}{2}, L\right]$ und alle $L \geq L_\epsilon^{(2)}$, wobei η_L die eindeutig bestimmte Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{cases} (\eta_L)_x(x) = \sqrt{G''(1)}\eta_L(x) + C_1 e^{-\left(\frac{\sqrt{G''(1)}}{2}(1-|\mathfrak{m}|)-\frac{\epsilon}{2}\right)L} & \text{für } x \in \left[-L, -\frac{L+x_L}{2}\right], \\ \eta_L(-L) = C_2 e^{-\left(\frac{\sqrt{G''(1)}}{2}(1-|\mathfrak{m}|)-\frac{\epsilon}{2}\right)L}, \end{cases}$$

ist. Es gilt

$$\psi_L(x) = \frac{-C_1}{\sqrt{G''(1)}} e^{-\left(\frac{\sqrt{G''(1)}}{2}(1-|\mathfrak{m}|)-\frac{\epsilon}{2}\right)L} + \frac{C_1}{\sqrt{G''(1)}} e^{-\left(\frac{\sqrt{G''(1)}}{2}(1-|\mathfrak{m}|)-\frac{\epsilon}{2}\right)L} e^{\sqrt{G''(1)}(x-x_L)}$$

für $x \in \left[x_L, \frac{L+x_L}{2}\right]$ und

$$\begin{aligned} \eta_L(x) = {} & \frac{-C_1}{\sqrt{G''(1)}} e^{-\left(\frac{\sqrt{G''(1)}}{2}(1-|\mathfrak{m}|)-\frac{\epsilon}{2}\right)L} \\ & + \frac{C_1 + C_2\sqrt{G''(1)}}{\sqrt{G''(1)}} e^{-\left(\frac{\sqrt{G''(1)}}{2}(1-|\mathfrak{m}|)-\frac{\epsilon}{2}\right)L} e^{\sqrt{G''(1)}(x+L)} \end{aligned}$$

für $x \in \left[-L, -\frac{L+x_L}{2}\right]$, sodass wir

$$\begin{aligned} |\phi_L(x)| & \leq \begin{cases} \psi_L(x) & \text{für } x \in \left[x_L, \frac{L+x_L}{2}\right], \\ \eta_L(-x) & \text{für } x \in \left[-L, -\frac{L+x_L}{2}\right] \end{cases} \\ & \leq \max\left\{\psi_L\left(\frac{L+x_L}{2}\right), \eta_L\left(-\frac{L+x_L}{2}\right)\right\} \\ & \lesssim e^{-\left(\frac{\sqrt{G''(1)}}{2}(1-|\mathfrak{m}|)-\frac{\epsilon}{2}\right)L} e^{\frac{\sqrt{G''(1)}}{2}(L-x_L)} \end{aligned} \tag{1.140}$$

gleichmäßig für alle $x \in [x_L, L]$ und alle $L \geq L_\epsilon^{(2)}$ erhalten. Weil $L - x_L = \frac{1}{2}(1 + \mathfrak{m})L + o(L)$ nach Korollar (1.2.18) gilt, gibt es ein $L_\epsilon^{(3)} > L_\epsilon^{(2)}$ mit

$$\frac{L - x_L}{L} < \frac{1}{2}(1 + \mathfrak{m}) + \frac{\epsilon}{\sqrt{G''(1)}} \tag{1.141}$$

für alle $L \geq L_\epsilon^{(3)}$, sodass wir

$$\begin{aligned} \|\phi_L\|_{C([x_L,L])} & \underset{(1.140)}{\lesssim} e^{-\left(\frac{\sqrt{G''(1)}}{2}(1-|\mathfrak{m}|)-\frac{\epsilon}{2}\right)L} e^{\frac{\sqrt{G''(1)}}{2}(L-x_L)} \\ & \underset{(1.141)}{\lesssim} e^{-\left(\frac{\sqrt{G''(1)}}{2}(1-|\mathfrak{m}|)-\frac{\epsilon}{2}\right)L} e^{\left(\frac{\sqrt{G''(1)}}{4}(1+\mathfrak{m})+\frac{\epsilon}{2}\right)L} \\ & \lesssim e^{-\left(\frac{\sqrt{G''(1)}}{2}(1-|\mathfrak{m}|)-\frac{\epsilon}{2}\right)L} e^{\left(\frac{\sqrt{G''(1)}}{4}(1+|\mathfrak{m}|)+\frac{\epsilon}{2}\right)L} \\ & = e^{-\left(\frac{\sqrt{G''(1)}}{4}(1-3|\mathfrak{m}|)-\epsilon\right)L} \end{aligned}$$

für alle $L \geq L_\epsilon^{(3)}$ folgern.

Um jetzt eine Abschätzung auf dem Teilintervall $[0, x_L]$ zu beweisen, gehen wir analog wie im Beweis von (1.139) bis (1.140) vor und erhalten dann unter Verwendung des Korollars (1.2.22) (iii) und des nachfolgenden Lemmas (1.2.24) (i) die Abschätzung

$$\|\phi_L\|_{C([0,x_L])} \lesssim e^{-\left(\frac{\sqrt{G''(1)}}{2}(1-|\mathfrak{m}|)-\frac{\epsilon}{2}\right)L} e^{\frac{\sqrt{G''(1)}}{2}x_L} \tag{1.142}$$

für alle $L \geq L_\epsilon^{(2)}$. Da $x_L = \frac{1}{2}(1+\mathfrak{m})L + o(L)$ nach Korollar (1.2.18) gilt, existiert wiederum ein $L_\epsilon^{(4)} > L_\epsilon^{(2)}$ mit

$$\frac{x_L}{L} < \frac{1}{2}(1-\mathfrak{m}) + \frac{\epsilon}{\sqrt{G''(1)}} \tag{1.143}$$

für alle $L \geq L_\epsilon^{(4)}$, sodass wir

$$\begin{aligned}
\|\phi_L\|_{C([0,x_L])} &\underset{(1.142)}{\lesssim} e^{-\left(\frac{\sqrt{G''(1)}}{2}(1-|\mathfrak{m}|)-\frac{\epsilon}{2}\right)L} e^{\frac{\sqrt{G''(1)}}{2}x_L} \\
&\underset{(1.143)}{\lesssim} e^{-\left(\frac{\sqrt{G''(1)}}{2}(1-|\mathfrak{m}|)-\frac{\epsilon}{2}\right)L} e^{\left(\frac{\sqrt{G''(1)}}{4}(1-\mathfrak{m})+\frac{\epsilon}{2}\right)L} \\
&\lesssim e^{-\left(\frac{\sqrt{G''(1)}}{2}(1-|\mathfrak{m}|)-\frac{\epsilon}{2}\right)L} e^{\left(\frac{\sqrt{G''(1)}}{4}(1+|\mathfrak{m}|)+\frac{\epsilon}{2}\right)L} \\
&= e^{-\left(\frac{\sqrt{G''(1)}}{4}(1-3|\mathfrak{m}|)-\epsilon\right)L}
\end{aligned}$$

für alle $L \geq L_\epsilon^{(4)}$ schließen.

Insgesamt erhalten wir

$$\|w_L - v_{L,x_L}\|_{C([0,L])} = \|\phi_L\|_{C([0,L])} \lesssim e^{-\left(\frac{\sqrt{G''(1)}}{4}(1-3|\mathfrak{m}|)-\epsilon\right)L}$$

und darüber hinaus

$$\begin{aligned}
\|(w_L)_x - (v_{L,x_L})_x\|_{C([0,L])} &\underset{(1.139)}{\lesssim} \|w_L - v_{L,x_L}\|_{C([0,L])} + e^{-\left(\frac{\sqrt{G''(1)}}{2}(1-|\mathfrak{m}|)-\frac{\epsilon}{2}\right)L} \\
&\lesssim e^{-\left(\frac{\sqrt{G''(1)}}{4}(1-3|\mathfrak{m}|)-\epsilon\right)L} + e^{-\left(\frac{\sqrt{G''(1)}}{2}(1-|\mathfrak{m}|)-\frac{\epsilon}{2}\right)L} \\
&\lesssim e^{-\left(\frac{\sqrt{G''(1)}}{4}(1-3|\mathfrak{m}|)-\epsilon\right)L}
\end{aligned}$$

für alle $L \geq \widehat{L}_\epsilon := \max\{L_\epsilon^{(3)}, L_\epsilon^{(4)}\}$, d.h. (1.131) ist bewiesen. □

Im vorigen Beweis haben wir auf das folgende Lemma verwiesen.

Lemma 1.2.24.
Sei $\mathfrak{m} \in (-1,1)$*. Außerdem seien die zugehörigen Minimierer* w_L *aus Definition 1.1.2, die Voraussetzungen 1.2.13 und der kink* v *aus Lemma 1.2.1 gegeben. Dann existiert für jedes* $\epsilon > 0$ *ein* $\widehat{L}_\epsilon > 0$*, sodass*

(i) $|1 - v(x_L)| \lesssim \exp\left(-\left(\frac{\sqrt{G''(1)}}{2}(1-\mathfrak{m}) - \epsilon\right) L\right)$ *und*

(ii) $|1 - v(L - x_L)| \lesssim \exp\left(-\left(\frac{\sqrt{G''(1)}}{2}(1+\mathfrak{m}) - \epsilon\right) L\right)$

für alle $L \geq \widehat{L}_\epsilon$ *gelten.*

Beweis
Sei $\epsilon > 0$, wobei ohne Einschränkung der Allgemeinheit

$$\epsilon < \sqrt{G''(1)}(1-\mathfrak{m}) \tag{1.144}$$

gelte, und sei $L_0 := \widehat{L}_2$ ($\widehat{L}_2$ aus den Voraussetzungen 1.2.13).

(i) Zunächst finden wir aufgrund der Stetigkeit der Funktion H aus den Voraussetzungen 1.0.1 ein $t_\epsilon \in (0,1)$ mit

$$H(t) \geq H(1) - \frac{1}{8}\left(\frac{\epsilon}{1-\mathfrak{m}}\right)^2 = \frac{1}{8}G''(1) - \frac{1}{8}\left(\frac{\epsilon}{1-\mathfrak{m}}\right)^2 \tag{1.145}$$

für alle $t \in (t_\epsilon, 1)$. Nach Lemma 1.2.1 (i), (ii) existiert nun ein $\tilde{x}_\epsilon > 0$ mit $v(\tilde{x}_\epsilon) = t_\epsilon$ und $v(x) \in (t_\epsilon, 1)$ für alle $x > \tilde{x}_\epsilon$. Somit erhalten wir

$$\begin{aligned} v_x \underset{(1.24)}{=} \sqrt{2G(v)} = \sqrt{2H(v)}(1-v^2) &\geq \sqrt{\frac{1}{4}G''(1) - \frac{1}{4}\left(\frac{\epsilon}{1-\mathfrak{m}}\right)^2}(1-v^2) \\ &\geq \underbrace{\left(\frac{\sqrt{G''(1)}}{2} - \frac{\epsilon}{2(1-\mathfrak{m})}\right)}_{=:C_\epsilon \underset{(1.144)}{>} 0}(1-v^2), \end{aligned} \tag{1.146}$$

in $[\tilde{x}_\epsilon, \infty)$, wobei wir in (1.146) die Ungleichung $\sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}$ für $a, b \geq 0$ verwendet haben. Daher gilt $v \geq u$ in $[\tilde{x}_\epsilon, \infty)$, wobei u die eindeutig bestimmte Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{cases} u_x = C_\epsilon(1-u^2) & \text{in } [\tilde{x}_\epsilon, \infty), \\ u(\tilde{x}_\epsilon) = t_\epsilon, \end{cases}$$

ist. Sei nun $\widehat{x}_\epsilon \in \mathbb{R}$ der eindeutig bestimmte Punkt mit $\tanh(\widehat{x}_\epsilon) = t_\epsilon$, dann gilt

$$u(x) = \tanh(C_\epsilon(x - \tilde{x}_\epsilon) + \widehat{x}_\epsilon)$$

für $x \in [\tilde{x}_\epsilon, \infty)$. Zudem folgt aus der Darstellung

$$x_L \underset{(1.96)}{=} \frac{1}{2}(1-\mathfrak{m})L + o(L), \tag{1.147}$$

dass ein $L_\epsilon^{(1)} > L_0$ mit $x_L \geq \tilde{x}_\epsilon$ für alle $L \geq L_\epsilon^{(1)}$ existiert. Insgesamt ergibt sich damit die Abschätzung

$$\begin{aligned} |1 - v(x_L)| &= 1 - v(x_L) \leq 1 - u(x_L) = 1 - \tanh(C_\epsilon(x_L - \tilde{x}_\epsilon) + \widehat{x}_\epsilon) \\ &= 1 - \frac{e^{C_\epsilon(x_L - \tilde{x}_\epsilon) + \widehat{x}_\epsilon} - e^{-C_\epsilon(x_L - \tilde{x}_\epsilon) - \widehat{x}_\epsilon}}{e^{C_\epsilon(x_L - \tilde{x}_\epsilon) + \widehat{x}_\epsilon} + e^{-C_\epsilon(x_L - \tilde{x}_\epsilon) - \widehat{x}_\epsilon}} \\ &= \frac{2e^{-C_\epsilon(x_L - \tilde{x}_\epsilon) - \widehat{x}_\epsilon}}{e^{C_\epsilon(x_L - \tilde{x}_\epsilon) + \widehat{x}_\epsilon} + e^{-C_\epsilon(x_L - \tilde{x}_\epsilon) - \widehat{x}_\epsilon}} \\ &\lesssim e^{-2C_\epsilon(x_L - \tilde{x}_\epsilon) - 2\widehat{x}_\epsilon} \lesssim e^{-2C_\epsilon x_L} \end{aligned} \tag{1.148}$$

für alle $L \geq L_\epsilon^{(1)}$. Darüber hinaus gibt es wegen (1.147) ein $L_\epsilon^{(2)} > L_\epsilon^{(1)}$ mit

$$\frac{x_L}{L} > \frac{1}{2}(1 - \mathfrak{m}) - \frac{\epsilon}{2\sqrt{G''(1)}} \underset{(1.144)}{>} 0$$

für alle $L \geq L_\epsilon^{(2)}$, sodass sich

$$\begin{aligned} |1 - v(x_L)| &\lesssim e^{-2C_\epsilon x_L} \underset{(1.146)}{=} e^{-\left(\sqrt{G''(1)} - \frac{\epsilon}{1-\mathfrak{m}}\right) x_L} \leq e^{-\left(\sqrt{G''(1)} - \frac{\epsilon}{1-\mathfrak{m}}\right)\left(\frac{1}{2}(1-\mathfrak{m}) - \frac{\epsilon}{2\sqrt{G''(1)}}\right) L} \\ &= e^{-\left(\frac{\sqrt{G''(1)}}{2}(1-\mathfrak{m}) - \epsilon + \frac{\epsilon^2}{2\sqrt{G''(1)}(1-\mathfrak{m})}\right) L} \leq e^{-\left(\frac{\sqrt{G''(1)}}{2}(1-\mathfrak{m}) - \epsilon\right) L} \end{aligned}$$

für alle $L \geq L_\epsilon^{(2)}$ ergibt.

(ii) Wegen $L - x_L = \frac{1}{2}(1 + \mathfrak{m})L + o(L)$ nach (1.96) erhalten wir mit einer ähnlichen Argumentation wie in (i), dass ein $L_\epsilon^{(3)} > 0$ mit

$$|1 - v(L - x_L)| \lesssim e^{-\left(\frac{\sqrt{G''(1)}}{2}(1+\mathfrak{m}) - \epsilon\right) L}$$

für alle $L \geq L_\epsilon^{(3)}$ existiert.

Schließlich wählen wir $\widehat{L}_\epsilon := \max\{L_\epsilon^{(2)}, L_\epsilon^{(3)}\}$. □

Somit können wir das Korollar 1.2.18 deutlich verbessern.

Korollar 1.2.25.
Sei $\mathfrak{m} \in \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ und das Potenzial G erfülle zusätzlich ($\mathcal{G}4$) und ($\mathcal{G}5$). Außerdem seien der zugehörige Minimierer w_L aus Definition 1.1.2, die Voraussetzungen 1.2.13 und 1.2.19 sowie die zu $\mathfrak{m}$ gehörige Funktion $v_L \in \mathcal{A}_L$ zusammen mit ihren zwei Nullstellen $\pm z_L$ aus Lemma 1.2.6 für alle $L \geq \widehat{L}_2$ gegeben. Dann existiert für jedes $\epsilon > 0$ ein $\widehat{L}_\epsilon > 0$, sodass die Abschätzung

$$|x_L - z_L| \lesssim L \, \exp\left(-\left(\frac{\sqrt{G''(1)}}{4}(1 - 3|\mathfrak{m}|) - \epsilon\right) L\right) \tag{1.149}$$

für alle $L \geq \widehat{L}_\epsilon$ gilt. Ferner gilt

$$x_L = \frac{1}{2}(1 - \mathfrak{m})L + o(1). \tag{1.150}$$

Beweis
Die Abschätzung (1.149) ergibt sich unmittelbar aus Satz 1.2.23 in Kombination mit den Abschätzungen (1.97), (1.98) und (1.100).

In Kombination mit dem asymptotischen Verhalten (1.28) von z_L folgt anschließend (1.150). □

Dieses Resultat und Satz 1.2.23 ermöglichen es uns nun, sogar den Abstand zwischen dem Minimierer w_L und der Funktion $v_L \in \mathcal{A}_L$ aus Lemma 1.2.6 in der C^1-Norm abzuschätzen. Bisher wissen wir nämlich nur aus Korollar 1.2.9, dass für die Energie-Differenz $E_L(w_L) - E_L(v_L) = o(1)$ gilt.

Satz 1.2.26.
Sei $\mathfrak{m} \in \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ und das Potenzial G erfülle zusätzlich $(\mathcal{G}4)$ und $(\mathcal{G}5)$. Außerdem seien der zugehörige Minimierer w_L aus Definition 1.1.2, die Voraussetzungen 1.2.13 und 1.2.19 sowie die zu $\mathfrak{m}$ gehörige Funktion $v_L \in \mathcal{A}_L$ aus Lemma 1.2.6 für alle $L \geq \widehat{L}_2$ gegeben. Dann existiert zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\widehat{L}_\epsilon > 0$, sodass die Abschätzung

$$\|w_L - v_L\|_{C^1([-L,L])} \lesssim L \, \exp\left(-\left(\frac{\sqrt{G''(1)}}{4}(1 - 3|\mathfrak{m}|) - \epsilon\right) L\right) \tag{1.151}$$

für alle $L \geq \widehat{L}_\epsilon$ gilt, wobei wir $(v_L)_x(0) := 0$ für alle $L \geq \widehat{L}_2$ definieren. Insbesondere gilt

$$\|w_L - v_L\|_{C^1([-L,L])} = o(1).$$

Beweis
Seien $\epsilon > 0$ und $L_0 := \max\{\widehat{L}_2, \widehat{L}_3, \widehat{L}_4\}$ ($\widehat{L}_2$ aus den Voraussetzungen 1.2.13 (ii), $\widehat{L}_3$ aus Lemma 1.2.17 und $\widehat{L}_4$ aus den Voraussetzungen 1.2.19) gegeben. Dann existiert nach Satz 1.2.23 ein $\widehat{L}_\epsilon^{(1)} > L_0$, sodass die Abschätzung

$$\|w_L - v_{L,x_L}\|_{C^1([-L,L])} \lesssim e^{-\left(\frac{\sqrt{G''(1)}}{4}(1-3|\mathfrak{m}|)-\epsilon\right)L}$$

für alle $L \geq \widehat{L}_\epsilon^{(1)}$ gilt. Daher erhalten wir

$$\begin{aligned}\|w_L - v_L\|_{C^1([-L,L])} &\leq \|w_L - v_{L,x_L}\|_{C^1([-L,L])} + \|v_{L,x_L} - v_L\|_{C^1([-L,L])} \\ &\lesssim e^{-\left(\frac{\sqrt{G''(1)}}{4}(1-3|\mathfrak{m}|)-\epsilon\right)L} + \|v_{L,x_L} - v_L\|_{C^1([-L,L])}\end{aligned} \tag{1.152}$$

für alle $L \geq \widehat{L}_\epsilon^{(1)}$, sodass wir im Folgenden den zweiten Summanden des letzten Ausdrucks von (1.152) betrachten:

Sei $L \geq \widehat{L}_\epsilon^{(1)}$. Aufgrund der Definitionen von v_L und v_{L,x_L} ist $v_{L,x_L} - v_L$ in $(-L,0) \cup (0,L)$ stetig differenzierbar mit

$$(v_{L,x_L})_x - (v_L)_x \underset{(1.24)}{=} \begin{cases} -\sqrt{2G(v_{L,x_L})} + \sqrt{2G(v_L)}, & \text{falls } x \in (-L,0), \\ \sqrt{2G(v_{L,x_L})} - \sqrt{2G(v_L)}, & \text{falls } x \in (0,L). \end{cases} \tag{1.153}$$

Da jetzt zum Einen $\sqrt{2G} \in C^{0,1}_{loc}(\mathbb{R})$ wegen ($\mathcal{G}1$) bis ($\mathcal{G}3$) und zum Anderen $|v_{L,x_L}|, |v_L| < 1$ in $[-L, L]$ aufgrund von Lemma 1.2.1 (ii) gelten, erhalten wir

$$\|(v_{L,x_L})_x - (v_L)_x\|_{C([-L,L])} \lesssim \|v_{L,x_L} - v_L\|_{C([-L,L])}$$

und somit

$$\|v_{L,x_L} - v_L\|_{C^1([-L,L])} \lesssim \|v_{L,x_L} - v_L\|_{C([-L,L])}. \tag{1.154}$$

Dabei gilt

$$\|v_{L,x_L} - v_L\|_{C([-L,L])} = 2v\left(\frac{|x_L - z_L|}{2}\right). \tag{1.155}$$

Denn sei ohne Einschränkung der Allgemeinheit $x_L \leq z_L$, so gilt $v_{L,x_L} - v_L \geq 0$ in $[-L, L]$, da der kink v nach Lemma 1.2.1 (ii) streng monoton wächst, und darüber hinaus gilt z.B.

$$\begin{aligned}(v_{L,x_L} - v_L)_x(x) &\underset{(1.153)}{=} \sqrt{2G(v_{L,x_L}(x))} - \sqrt{2G(v_L(x))}\\ &= \sqrt{2G(v(x - x_L))} - \sqrt{2G(v(x - z_L))}\\ &\begin{cases} \geq 0, & \text{falls } x \in \left(0, \frac{x_L + z_L}{2}\right), \\ = 0, & \text{falls } x = \frac{x_L + z_L}{2}, \\ \leq 0, & \text{falls } x \in \left(\frac{x_L+z_L}{2}, L\right), \end{cases}\end{aligned} \tag{1.156}$$

für $x \in (0, L)$, wobei wir in (1.156) verwendet haben, dass $\sqrt{2G(v)}$ in $\mathbb{R}_{\leq 0}$ bzw. $\mathbb{R}_{\geq 0}$ monoton wächst bzw. fällt, das sich aus Lemma 1.2.1 (ii) und der Monotonie von G und somit $\sqrt{2G}$ in $[-1, 0]$ bzw. $[0, 1]$ aufgrund von ($\mathcal{G}1$) und ($\mathcal{G}3$) ergibt, und dass $\sqrt{2G(v)}$ in $\mathbb{R}$ nach ($\mathcal{G}1$) und Lemma 1.2.1 (i) gerade ist. Dies impliziert

$$\begin{aligned}\|v_{L,x_L} - v_L\|_{C([0,L])} &= v_{L,x_L}\left(\frac{x_L + z_L}{2}\right) - v_L\left(\frac{x_L + z_L}{2}\right)\\ &= v\left(\frac{z_L - x_L}{2}\right) - v\left(\frac{x_L - z_L}{2}\right)\\ &= v\left(\frac{z_L - x_L}{2}\right) + v\left(\frac{z_L - x_L}{2}\right)\\ &= 2v\left(\frac{z_L - x_L}{2}\right) = 2v\left(\frac{|x_L - z_L|}{2}\right),\end{aligned}$$

da v in $\mathbb{R}$ ungerade und nach Annahme $x_L \leq z_L$ ist. In Kombination mit der Tatsache, dass v_{L,x_L}, v_L und damit auch $v_{L,x_L} - v_L$ in $[-L, L]$ gerade sind, ergibt sich schließlich (1.155).

Des Weiteren gilt $|v(x)| \leq \sqrt{2G(0)}|x|$ für alle $x \in \mathbb{R}$, da $v(0) = 0$ und wegen $|v| < 1$ in $\mathbb{R}$ zudem

$$|v_x| \underset{(1.24)}{=} \sqrt{2G(v)} \underset{(\mathcal{G}1)-(\mathcal{G}3)}{\leq} \sqrt{2G(0)}$$

in $\mathbb{R}$ gilt, sodass wir die Abschätzung

$$2v\left(\frac{|x_L - z_L|}{2\sqrt{2}}\right) \lesssim |x_L - z_L| \tag{1.157}$$

erhalten.

Nach Korollar (1.2.25) existiert nun ein $\widehat{L}_\epsilon^{(2)} > \widehat{L}_\epsilon^{(1)}$ mit

$$|x_L - z_L| \lesssim Le^{-\left(\frac{\sqrt{G''(1)}}{4}(1-3|\mathfrak{m}|)-\epsilon\right)L}$$

für alle $L \geq \widehat{L}_\epsilon^{(2)}$, sodass wir insgesamt

$$\begin{aligned}
\|w_L - v_L\|_{C^1([-L,L])} &\underset{(1.152)}{\lesssim} e^{-\left(\frac{\sqrt{G''(1)}}{4}(1-3|\mathfrak{m}|)-\epsilon\right)L} + \|v_{L,x_L} - v_L\|_{C^1([-L,L])} \\
&\overset{(1.154)}{\underset{(1.155),(1.157)}{\lesssim}} e^{-\left(\frac{\sqrt{G''(1)}}{4}(1-3|\mathfrak{m}|)-\epsilon\right)L} + |x_L - z_L| \\
&\lesssim e^{-\left(\frac{\sqrt{G''(1)}}{4}(1-3|\mathfrak{m}|)-\epsilon\right)L} + Le^{-\left(\frac{\sqrt{G''(1)}}{4}(1-3|\mathfrak{m}|)-\epsilon\right)L} \\
&\lesssim Le^{-\left(\frac{\sqrt{G''(1)}}{4}(1-3|\mathfrak{m}|)-\epsilon\right)L}
\end{aligned}$$

für alle $L \geq \widehat{L}_\epsilon^{(2)} =: \widehat{L}_\epsilon$, also die Behauptung, folgern. □

Zum Abschluss des Kapitels stellen wir uns die Frage, wie wir die bisherigen Abschätzungen, angefangen mit denjenigen in Lemma 1.2.20 bis zu denjenigen in Satz 1.2.26, noch weiter verbessern können, und zwar im Hinblick darauf, dass wir möglichst auf den Parameter $\epsilon > 0$ verzichten können. Die Schlüssel dazu sind im Wesentlichen das Korollar 1.2.25, das eine deutlich bessere Ausgangsposition als das Korollar 1.2.18 darstellt, und das Axiom ($\mathcal{G}6$). Dabei beginnen wir mit der Verbesserung von Lemma 1.2.20.

Lemma 1.2.27.
Sei $\mathfrak{m} \in \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ und das Potenzial G erfülle zusätzlich ($\mathcal{G}4$) und ($\mathcal{G}5$). Außerdem seien die zugehörigen Minimierer w_L aus Definition 1.1.2, die Voraussetzungen 1.2.13 und 1.2.19 sowie M_L, m_L aus Lemma 1.2.8 gegeben. Dann existiert ein $\widehat{L}_6 > 0$, sodass die Abschätzungen

(i) $|M_L - t_L| \lesssim \exp\left(-\frac{\sqrt{G''(1)}}{2}(1+\mathfrak{m})L\right)$ *und*

(ii) $|m_L - s_L| \lesssim \exp\left(-\frac{\sqrt{G''(1)}}{2}(1-\mathfrak{m})L\right)$

für alle $L \geq \widehat{L}_6$ gelten.

Beweis
(i) Zunächst gehen wir ganz genau wie im Beweis von Lemma (1.2.20) (i) bis einschließlich der Identität (1.120) vor, d.h. es existiert ein $L_4 > 0$ mit

$$|t_L - M_L| = t_L - M_L = \exp(K)(2 + o(1))e^{-\Delta_L\sqrt{G''(M_L)}} \tag{1.158}$$

für alle $L \geq L_4$, wobei

$$\Delta_L \underset{(1.107)}{=} L - x_L \underset{(1.150)}{=} \frac{1}{2}(1+\mathfrak{m})L + o(1)$$

gilt, d.h. es existiert ein Restterm $R(L)$ mit

$$\Delta_L = \frac{1}{2}(1+\mathfrak{m})L + R(L) \tag{1.159}$$

mit $R(L) = o(1)$.

Zudem folgt aus ($\mathcal{G}4$) und der Ungleichung $G'' > \frac{G''(1)}{2} > 0$ in $(1-\sigma, 1+\sigma)$ aufgrund der Voraussetzungen 1.2.19, dass $\sqrt{G''} \in C^{0,1}([1-\sigma, 1+\sigma])$ gilt, das

$$\left|\sqrt{G''(M_L)} - \sqrt{G''(1)}\right| \underset{(1.104)}{\lesssim} |M_L - 1|$$

für alle $L \geq L_4$ impliziert. Sei nun $\epsilon \in \left(0, \frac{\sqrt{G''(1)}}{2}(1-|\mathfrak{m}|)\right)$, sodass das Korollar (1.2.22) (ii) die Existenz eines hinreichend großen $L_5 = L_5(\epsilon) > L_4$ mit

$$\left|\sqrt{G''(M_L)} - \sqrt{G''(1)}\right| \lesssim |M_L - 1| \lesssim e^{-\left(\frac{\sqrt{G''(1)}}{2}(1-|\mathfrak{m}|)-\epsilon\right)L}$$

für alle $L \geq L_5$ liefert, wobei $\frac{\sqrt{G''(1)}}{2}(1-|\mathfrak{m}|) - \epsilon > 0$ nach Annahme bzgl. ϵ gilt. Insbesondere folgt daraus

$$L\left|\sqrt{G''(M_L)} - \sqrt{G''(1)}\right| = o(1). \tag{1.160}$$

Schließlich ergibt sich

$$\begin{aligned}
|t_L - M_L| &\underset{(1.158),(1.159)}{\lesssim} e^{-\left(\frac{1}{2}(1+\mathfrak{m})L+R(L)\right)\left(\sqrt{G''(1)}+\left(\sqrt{G''(M_L)}-\sqrt{G''(1)}\right)\right)} \\
&= e^{-\left(\frac{1}{2}(1+\mathfrak{m})L\left(\sqrt{G''(M_L)}-\sqrt{G''(1)}\right)+R(L)\sqrt{G''(M_L)}\right)} e^{-\frac{\sqrt{G''(1)}}{2}(1+\mathfrak{m})L} \\
&\underset{(1.159),(1.160)}{\lesssim} e^{-\frac{\sqrt{G''(1)}}{2}(1+\mathfrak{m})L}
\end{aligned}$$

für alle $L \geq L_5$.

(ii) Dazu gehe man zunächst wie im Beweis von Lemma (1.2.20) (ii) und anschließend unter Benutzung von Korollar (1.2.25) wie in (i) vor, infolgedessen man ein $L_6 > 0$ erhält, sodass die Abschätzung in (ii) für alle $L \geq L_6$ gilt.

Dann wählen wir $\widehat{L}_6 := \max\{L_5, L_6\}$. □

Daraus folgt völlig analog zu Korollar (1.2.22) das

Korollar 1.2.28.
Sei $\mathfrak{m} \in \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ *und das Potenzial G erfülle zusätzlich* $(\mathcal{G}4)$ *und* $(\mathcal{G}5)$*. Außerdem seien die zugehörigen Minimierer* w_L *aus Definition 1.1.2, die Voraussetzungen 1.2.13 und 1.2.19 sowie die zugehörigen Konstanten* λ_L *aus Lemma 1.1.3 (ii) und* M_L, m_L *aus Lemma 1.2.8 gegeben. Dann existiert ein* $\widehat{L}_7 > 0$*, sodass die Abschätzungen*

(i) $|\lambda_L| \lesssim \exp\left(-\sqrt{G''(1)}(1-|\mathfrak{m}|)L\right)$,

(ii) $|1 - M_L| \lesssim \exp\left(-\frac{\sqrt{G''(1)}}{2}(1-|\mathfrak{m}|)L\right)$ *und*

(iii) $|1 + m_L| \lesssim \exp\left(-\frac{\sqrt{G''(1)}}{2}(1-|\mathfrak{m}|)L\right)$

für alle $L \geq \widehat{L}_7$ *gelten.*

Um schließlich auch die Abschätzung in Satz 1.2.23 zu verschärfen, benötigen wir insbesondere ein Hilfslemma analog zu Lemma 1.2.24, das ähnliche Abschätzungen beinhaltet, aber ohne den Parameter ϵ. Dafür müssen wir jedoch zusätzlich zu den ohnehin schon stärkeren Voraussetzungen, wie z.B. in Korollar 1.2.25, erstmals fordern, dass das Potenzial G dem Axiom $(\mathcal{G}6)$ genügt.

Lemma 1.2.29.
Sei $\mathfrak{m} \in \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ *und das Potenzial G erfülle zusätzlich* $(\mathcal{G}4)$, $(\mathcal{G}5)$ *und* $(\mathcal{G}6)$*. Außerdem seien die zugehörigen Minimierer* w_L *aus Definition 1.1.2, die Voraussetzungen 1.2.13 und der kink* v *aus Lemma 1.2.1 gegeben. Dann existiert ein* $\widehat{L}_8 > 0$*, sodass*

(i) $|1 - v(x_L)| \lesssim \exp\left(-\frac{\sqrt{G''(1)}}{2}(1-\mathfrak{m})L\right)$ *und*

(ii) $|1 - v(L - x_L)| \lesssim \exp\left(-\frac{\sqrt{G''(1)}}{2}(1+\mathfrak{m})L\right)$

für alle $L \geq \widehat{L}_8$ *gelten.*

Beweis
Sei $L_0 := \widehat{L}_2$ ($\widehat{L}_2$ aus den Voraussetzungen 1.2.13).

(i) Nun gehen wir analog zum Beweis von Lemma 1.2.24 (i) vor, wobei wir zu Beginn statt (1.145) die Ungleichung

$$H(t) \underset{(\mathcal{G}6)}{\geq} H(1) = \frac{1}{8}G''(1)$$

für alle $t \in (t_0, 1)$ mit $t_0 := 1 - \alpha$ verwenden. Dann erhalten wir insbesondere die Abschätzung (1.146) in $[\tilde{x}_0, \infty)$ für ein hinreichend großes $\tilde{x}_0 > 0$, jedoch mit der Konstante $C_0 := \frac{\sqrt{G''(1)}}{2} > 0$ statt C_ϵ.

Zudem benutzen wir später statt (1.147) die Darstellung (1.150), d.h. es gilt $x_L = \frac{1}{2}(1-\mathfrak{m})L + R(L)$ mit einem Restterm $R(L) = o(1)$.

Schließlich folgt die Existenz eines hinreichend großen $L_1 > 0$, sodass die Abschätzung

$$|1 - v(x_L)| \lesssim e^{-2C_0 x_L} = e^{-\sqrt{G''(1)}x_L} = e^{-\sqrt{G''(1)}\left(\frac{1}{2}(1-\mathfrak{m})L+R(L)\right)}$$
$$= e^{-\sqrt{G''(1)}R(L)} e^{-\frac{\sqrt{G''(1)}}{2}(1-\mathfrak{m})L} \lesssim e^{-\frac{\sqrt{G''(1)}}{2}(1-\mathfrak{m})L}$$

für alle $L \geq L_1$ gilt.

(ii) Wegen $L - x_L = \frac{1}{2}(1+\mathfrak{m})L + o(1)$ nach (1.150) ergibt sich mit einer ähnlichen Argumentation wie in (i) die Existenz eines $L_2 > 0$ mit

$$|1 - v(L - x_L)| \lesssim e^{-\frac{\sqrt{G''(1)}}{2}(1+\mathfrak{m})L}$$

für alle $L \geq L_2$.

Schließlich wählen wir $\widehat{L}_8 := \max\{L_1, L_2\}$. □

Unter Zuhilfenahme der letzten beiden Resultate (statt Korollar 1.2.22 und Lemma 1.2.24) kann folgendes Analogon zu Satz (1.2.23) bewiesen werden. Dabei ist zu beachten, dass man die Darstellung (1.150) aus Korollar 1.2.25 wie im Beweis von Lemma 1.2.27 oder Lemma 1.2.29 in den Beweis einbringt.

Satz 1.2.30.
Sei $\mathfrak{m} \in \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ und das Potenzial G erfülle zusätzlich $(\mathcal{G}4)$, $(\mathcal{G}5)$ und $(\mathcal{G}6)$. Außerdem seien der zugehörige Minimierer w_L aus Definition 1.1.2, die Voraussetzungen 1.2.13 und 1.2.19 sowie die Funktion v_{L,x_L} unter Verwendung der Definition 1.2.4 mit $z = x_L$ für $L \geq \widehat{L}_2$ gegeben. Dann existiert ein $\widehat{L}_9 > 0$, sodass die Abschätzung

$$\|w_L - v_{L,x_L}\|_{C^1([-L,L])} \lesssim \exp\left(-\frac{\sqrt{G''(1)}}{4}(1-3|\mathfrak{m}|)L\right) \tag{1.161}$$

für alle $L \geq \widehat{L}_9$ gilt, wobei wir $(v_{L,x_L})_x(0) := 0$ für alle $L \geq \widehat{L}_2$ definieren.

Unmittelbar daraus ergibt sich das anschließende Korollar, das auf ähnliche Weise wie das Korollar 1.2.25 gezeigt wird.

Korollar 1.2.31.
Sei $\mathfrak{m} \in \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ und das Potenzial G erfülle zusätzlich $(\mathcal{G}4)$, $(\mathcal{G}5)$ und $(\mathcal{G}6)$. Außerdem seien der zugehörige Minimierer w_L aus Definition 1.1.2, die Voraussetzungen 1.2.13 und 1.2.19 sowie die zu $\mathfrak{m}$ gehörige Funktion $v_L \in \mathcal{A}_L$ zusammen mit ihren zwei Nullstellen $\pm z_L$ aus Lemma 1.2.6 für alle $L \geq \widehat{L}_2$ gegeben. Dann existiert ein $\widehat{L}_{10} > 0$, sodass die Abschätzung

$$|x_L - z_L| \lesssim L \exp\left(-\frac{\sqrt{G''(1)}}{4}(1-3|\mathfrak{m}|)L\right) \tag{1.162}$$

für alle $L \geq \widehat{L}_{10}$ gilt. Ferner gilt

$$x_L = \frac{1}{2}(1-\mathfrak{m})L + o(1). \tag{1.163}$$

Abschließend erhalten wir auch eine Verschärfung von Satz 1.2.26, die unter Verwendung von Korollar 1.2.31 und Satz 1.2.30 (statt Korollar 1.2.25 und Satz 1.2.26) fast wortwörtlich wie in der vorigen Version bewiesen wird.

Satz 1.2.32.
Sei $\mathfrak{m} \in \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ und das Potenzial G erfülle zusätzlich ($\mathcal{G}4$), ($\mathcal{G}5$) und ($\mathcal{G}6$). Außerdem seien der zugehörige Minimierer w_L aus Definition 1.1.2, die Voraussetzungen 1.2.13 und 1.2.19 sowie die zu $\mathfrak{m}$ gehörige Funktion $v_L \in \mathcal{A}_L$ aus Lemma 1.2.6 für alle $L \geq \widehat{L}_2$ gegeben. Dann existiert ein $\widehat{L}_{11} > 0$, sodass die Abschätzung

$$\|w_L - v_L\|_{C^1([-L,L])} \lesssim L \ \exp\left(-\frac{\sqrt{G''(1)}}{4}(1 - 3|\mathfrak{m}|)L\right) \tag{1.164}$$

für alle $L \geq \widehat{L}_{11}$ gilt, wobei wir $(v_L)_x(0) := 0$ für alle $L \geq \widehat{L}_2$ definieren. Insbesondere gilt

$$\|w_L - v_L\|_{C^1([-L,L])} = o(1).$$

2 Konvergenzraten der Cahn-Hilliard-Evolution

Wie in der Einleitung zu dieser Arbeit erwähnt, interessieren wir uns in diesem Kapitel für das Phänomen der (**dynamischen**) **Metastabilität** von Lösungen der Cahn-Hilliard-Gleichung, wobei dieses Phänomen auch für andere Gradientenflüsse - induziert durch geeignete Energien - zu beobachten ist. Allgemein lässt es sich so beschreiben, dass sich Lösungen in der Zeit beinahe konstant verhalten, aber tatsächlich von einem stabilen Zustand weit entfernt sind. Stattdessen entwickeln sie sich nur für eine sehr lange Zeit äußerst langsam, aber nach langen Zeitintervallen sind dennoch nennenswerte Veränderungen zu beaobachten.

Zwei fundamentale Beispiele können wir aus der skalaren Ginzburg-Landau-Energie E_L aus Definition 1.0.4 für $L > 0$ konstruieren, indem wir die zugehörigen Gradientenflüsse bzgl. zwei verschiedener Normen bestimmen. Zum Einen können wir die $L^2\big((-L,L)\big)$-Norm zugrunde legen und erhalten als zugehörigen Gradientenfluss die Allen-Cahn-Gleichung

$$u_t = u_{xx} - G'(u), \qquad x \in (-L,L),\ t > 0, \tag{2.1}$$

für die die Metastabilität in [1, 2, 4] schon ausführlich und erfolgreich für $L \gg 1$ erforscht wurde, wobei wir hier die Notation 1.1.5 a) verwendet haben. Zum Anderen können wir auch die $\dot{H}^{-1}\big((-L,L)\big)$-Norm verwenden, welche auf einem Skalarprodukt in einem geeigneten Raum basiert. Dieses definieren wir zunächst auf der Grundlage von [3, Definition 4.1 und Lemma 4.3].

Definition 2.0.1.
Sei $L > 0$.

a) Dann seien

$$X^{per}\big((-L,L)\big) := \{u \in H^1\big((-L,L)\big) \mid u(-L) = u(L)\} \tag{2.2}$$

und

$$X_0^{per}\big((-L,L)\big) := \left\{ u \in H^1\big((-L,L)\big) \,\middle|\, u(-L) = u(L),\ \fint_{-L}^{L} u \,\mathrm{d}x = 0 \right\}. \tag{2.3}$$

b) *Seien* $u, \tilde{u} \in X_0^{per}\big((-L,L)\big)$ *und* $U, \tilde{U} \in C^1([-L,L])$ *mit* $U_x = u$ *und* $\tilde{U}_x = \tilde{u}$ *sowie* $\fint_{-L}^{L} U \,\mathrm{d}x = 0$ *und* $\fint_{-L}^{L} \tilde{U} \,\mathrm{d}x = 0$. *Dann sei*

$$\langle u, \tilde{u} \rangle_{\dot{H}^{-1}((-L,L))} := \int_{-L}^{L} U\tilde{U} \,\mathrm{d}x. \tag{2.4}$$

Bemerkung 2.0.2.

a) In Definition 2.0.1 b) liegen die Stammfunktionen in $C^1([-L,L])$ aufgrund der Einbettung (1.5) und des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung.

b) Man kann leicht zeigen, dass $\Big(X_0^{per}\big((-L,L)\big), \langle \cdot, \cdot \rangle_{\dot{H}^{-1}((-L,L))}\Big)$ ein Prä-Hilbertraum ist. Somit ist durch

$$\|u\|_{\dot{H}^{-1}((-L,L))} := \sqrt{\langle u, u \rangle_{\dot{H}^{-1}((-L,L))}} \tag{2.5}$$

für $u \in X_0^{per}\big((-L,L)\big)$ eine Norm auf $X_0^{per}\big((-L,L)\big)$ definiert.

c) In Definition 2.0.1 b) existiert auch eine Darstellung von $\langle u, \tilde{u} \rangle_{\dot{H}^{-1}((-L,L))}$ unter Verwendung der Fourier-Entwicklungen von u und $\tilde{u}$, und zwar wie in [3, Definition 4.1] unter Anpassung des zugrundeliegenden Intervalls. Dies kann völlig analog wie in [3, Lemma 4.3] bewiesen werden.

d) Um nun einige Ausdrücke zu verkürzen, schreiben wir ab jetzt bis zum Ende des Kapitels zu gegebenem $L > 0$ bei jeglichem verwendeten Raum, jeglichem verwendeten Skalarprodukt und jeglicher verwendeter Norm mit Bezug auf das Intervall $(-L, L)$ nicht mehr explizit dieses Intervall dazu. D.h. bei gegebenem $L > 0$ seien z.B.

$$X^{per} := X^{per}\big((-L,L)\big) \qquad \text{und} \qquad \|\cdot\|_{\dot{H}^{-1}} := \|\cdot\|_{\dot{H}^{-1}((-L,L))}.$$

Für die $\dot{H}^{-1}$-Norm können wir direkt folgende zentrale Ungleichung herleiten.

Lemma 2.0.3.
Sei $L > 0$. *Dazu seien* $u \in X_0^{per}$ *und* $\tilde{u} \in X^{per}$. *Dann gilt*

$$\left| \int_{-L}^{L} u\tilde{u} \,\mathrm{d}x \right| \leq \|u\|_{\dot{H}^{-1}} \|\tilde{u}_x\|_{L^2}. \tag{2.6}$$

Beweis
Zu u wählen wir die Stammfunktion $U \in C^1([-L,L])$ mit $\fint_{-L}^{L} U \,\mathrm{d}x = 0$. Da zudem $\fint_{-L}^{L} u \,\mathrm{d}x = 0$ gilt, folgt $U(-L) = U(L)$ und somit $\widehat{U} := U - U(L) \in H_0^1$. Daher können wir $\widehat{U}$ durch Funktionen in $C_c^\infty((-L,L))$ bzgl. der H^1-Norm approximieren,

sodass wir die Identität

$$\int_{-L}^{L} u\tilde{u}\,\mathrm{d}x = \int_{-L}^{L} \widehat{U}_x\tilde{u}\,\mathrm{d}x = \int_{-L}^{L} \widehat{U}\tilde{u}_x\,\mathrm{d}x = \int_{-L}^{L} U\tilde{u}_x\,\mathrm{d}x - U(L)(\tilde{u}(L) - \tilde{u}(-L)) \tag{2.7}$$
$$= \int_{-L}^{L} U\tilde{u}_x\,\mathrm{d}x$$

erhalten, wobei wir in (2.7) für $\tilde{u} \in X^{per} \subseteq C^{0,\frac{1}{2}}([-L,L])$ nach (1.5) die Identität

$$\tilde{u}(L) - \tilde{u}(-L) = \int_{-L}^{L} \tilde{u}_x\,\mathrm{d}x = 0$$

verwendet haben. In Kombination mit der Cauchy-Schwarz-Ungleichung folgt schließlich

$$\left|\int_{-L}^{L} u\tilde{u}\,\mathrm{d}x\right| = \left|\int_{-L}^{L} U\tilde{u}_x\,\mathrm{d}x\right| \leq \|U\|_{L^2}\|\tilde{u}_x\|_{L^2} \underset{(2.4),(2.5)}{=} \|u\|_{\dot{H}^{-1}}\|\tilde{u}_x\|_{L^2},$$

also die Behauptung. □

Unter geeigneten Annahmen bzgl. des Anfangsdatums und der Randbedingungen (vgl. Bemerkung 2.0.5 d)) lässt sich jetzt zeigen, dass der Gradientenfluss zu der Ginzburg-Landau-Energie E_L bzgl. der $\dot{H}^{-1}$-Norm durch die Cahn-Hilliard-Gleichung gegeben ist. Diese definieren wir nachfolgend und setzen obendrein ein periodisches Anfangsdatum und periodische Randbedingungen voraus. Dabei ist zu beachten, dass auch in diesem gesamten Kapitel die Voraussetzungen 1.0.1 bzgl. des Potenzials G gelten.

Voraussetzungen 2.0.4. (Cahn-Hilliard-Gleichung)
Das Potenzial G erfülle zusätzlich $(\mathcal{G}4s)$ und es sei $L > 0$. Dann ist die Cahn-Hilliard-Gleichung *gegeben durch*

$$u_t = -(u_{xx} - G'(u))_{xx} \tag{2.8}$$

für $x \in (-L, L)$ und $t > 0$.

Zudem seien als Anfangsdatum eine Funktion $u_0 \in X^{per}$ und periodische Randbedingungen gegeben, d.h. wir betrachten hier Lösungen $u : [-L,L] \times \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$ von (2.8), die zusätzlich

$$\begin{cases} u(x,0) = u_0(x) & \text{für } x \in [-L,L], \\ u(-L,t) = u(L,t),\ u_x(-L,t) = u_x(L,t), & \\ u_{xx}(-L,t) = u_{xx}(L,t),\ u_{xxx}(-L,t) = u_{xxx}(L,t) & \text{für } t > 0, \end{cases} \tag{2.9}$$

erfüllen.

Bemerkung 2.0.5.
Sei $u : [-L, L] \times \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$ die Lösung der Cahn-Hilliard-Gleichung (2.8) unter den zusätzlichen Bedingungen (2.9).

a) Aus der Regularitätstheorie ist bekannt, dass u hinreichend glatt ist, sodass sämtliche nachfolgende Integrale, in deren Integranden die Lösung u und/oder deren Ableitungen vorkommen, endlich sind und darüber hinaus sämtliche nachfolgende Differentiationen von Ausdrücken, die die Lösung u und/oder deren Ableitungen enthalten, möglich sind.

b) Es gilt $u_t(-L, t) = u_t(L, t)$ für alle $t > 0$, da $u(-L, t) = u(L, t)$ für alle $t > 0$ nach (2.9) gilt. In Kombination mit

$$u_{xxxx} \underset{(2.8)}{=} (G'(u))_{xx} - u_t \tag{2.10}$$

für alle $x \in (-L, L)$ und $t > 0$, den Randbedingungen in (2.9) und den Grenzübergängen $x \to \pm L$ folgt somit

$$u_{xxxx}(-L, t) = u_{xxxx}(L, t) \tag{2.11}$$

für alle $t > 0$. Entsprechendes kann man auch für die höheren Ableitungen von u bzgl. x und/oder t zeigen, sofern sie existieren und G hinreichend glatt ist, indem man erneut die Randbedingungen (2.9) verwendet und beide Seiten der Gleichung (2.10) entsprechend differenziert.

c) In diesem Kapitel fassen wir die Lösung u häufig als eine Funktion $u : \mathbb{R}_{\geq 0} \to H^1,\ u(t) := u(\cdot, t)$ auf, welche wegen a) wohldefiniert ist.

d) Eine allgemeine, formale Definition eines Gradientenflusses bzw. einer Gradientenflussstruktur findet sich in [3, Definition 2.1 bzw. Definition 2.5]. Falls wir nun in den Voraussetzungen 2.0.4 obendrein fordern, dass das Anfangsdatum u_0 die Gleichung $⨍_{-L}^{L} u_0 \,\mathrm{d}x = 0$ erfüllt, wurde in [3, Proposition 4.4] gezeigt, dass die Cahn-Hilliard-Gleichung (2.8) eine Gradientenflussstruktur bzgl. $\left(X_0^{per}, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\dot{H}^{-1}}\right)$ - induziert durch die Energie E_L - besitzt.

Nun gehen wir kurz auf einige elementare Eigenschaften von Lösungen der Cahn-Hilliard-Gleichung mit periodischem Anfangsdatum und periodischen Randbedingungen ein.

Lemma 2.0.6.
Seien $L > 0$ und $u : [-L, L] \times \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$ die Lösung der Cahn-Hilliard-Gleichung (2.8) unter den zusätzlichen Bedingungen (2.9) in den Voraussetzungen 2.0.4. Dann besitzt u folgende Eigenschaften:

(i) Es gilt

$$\fint_{-L}^{L} u(x,t)\,\mathrm{d}x = \fint_{-L}^{L} u(x,0)\,\mathrm{d}x = \fint_{-L}^{L} u_0(x)\,\mathrm{d}x$$

für alle $t > 0$.

(ii) Es gilt

$$\frac{d}{dt} E_L(u(t)) = -\int_{-L}^{L} \Big((-u_{xx} + G'(u))_x(x,t) \Big)^2 \,\mathrm{d}x =: -D(t)$$

für alle $t > 0$. *Dabei wird* $D(t)$ *als* die Dissipation von $u(t)$ *bezeichnet.*

(iii) Es gilt zum Einen $u \in C^1(\mathbb{R}_{\geq 0}, (H^1, \|\cdot\|_{H^1}))$ *(Fréchet-Differenzierbarkeit) und zum Anderen* $u(s) - u(t) \in X_0^{per}$ *und*

$$\|u(s) - u(t)\|_{\dot{H}^{-1}} \leq \int_{s}^{t} \sqrt{D(\tau)}\,\mathrm{d}\tau \tag{2.12}$$

für alle $0 \leq s \leq t$.

Bemerkung 2.0.7.
In der Situation des vorigen Lemmas folgt aus der Identität in (ii) in Kombination mit $D(t) \geq 0$ für alle $t > 0$, dass $\frac{d}{dt} E_L(u(t)) \leq 0$ für alle $t > 0$ ist, sodass $E_L(u(\cdot))$ in $\mathbb{R}_{\geq 0}$ monoton fällt. Insbesondere gilt daher $E_L(u(t)) \leq E_L(u_0)$ für alle $t \geq 0$.

Beweis von Lemma 2.0.6
Unter Beachtung von Bemerkung 2.0.5 a) ergibt sich:

(i) Es gilt

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(\fint_{-L}^{L} u(x,t)\,\mathrm{d}x \right) &= \fint_{-L}^{L} u_t(x,t)\,\mathrm{d}x \underset{(2.8)}{=} \fint_{-L}^{L} -(u_{xx} - G'(u))_{xx}(x,t)\,\mathrm{d}x \\ &= \Big[-(u_{xx} - G'(u))_x(x,t) \Big]_{x=-L}^{x=L} \underset{(2.9)}{=} 0\end{aligned}$$

für alle $t > 0$, das die Behauptung impliziert.

(ii) Mit mehreren partiellen Integrationen erhalten wir

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}E_L(u(t)) &= \frac{d}{dt}\left(\int_{-L}^{L} \frac{1}{2}u_x^2(x,t) + G(u(x,t))\,\mathrm{d}x\right) \\
&= \int_{-L}^{L} u_x(x,t)u_{xt}(x,t) + G'(u(x,t))u_t(x,t)\,\mathrm{d}x \\
&\underset{(2.8)}{=} \int_{-L}^{L} -u_x(x,t)(u_{xx}-G'(u))_{xxx}(x,t) - G'(u(x,t))(u_{xx}-G'(u))_{xx}(x,t)\,\mathrm{d}x \\
&= \underbrace{\Big[-u_x(x,t)(u_{xx}-G'(u))_{xx}(x,t)\Big]_{x=-L}^{x=L}}_{\underset{(2.9),(2.11)}{=}0} + \int_{-L}^{L} u_{xx}(x,t)(u_{xx}-G'(u))_{xx}(x,t) \\
&\quad - G'(u(x,t))(u_{xx}-G'(u))_{xx}(x,t)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{-L}^{L} (u_{xx}-G'(u))(x,t)\ (u_{xx}-G'(u))_{xx}(x,t)\,\mathrm{d}x \\
&= \underbrace{\Big[(u_{xx}-G'(u))(x,t)\ (u_{xx}-G'(u))_x(x,t)\Big]_{x=-L}^{x=L}}_{\underset{(2.9)}{=}0} \\
&\quad - \int_{-L}^{L} \Big((u_{xx}-G'(u))_x(x,t)\Big)^2\,\mathrm{d}x = -D(t)
\end{aligned}
$$

für alle $t > 0$.

(iii) Sei $m := ⨍_{-L}^{L} u_0\,\mathrm{d}x$, so gilt $⨍_{-L}^{L} u(x,t)\,\mathrm{d}x = m$ für alle $t > 0$ nach (i). Ferner seien $\tilde{G} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\tilde{G}(t) := G(t+m)$ und

$$\tilde{E}_L(\widehat{u}) := \int_{-L}^{L} \frac{1}{2}\widehat{u}_x^2 + \tilde{G}(\widehat{u})\,\mathrm{d}x$$

für $\widehat{u} \in H^1$ sowie $\tilde{u}_0 := u_0 - m$ und $\tilde{u} := u - m$. Dann gelten $\tilde{u}_0, \tilde{u}(t) \in X_0^{per}$ und

$$\tilde{u}_t = u_t \underset{(2.8)}{=} -(u_{xx} - G'(u))_{xx} = -(\tilde{u}_{xx} - \tilde{G}'(\tilde{u}))_{xx} \tag{2.13}$$

für $x \in (-L, L)$ und $t > 0$ sowie

$$
\begin{cases}
\tilde{u}(x,0) = \tilde{u}_0(x) & \text{für } x \in [-L,L], \\
\tilde{u}(-L,t) = \tilde{u}(L,t),\ \tilde{u}_x(-L,t) = \tilde{u}_x(L,t), & \\
\tilde{u}_{xx}(-L,t) = \tilde{u}_{xx}(L,t),\ \tilde{u}_{xxx}(-L,t) = \tilde{u}_{xxx}(L,t) & \text{für } t > 0.
\end{cases}
$$

Nun kann man unter Verwendung der allgemeinen Definition von Gradientenflussstrukturen [3, Definition 2.5] völlig analog zu [3, Proposition 4.4] zeigen, dass $\tilde{E}_L \in C^1((H^1, \|\cdot\|_{H^1}), \mathbb{R})$ (Fréchet-Differenzierbarkeit) und $\tilde{u} \in C^1(\mathbb{R}_{\geq 0}, (H^1, \|\cdot\|_{H^1}))$ (Fréchet-Differenzierbarkeit) gelten, wobei wir $\dot{\tilde{u}}(t)$ mit $\tilde{u}_t(\cdot, t) \in X_0^{per}$ für alle $t \geq 0$ identifizieren können, sowie die Gleichung (2.13) eine Gradientenflussstruktur bzgl. $\left(X_0^{per}, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\dot{H}^{-1}}\right)$ - induziert durch die Energie $\tilde{E}_L$ - besitzt. Insbesondere gilt damit auch $u \in C^1(\mathbb{R}_{\geq 0}, (H^1, \|\cdot\|_{H^1}))$. Da zudem

$$\|\phi\|_{\dot{H}^{-1}}^2 \leq \left(\frac{L}{2\pi}\right)^2 \|\phi\|_{H^1}^2$$

für alle $\phi \in X_0^{per}$ nach [3, Remark 4.5] gilt, ergibt sich

$$C^0(\mathbb{R}_{\geq 0}, (X_0^{per}, \|\cdot\|_{H^1})) \subseteq C^0(\mathbb{R}_{\geq 0}, (X_0^{per}, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\dot{H}^{-1}}))$$

und in Kombination mit $\tilde{u} \in C^1(\mathbb{R}_{\geq 0}, (H^1, \|\cdot\|_{H^1}))$, $\tilde{u}(t) = \tilde{u}(\cdot, t) \in X_0^{per}$ und $\dot{\tilde{u}}(t) = \tilde{u}_t(\cdot, t) \in X_0^{per}$ für alle $t \geq 0$ folgt somit

$$\tilde{u} \in C^1(\mathbb{R}_{\geq 0}, (H^1, \|\cdot\|_{H^1})) \subseteq C^0(\mathbb{R}_{\geq 0}, (X_0^{per}, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\dot{H}^{-1}}))$$

und

$$\dot{\tilde{u}} \in C^0(\mathbb{R}_{\geq 0}, (H^1, \|\cdot\|_{H^1})) \subseteq C^0(\mathbb{R}_{\geq 0}, (X_0^{per}, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\dot{H}^{-1}})).$$

Damit sind alle Voraussetzungen von [3, Lemma 2.7] erfüllt, sodass

$$\|\tilde{u}(s) - \tilde{u}(t)\|_{\dot{H}^{-1}} \leq \int_s^t \sqrt{-\frac{d}{d\tau} \tilde{E}_L(\tilde{u}(\tau))} \, \mathrm{d}\tau$$

für alle $0 \leq s \leq t$ gilt. Da per Definition $u(s) - u(t) = \tilde{u}(s) - \tilde{u}(t) \in X_0^{per}$ und $E_L(u(\tau)) = \tilde{E}_L(\tilde{u}(\tau))$ für alle $0 \leq s \leq \tau \leq t$ gelten, erhalten wir schließlich

$$\|u(s) - u(t)\|_{\dot{H}^{-1}} \leq \int_s^t \sqrt{-\frac{d}{d\tau} E_L(u(\tau))} \, \mathrm{d}\tau \underset{(ii)}{=} \int_s^t \sqrt{D(\tau)} \, \mathrm{d}\tau$$

für alle $0 \leq s \leq t$. □

Nun wurden in [6] schon starke Aussagen bzgl. der Metastabilität der Cahn-Hilliard-Gleichung für $L \gg 1$ entwickelt und bewiesen, wobei die Hauptresultate in [6, Theorem 1.5] formuliert sind, welche wir mit Satz 2.2.7 zitieren. Im Wesentlichen wird darin Folgendes ausgesagt: Gegeben sei die Lösung u der Cahn-Hilliard-Gleichung (2.8) unter den zusätzlichen Bedingungen (2.9), wobei das Anfangsdatum $u_0 \in X_0^{per}$ die Energie $E_L(u_0)$ der Ordnung Eins und den $\dot{H}^{-1}$-Abstand zu einem Punkt auf der sogenannten **slow manifold of evolution** mit N klar getrennten Übergängen (bzw. Stufen), kurz **N-layer branch of the slow manifold**, (siehe Definition 2.2.1) besitzt. Dann weist die Lösung u drei Entwicklungsphasen (bzgl. der Zeit) auf:

1) Nach einer Zeit der Ordnung L^2 wurde die Lösung u in eine algebraisch kleine Umgebung des N-layer branchs of the slow manifold gezogen.

2) Nach einer Zeit der Ordnung L^3 befindet sich die Lösung u in einer exponentiell kleinen Umgebung des N-layer branchs of the slow manifold.

3) Anschließend befindet sich die Lösung für einen exponentiell langen Zeitraum exponentiell nahe an dem N-layer branch of the slow manifold.

Als Ergänzung zu diesen Resultaten verfolgen wir in diesem Kapitel das Ziel, mit einer neueren Methode aus [5] unter Benutzung der sogenannten **excess mass** die Metastabilität der Cahn-Hilliard-Gleichung unter ähnlichen, aber vereinfachenden Annahmen für $L \gg 1$ zu untersuchen, wobei wir uns im Wesentlichen nur auf die erste Entwicklungsphase konzentrieren. Das zugehörige Hauptresultat ist der Satz 2.3.1.

2.1 Positive und negative Minimierer der 1-D-Ginzburg-Landau-Energie

Als Basis für die nachfolgenden Überlegungen müssen wir zunächst zwei weitere Minimierungsprobleme für die Ginzburg-Landau-Energie betrachten.

Voraussetzungen 2.1.1.
Sei $l > 0$. Dann ist die Ginzburg-Landau-Energie auf dem Intervall $[0,l]$ definiert durch

$$E_{[0,l]}(u) := \int_0^l \frac{1}{2}u_x^2 + G(u)\,\mathrm{d}x, \tag{2.14}$$

wobei $u \in H^1\big((0,l)\big)$ sei. Dazu seien die Minimierungsprobleme

$$\begin{cases} \inf\limits_{u \in \mathcal{C}_l^+} E_{[0,l]}(u) \qquad \textit{mit} \\ \mathcal{C}_l^+ := \left\{ u \in H^1\big((0,l)\big) \;\middle|\; u > 0 \text{ in } (0,l),\ u(0) = u(l) = 0 \right\} \end{cases} \tag{2.15}$$

sowie

$$\begin{cases} \inf\limits_{u \in \mathcal{C}_l^-} E_{[0,l]}(u) \qquad \textit{mit} \\ \mathcal{C}_l^- := \left\{ u \in H^1\big((0,l)\big) \;\middle|\; u < 0 \text{ in } (0,l),\ u(0) = u(l) = 0 \right\} \end{cases} \tag{2.16}$$

gegeben.

Bemerkung 2.1.2.

a) Die Wohldefiniertheit und Endlichkeit von $E_{[0,l]}(u)$ für eine Funktion $u \in H^1\big((0,l)\big)$ ergibt sich wieder aus (1.5). Zudem gilt $E_{[0,l]}(u) \geq 0$ wegen $(\mathcal{G}2)$.

b) Für jedes $u \in H^1\big((a,b)\big)$ und $c \in \mathbb{R}$ erhalten wir mit der Substitution $y = x + c$ die Identität

$$E_{[0,l]}(u) = \int_0^l \frac{1}{2}u_x^2(x) + G(u(x))\,\mathrm{d}x = \int_c^{l+c} \frac{1}{2}u_y^2(y-c) + G(u(y-c))\,\mathrm{d}y,$$

d.h. sämtliche nachfolgende Ergebnisse bzgl. der Minimierungsprobleme (2.15) und (2.16) übertragen sich auf die Minimierungsprobleme, die analog zu (2.15) und (2.16) unter Verwendung des Intervalls $[c, l+c]$ statt $[0,l]$ definiert sind.

Die wichtigsten Resultate zu den Minimierungsproblemen (2.15) und (2.16) fassen wir in folgendem Lemma zusammen. Dabei gibt es viele Parallelen zu den Ergebnissen aus Kapitel 1.

Lemma 2.1.3.
Seien die Voraussetzungen 2.1.1 gegeben. Dann existiert ein $\widehat{l}_0 > 0$, sodass für alle $l \geq \widehat{l}_0$ ein Minimierer $w_l^+ \in \mathcal{C}_l^+$ von (2.15) und ein Minimierer $w_l^- \in \mathcal{C}_l^-$ von (2.16) existiert. Für $l \geq \widehat{l}_0$ weisen sie folgende Eigenschaften auf:

(i) Es gilt mindestens $w_l^+, w_l^- \in C^{k+1}([0,l])$, falls $G \in C^k([0,l])$ für $k \geq 2$ ist. Falls G das kanonische Potenzial (1.4) ist, gilt sogar $w_l^+, w_l^- \in C^\infty([0,l])$.

(ii) Für $u \in \{w_l^+, w_l^-\}$ gilt die Euler-Lagrange-Gleichung

$$-u_{xx} + G'(u) = 0 \tag{2.17}$$

in $[0,l]$. Ferner existieren Konstanten $\beta_l^+, \beta_l^- \in \mathbb{R}_{>0}$, sodass die Identitäten

$$-\frac{1}{2}(w_l^+)_x^2 + G(w_l^+) = \beta_l^+ \quad \text{und} \quad -\frac{1}{2}(w_l^-)_x^2 + G(w_l^-) = \beta_l^- \tag{2.18}$$

in $[0,l]$ gelten.

(iii) *Es existieren*

$$M_l^+ := \max_{[0,l]} w_l^+ \qquad \textit{und} \qquad m_l^- := \min_{[0,l]} w_l^-.$$

Für diese gelten $M_l^+ < 1$ *sowie* $m_l^- > -1$ *und*

$$M_l^+ = 1 + o(1) \qquad \textit{und} \qquad m_l^- = -1 + o(1) \tag{2.19}$$

jeweils für $l \to \infty$. *Darüber hinaus gelten*

$$\beta_l^+ = o(1) \qquad \textit{und} \qquad \beta_l^- = o(1) \tag{2.20}$$

jeweils für $l \to \infty$. *Dabei haben wir die Notation 1.2.5 verwendet.*

(iv) *Es gilt, dass* $-w_l^+ \in \mathcal{C}_l^-$ *ein Minimierer von (2.16) und* $-w_l^- \in \mathcal{C}_l^+$ *ein Minimierer von (2.15) ist. Außerdem gelten für die minimalen Energien die Identitäten*

$$E_{[0,l]}(w_l^+) = E_{[0,l]}(w_l^-) = \int_{-1}^{1} \sqrt{2G(t)}\,\mathrm{d}t + o(1) \quad \textit{für } l \to \infty. \tag{2.21}$$

(v) *Die Minimierer* w_l^+ *und* w_l^- *sind symmetrisch bzgl. der vertikalen Achse durch* $\frac{l}{2}$, *d.h. für* $u \in \{w_l^+, w_l^-\}$ *gilt*

$$u\left(x + \frac{l}{2}\right) = u\left(-x + \frac{l}{2}\right)$$

für alle $x \in \left[0, \frac{l}{2}\right]$. *Ferner sind* w_l^+ *und* w_l^- *streng monoton in* $\left[0, \frac{l}{2}\right]$ *und* $\left[\frac{l}{2}, l\right]$ *und es gelten*

$$w_l^+\left(\frac{l}{2}\right) = M_l^+ \qquad \textit{und} \qquad w_l^-\left(\frac{l}{2}\right) = m_l^-.$$

Im Beweis arbeiten wir u.A. mit folgenden Funktionen (vgl. Definition 1.2.4).

Definition 2.1.4.
Sei $l > 0$. *Zudem sei der kink* v *aus Lemma 1.2.1 gegeben. Dann definieren wir die Funktionen* $v_l^+, v_l^- : [0,l] \to \mathbb{R}$ *durch*

$$v_l^+(x) := \begin{cases} v(x), & \textit{falls } x \in \left[0, \frac{l}{2}\right), \\ -v(x-l), & \textit{falls } x \in \left[\frac{l}{2}, l\right], \end{cases} \tag{2.22}$$

sowie durch $v_l^-(x) := -v_l^+(x)$.

Beweis von Lemma 2.1.3
Zunächst sei

$$\widehat{l}_0 > \frac{1}{G(0)} \int_{-1}^{1} \sqrt{2G(t)}\,\mathrm{d}t, \tag{2.23}$$

wobei die rechte Seite aufgrund der Stetigkeit von G und $(\mathcal{G}2)$ wohldefiniert ist, und $l \geq \widehat{l}_0$. Um nun die Existenz von Minimierern zu zeigen, gehen wir ähnlich wie im Beweis von Satz 1.1.1 vor. Dabei beschränken wir uns auf das Minimierungsproblem (2.15), da der Existenzbeweis für das Minimierungsproblem (2.16) analog verläuft.

Zu Beginn beobachten wir, dass $\mathcal{C}_l^+$ nicht-leer ist, da $v_l^+ \in \mathcal{C}_l^+$ für die Funktion v_l^+ aus Definition 2.1.4 aufgrund der Eigenschaften des kinks in Lemma 1.2.1 gilt. In Kombination mit der Tatsache, dass $E_{[0,l]}(\widehat{u}) \in [0,\infty)$ für alle $\widehat{u} \in H^1\big((0,l)\big)$ wegen (1.5) und $(\mathcal{G}2)$ gilt, ergibt sich somit $\inf\limits_{\mathcal{C}_l^+} E_{[0,l]} \in [0,\infty)$.

Sei nun $(u_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{C}_l^+ \subseteq H_0^1\big((0,l)\big)$ eine Minimierungsfolge von $E_{[0,l]}$, d.h. es gelte

$$E_{[0,l]}(u_k) \xrightarrow[k\to\infty]{} \inf_{\mathcal{C}_l^+} E_{[0,l]}.$$

Dann ergibt sich analog zum Beweis von Satz 1.1.1 unter Verwendung einer anderen Poincaré-Ungleichung, und zwar

$$\|\widehat{u}\|_{L^2((0,l))} \leq \widehat{C}_P \|\widehat{u}_x\|_{L^2((0,l))}$$

für alle $\widehat{u} \in H_0^1\big((0,l)\big)$ mit der zugehörigen Poincaré-Konstante $\widehat{C}_P > 0$, dass wir eine Teilfolge $\big(u_{k_i}\big)_{i\in\mathbb{N}}$ von $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ und ein $u \in H^1\big((0,l)\big) \subseteq C^{0,\frac{1}{2}}([0,l])$ (siehe (1.5)) finden, sodass insbesondere

$$u_{k_i} \xrightarrow[i\to\infty]{} u \quad \text{in } C([0,l]) \qquad \text{und} \qquad u(0) = u(l) = 0 \tag{2.24}$$

sowie

$$E_{[0,l]}(u) \leq \liminf_{i\to\infty} E_{[0,l]}\big(u_{k_i}\big) \tag{2.25}$$

gelten. Dies impliziert

$$E_{[0,l]}(u) \leq \liminf_{i\to\infty} E_{[0,l]}\big(u_{k_i}\big) = \lim_{i\to\infty} E_{[0,l]}\big(u_{k_i}\big) = \lim_{k\to\infty} E_{[0,l]}(u_k) = \inf_{\mathcal{C}_l^+} E_{[0,l]}. \tag{2.26}$$

Jedoch können wir jetzt nicht ohne Weiteres wie in (1.14) folgern, dass u ein Minimierer von (2.15) ist; denn dafür müsste $u \in \mathcal{C}_l^+$ gelten. Dazu müsste noch bewiesen werden, dass $u > 0$ in $(0,l)$ gälte. Dabei folgt zwar aus $u_{k_i} > 0$ in $(0,l)$ für alle $i \in \mathbb{N}$ und (2.24), dass $u \geq 0$ in $(0,l)$ gilt, aber man kann nicht ausschließen, dass u in $(0,l)$ Nullstellen besitzt. Daher nehmen wir jetzt an, dass u eine Nullstelle in $(0,l)$ habe, und unterscheiden nachfolgend zwei Fälle:

<u>1.Fall:</u> *Es existiert ein $y \in (0,l)$ mit $u(y) > 0$.*
Dabei nehmen wir ohne Einschränkung der Allgemeinheit $u(y) < 1$ an. Nun existieren die Punkte

$$\widehat{x}_1 := \inf\{x \in [0,l] \mid u(x) > 0\} \qquad \text{und} \qquad \widehat{x}_2 := \sup\{x \in [0,l] \mid u(x) > 0\}.$$

Per Annahme ist $u(y) > 0$ und daher $0 \leq \widehat{x}_1 < y < \widehat{x}_2 \leq l$. Nun müssten wir Fälle danach unterscheiden, ob $\widehat{x}_1 > 0$ oder $\widehat{x}_1 = 0$ bzw. $\widehat{x}_2 < l$ oder $\widehat{x}_2 = l$ gilt. Ohne

Einschränkung der Allgemeinheit nehmen wir dabei z.B. $\widehat{x}_1 > 0$ und $\widehat{x}_2 = l$ an. Nun definieren wir $f : [0,l] \to \mathbb{R}$, $f(x) := \frac{u(y)}{y}x$. Da $f(y) = u(y)$ gilt, existiert dann

$$x_1 := \min\{x \in [0,l] \mid u(x) = f(x)\} \in (\widehat{x}_1, y]$$

und es gilt $u(x_1) = f(x_1) \in (f(\widehat{x}_1), f(y)] = (f(\widehat{x}_1), u(y)] \subset (0,1)$ sowie

$$u(x) \begin{cases} < f(x), & \text{falls } x \in [0, x_1), \\ = f(x), & \text{falls } x = x_1. \end{cases} \tag{2.27}$$

Dabei sei $I_0 := [0, x_1)$. Ferner existiert wegen $\widehat{x}_2 = l$, $u(l) = 0$ und der Stetigkeit von u eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_{\geq 2}} \subseteq (y,l)$ mit $x_n < x_{n+1}$ und $u(x_n) \in (0,1)$ für alle $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ sowie $x_n \to l$ für $n \to \infty$. Dazu definieren wir

$$c_n := \min\{u(x_n), u(x_{n+1})\} \qquad \text{und} \qquad I_n := [x_n, x_{n+1})$$

für $n \in \mathbb{N}$. Mit diesen Bezeichnungen konstruieren wir eine Funktion $\tilde{u} : [0,l] \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$\tilde{u}(x) := \begin{cases} f(x), & \text{falls } x \in I_0, \\ \max\{u(x), c_n\}, & \text{falls } x \in I_n,\ n \in \mathbb{N}, \\ 0, & \text{falls } x = l, \end{cases}$$

für die per Konstruktion $\tilde{u} \in \mathcal{C}_l^+$ gilt. Des Weiteren ist $E_{[0,l]}(\tilde{u}) \leq E_{[0,l]}(u)$; denn zum Einen ist

$$\int_{I_0} \frac{1}{2}\tilde{u}_x^2 \,\mathrm{d}x = \int_{I_0} \frac{1}{2} f_x^2 \,\mathrm{d}x \leq \int_{I_0} \frac{1}{2} u_x^2 \,\mathrm{d}x, \tag{2.28}$$

da f der eindeutige Minimierer des Minimierungsproblems

$$\begin{cases} \inf\limits_{\widehat{u}\in\mathcal{M}} \int_{I_0} \frac{1}{2}\widehat{u}_x^2 \,\mathrm{d}x & \text{mit} \\ \mathcal{M} := \left\{\widehat{u} \in H^1(I_0) \mid \widehat{u}(0) = 0,\ \widehat{u}(x_1) = u(x_1)\ (= f(x_1))\right\} \end{cases}$$

ist, und

$$\int_{I_0} G(\tilde{u}) \,\mathrm{d}x = \int_{I_0} G(f) \,\mathrm{d}x \leq \int_{I_0} G(u) \,\mathrm{d}x,$$

das aus $0 \leq u \leq f < 1$ in I_0 (siehe (2.27)) und $(\mathcal{G}3)$ folgt, sodass sich insgesamt $E_{I_0}(\tilde{u}) \leq E_{I_0}(u)$ ergibt. Zum Anderen gelten für alle $n \in \mathbb{N}$ die Abschätzungen

$$\int_{I_n} \frac{1}{2}\tilde{u}_x^2 \,\mathrm{d}x = \int_{I_n \cap \{u \geq c_n\}} \frac{1}{2} u_x^2 \,\mathrm{d}x \leq \int_{I_n} \frac{1}{2} u_x^2 \,\mathrm{d}x,$$

da aufgrund der Definition von $\tilde{u}$ die Identitäten $\tilde{u}_x = 0$ fast überall in $I_n \cap \{u < c_n\}$ und $\tilde{u}_x = u_x$ fast überall in $I_n \cap \{u \geq c_n\}$ gelten, und

$$\int_{I_n} G(\tilde{u}) \,\mathrm{d}x = \int_{I_n \cap \{u < c_n\}} G(c_n) \,\mathrm{d}x + \int_{I_n \cap \{u \geq c_n\}} G(u) \,\mathrm{d}x \leq \int_{I_n} G(u) \,\mathrm{d}x$$

wegen $0 \le u < c_n < 1$ in $I_n \cap \{u < c_n\}$ und ($\mathcal{G}3$), sodass insgesamt $E_{I_n}(\tilde{u}) \le E_{I_n}(u)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ folgt. Mit dem Satz von der majorisierten Konvergenz erhalten wir damit $E_{[0,l]}(\tilde{u}) \le E_{[0,l]}(u)$.

Wegen $\tilde{u} \in \mathcal{C}_l^+$ ergibt sich schließlich

$$\inf_{\mathcal{C}_l^+} E_{[0,l]} \le E_{[0,l]}(\tilde{u}) \le E_{[0,l]}(u) \underset{(2.26)}{\le} \inf_{\mathcal{C}_l^+} E_{[0,l]},$$

d.h. $w_l^+ := \tilde{u}$ ist ein Minimierer von (2.15).

<u>2.Fall:</u> $u \equiv 0$
Dann gilt zum Einen

$$E_{[0,l]}(u) = G(0)l \ge G(0)\widehat{l}_0 \underset{(2.23)}{>} \int_{-1}^{1} \sqrt{2G(t)}\,\mathrm{d}t. \tag{2.29}$$

Zum Anderen erfüllt die Funktion v_l^+ aus Definition 2.1.4 die Differentialgleichungen

$$(v_l^+)_x = \begin{cases} \sqrt{2G(v_l^+)}, & \text{falls } x \in \left[0, \frac{l}{2}\right), \\ -\sqrt{2G(v_l^+)}, & \text{falls } x \in \left[\frac{l}{2}, l\right], \end{cases}$$

sodass sich analog zur Modica-Mortola-Rechnung in (1.21) und (1.22) die Identität

$$\begin{aligned} E_{[0,l]}(v_l^+) &= \int_0^{\frac{l}{2}} \frac{1}{2}(v_l^+)_x^2 + \frac{1}{2}(2G(v_l^+))\,\mathrm{d}x + \int_{\frac{l}{2}}^{l} \frac{1}{2}(v_l^+)_x^2 + \frac{1}{2}(2G(v_l^+))\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^{\frac{l}{2}} (v_l^+)_x\sqrt{2G(v_l^+)}\,\mathrm{d}x + \int_{\frac{l}{2}}^{l} -(v_l^+)_x\sqrt{2G(v_l^+)}\,\mathrm{d}x \\ &= \int_{v_l^+(0)}^{v_l^+\left(\frac{l}{2}\right)} \sqrt{2G(t)}\,\mathrm{d}t + \int_{v_l^+\left(\frac{l}{2}\right)}^{v_l^+(l)} -\sqrt{2G(t)}\,\mathrm{d}t \\ &= 2\int_0^{v\left(\frac{l}{2}\right)} \sqrt{2G(t)}\,\mathrm{d}t = \int_{-v\left(\frac{l}{2}\right)}^{v\left(\frac{l}{2}\right)} \sqrt{2G(t)}\,\mathrm{d}t, \end{aligned} \tag{2.30}$$

ergibt, wobei wir für die letzte Gleichheit verwendet haben, dass G gerade ist. Da $v\left(\frac{l}{2}\right) \in (0,1)$ nach Lemma 1.2.1 (ii) gilt, folgt

$$E_{[0,l]}(v_l^+) \underset{(2.30)}{=} \int_{-v\left(\frac{l}{2}\right)}^{v\left(\frac{l}{2}\right)} \sqrt{2G(t)}\,\mathrm{d}t \underset{(\mathcal{G}2)}{<} \int_{-1}^{1} \sqrt{2G(t)}\,\mathrm{d}t \underset{(2.29)}{<} E_{[0,l]}(u)$$

und, da $v_l^+ \in \mathcal{C}_l^+$ ist, somit

$$\inf_{\mathcal{C}_l^+} E_{[0,l]} \leq E_{[0,l]}(v_l^+) < E_{[0,l]}(u) \underset{(2.26)}{\leq} \inf_{\mathcal{C}_l^+} E_{[0,l]},$$

das ein Widerspruch ist, d.h. dieser Fall kann nicht eintreten.

Jetzt widmen wir uns dem Beweis von (i) bis (v):

(i), (ii) Wir beschränken uns darauf, die Aussagen für w_l^+ zu zeigen, da der Nachweis der entsprechenden Aussagen für w_l^- analog verläuft. Dazu gehen wir im Wesentlichen wie im Beweis von Lemma 1.1.3 (i), (ii) vor: Sei ein beliebiges $\phi \in H^1\big((0,l)\big)$ mit $\mathrm{supp}(\phi) \Subset (0,l)$ und $\phi(0) = \phi(l) = 0$ gegeben. Dann definieren wir die Funktion

$$\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \psi(s) := E_{[0,l]}(w_l^+ + s\phi).$$

Diese ist wohldefiniert, da $w_l^+ + s\phi \in H^1\big((0,l)\big)$ für alle $s \in \mathbb{R}$ gilt. Da zudem $w_l^+, \phi \in C([0,l])$ aufgrund von (1.5) sowie $w_l^+ > 0$ in $(0,l)$ und $\mathrm{supp}(\phi) \Subset (0,l)$ gelten, gibt es ein $\delta > 0$ mit $w_l^+ + s\phi \in \mathcal{C}_l^+$ für alle $s \in (-\delta,\delta)$. Dann ergibt sich

$$\psi(s) = E_{[0,l]}(w_l^+ + s\phi) \geq E_{[0,l]}(w_l^+) = \psi(0)$$

für alle $s \in (-\delta,\delta)$ aufgrund der Minimierungseigenschaft von w_l^+ und mit dem Satz von der majorisierten Konvergenz folgern wir, dass ψ in $s = 0$ differenzierbar ist, sodass wir

$$0 = \frac{d}{ds}\psi(s)\Big|_{s=0} \overset{\text{analog zu}}{\underset{(1.17)}{=}} \int_0^l (w_l^+)_x \phi_x + G'(w_l^+)\phi \,\mathrm{d}x \tag{2.31}$$

erhalten.

Nun zeigen wir, dass daraus $(w_l^+)_x \in C^1([0,l])$ und somit $w_l^+ \in C^2([0,l])$ folgt: Nach Lemma A.0.2 sind fast alle Punkte in $(0,l)$ Lebesgue-Punkte von $(w_l^+)_x$, also sei $z \in (0,l)$ ein beliebiger, aber fester Lebesgue-Punkt von $(w_l^+)_x$. Zudem sei $y \in (0,l)$ ein weiterer Lebesgue-Punkt von $(w_l^+)_x$, wobei ohne Einschränkung der Allgemeinheit $y < z$ gelte. Jetzt sei $\epsilon_0 > 0$ so klein, dass die Funktion $\phi_\epsilon : [0,l] \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$\phi_\epsilon(x) := \begin{cases} 0, & \text{falls } x \in [0, y-\epsilon), \\ \frac{1}{2\epsilon}(x - y + \epsilon), & \text{falls } x \in [y-\epsilon, y+\epsilon), \\ 1, & \text{falls } x \in [y+\epsilon, z-\epsilon), \\ \frac{1}{2\epsilon}(z + \epsilon - x), & \text{falls } x \in [z-\epsilon, z+\epsilon), \\ 0, & \text{falls } x \in [z+\epsilon, l], \end{cases}$$

wohldefiniert ist und $\mathrm{supp}(\phi_\epsilon) \Subset (0,l)$ für alle $\epsilon \in (0,\epsilon_0)$ gilt. Dann ist $\phi_\epsilon \in H^1\big((0,l)\big)$ mit $\phi_\epsilon(0) = \phi_\epsilon(l) = 0$ für alle $\epsilon \in (0,\epsilon_0)$, sodass wir $\phi = \phi_\epsilon$ in (2.31) wählen können und, da y und z Lebesgue-Punkte von $(w_l^+)_x$ sind, ergibt sich mit dem Grenzübergang $\epsilon \to 0$ unter Verwendung des Satzes von der majorisierten Konvergenz

$$0 = (w_l^+)_x(y) - (w_l^+)_x(z) + \int_y^z G'(w_l^+)\,\mathrm{d}x$$

bzw.

$$(w_l^+)_x(y) = -\int_y^z G'(w_l^+)\,\mathrm{d}x + (w_l^+)_x(z). \tag{2.32}$$

Dabei gilt diese Identität für fast alle $y \in (0, l)$, da fast alle Punkte in $(0, l)$ Lebesgue-Punkte von $(w_l^+)_x$ sind. Wie im Beweis von Lemma 1.1.3 (i), (ii) folgt nun, dass $(w_l^+)_x \in C^1([0, l])$ und daher $w_l^+ \in C^2([0, l])$ sind. Deshalb gilt die Gleichung (2.32) sogar für alle $y \in [0, l]$ und die Differentiation nach y auf beiden Seiten liefert

$$(w_l^+)_{xx}(y) = G'(w_l^+(y))$$

für alle $y \in [0, l]$, d.h. (2.17) ist für w_l^+ bewiesen.

Darüber hinaus ergeben sich die Regularitätsaussagen in (i), die Existenz von $\beta_l^+ \in \mathbb{R}$ und die zugehörige Identität (2.18) für w_l^+ wie im Beweis von Lemma 1.1.3 (i), (ii). Dabei ist $\beta_l^+ \geq 0$; denn wegen $w_l^+(0) = w_l^+(l) = 0$ und $w_l^+ \in C^1([0, l])$ existiert aufgrund des Mittelwertsatzes ein $x_0 \in [0, l]$ mit $(w_l^+)_x(x_0) = 0$, sodass wir durch Einsetzen von x_0 in (2.18)

$$\beta_l^+ = G(w_l^+(x_0)) \underset{(\mathcal{G}2)}{\geq} 0 \tag{2.33}$$

erhalten. Dass sogar $\beta_l^+ > 0$ gilt, zeigen wir am Ende des Beweises von (v).

(iii) Die Existenzen von M_l^+ und m_l^+ folgen unmittelbar daraus, dass $w_l^+, w_l^+ \in C([0, l])$ sind und $[0, l]$ kompakt ist.

Die weiteren Aussagen zeigen wir wieder nur für w_l^+: Dazu sei $x_{l,+}^{(max)} \in [0, l]$ mit $w_l^+\left(x_{l,+}^{(max)}\right) = M_l^+$. Da $w_l^+ > 0$ in $(0, l)$ und $w_l^+(0) = w_l^+(l) = 0$ gelten, erhalten wir $x_{l,+}^{(max)} \in (0, l)$. Dann ergibt sich erneut analog zur Modica-Mortola-Rechnung in (1.21) und (1.22) die Abschätzung

$$\begin{aligned}
E_{[0,l]}(w_l^+) &= \int_0^{x_{l,+}^{(max)}} \frac{1}{2}(w_l^+)_x^2 + \frac{1}{2}(2G(w_l^+))\,\mathrm{d}x + \int_{x_{l,+}^{(max)}}^{l} \frac{1}{2}(w_l^+)_x^2 + \frac{1}{2}(2G(w_l^+))\,\mathrm{d}x \\
&\geq \int_0^{x_{L,+}^{(max)}} (w_l^+)_x\sqrt{2G(w_l^+)}\,\mathrm{d}x + \int_{x_{l,+}^{(max)}}^{l} -(w_l^+)_x\sqrt{2G(w_l^+)}\,\mathrm{d}x \\
&= 2\int_0^{M_l^+} \sqrt{2G(t)}\,\mathrm{d}t.
\end{aligned} \tag{2.34}$$

Unter Verwendung der Funktion $v_l^+ \in \mathcal{C}_l^+$ aus Definition 2.1.4 und der Minimierungseigenschaft von w_l^+ gilt dann die Ungleichung

$$2\int_0^{M_l^+} \sqrt{2G(t)}\,\mathrm{d}t \underset{(2.34)}{\leq} E_{[0,l]}(w_l^+) \leq E_{[0,l]}(v_l^+) \underset{(2.30)}{\leq} 2\int_0^{v(\frac{l}{2})} \sqrt{2G(t)}\,\mathrm{d}t. \tag{2.35}$$

Wegen $v\left(\frac{l}{2}\right) \in (0,1)$ nach Lemma 1.2.1 (ii) und wegen $M_l^+ > 0$ sowie $(\mathcal{G}2)$ muss

$$M_l^+ \leq v\left(\frac{l}{2}\right) < 1$$

gelten.

Jetzt beweisen wir, dass $M_l^+ \geq 1 + o(1)$ für $l \to \infty$ gilt. Dazu nehmen wir an, dass dies nicht gelte, d.h. es existieren ein $\delta \in (0,1)$ und Folgen $(l_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ mit $l_n \to \infty$ für $n \to \infty$, sodass $1 - M_{l_n}^+ \geq \delta$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Daher ist $(w_{l_n}^+)(x) \in [0, 1-\delta]$ für alle $x \in [0, l_n]$ und $n \in \mathbb{N}$, das in Kombination mit $(\mathcal{G}2)$ und $(\mathcal{G}3)$ die Ungleichung

$$m_{G,n} := \min_{[0,l_n]} G(w_{l_n}^+) \geq G(1-\delta) > 0 \tag{2.36}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ impliziert. Außerdem gibt es aufgrund der oberen Schranke in (2.35), $v\left(\frac{l}{2}\right) \in (0,1)$ nach Lemma 1.2.1 (ii) und aufgrund von $(\mathcal{G}2)$ eine Konstante $C > 0$ mit $E_{[0,l_n]}(w_{l_n}^+) \leq C$ für alle $n \in \mathbb{N}$, sodass wir insgesamt die Abschätzung

$$C \geq E_{[0,l_n]}(w_{l_n}^+) \geq \int_0^{l_n} G(w_{l_n}^+)\,\mathrm{d}x \geq l_n m_{G,n} \underset{(2.36)}{\geq} l_n G(1-\delta)$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ erhalten. Wegen $l_n \to \infty$ für $n \to \infty$ und $G(1-\delta) > 0$ liefert dies jedoch einen Widerspruch. Daher war unsere Annahme falsch, also muss $M_l^+ \geq 1 + o(1)$ für $l \to \infty$ gelten bzw. wegen $M_l^+ < 1$ für alle $l > 0$ muss sogar $M_l^+ = 1 + o(1)$ für $l \to \infty$ gelten, d.h. (2.19) ist für M_l^+ gezeigt.

Schließlich folgt (2.20) für β_l^+ unmittelbar, indem wir $x_{l,+}^{(max)}$ in (2.18) einsetzen und $(w_l^+)_x\left(x_{l,+}^{(max)}\right) = 0$, das wegen $x_{l,+}^{(max)} \in (0,l)$ gilt, sowie (2.19) für M_l^+, die Stetigkeit von G und $(\mathcal{G}2)$ verwenden.

(iv) Zu Beginn beobachten wir, dass für ein $u \in H^1\big((0,l)\big)$ genau dann $u \in \mathcal{C}_l^+$ gilt, wenn $-u \in \mathcal{C}_l^-$ gilt. Dies impliziert insbesondere $-w_l^+ \in \mathcal{C}_l^-$ und $-w_l^- \in \mathcal{C}_l^+$. Da G zudem gerade ist, folgt $E_{[0,l]}(u) = E_{[0,l]}(-u)$ für alle $u \in H^1\big((0,l)\big)$ und daher z.B.

$$E_{[0,l]}(-w_l^+) = E_{[0,l]}(w_l^+) \leq E_{[0,l]}(-u) = E_{[0,l]}(u)$$

für alle $u \in \mathcal{C}_l^-$, d.h. $-w_l^+$ ist ein Minimierer von (2.16) und somit gilt $E_{[0,l]}(w_l^+) = E_{[0,l]}(w_l^-)$. Genauso ist $-w_l^-$ natürlich ein Minimierer von (2.15). Schließlich liefert

(2.35) in Kombination mit (2.19) für M_l^+, $\lim_{x\to\infty} v(x) = 1$ nach Lemma 1.2.1 (ii) und der Stetigkeit von G die Identität

$$E_{[0,l]}(w_l^+) = 2\int_0^1 \sqrt{2G(t)}\,\mathrm{d}t + o(1) = \int_{-1}^1 \sqrt{2G(t)}\,\mathrm{d}t + o(1)$$

für $l \to \infty$, wobei wir für die letzte Gleichheit verwendet haben, dass G gerade ist. Damit haben wir auch (2.21) nachgewiesen.

(v) Der Beweis verläuft analog zum Beweis von Lemma 1.2.17.

Nun steht in (iii) noch der Beweis davon aus, dass $\beta_l^+, \beta_l^- > 0$ sind, wobei wir die Ungleichung hier nur für β_l^+ zeigen. Angenommen, die Ungleichung gelte nicht, d.h. es gelte $\beta_l^+ = 0$, da wir $\beta_l^+ \geq 0$ schon in (2.33) gezeigt haben. Wegen der strengen Monotonie von w_l^+ in $\left[0, \frac{l}{2}\right]$ und $\left[\frac{l}{2}, l\right]$ ergibt sich mit (2.18), dass

$$(w_l^+)_x = \begin{cases} \sqrt{2G(w_l^+)}, & \text{falls } x \in \left[0, \frac{l}{2}\right), \\ -\sqrt{2G(w_l^+)}, & \text{falls } x \in \left[\frac{l}{2}, l\right], \end{cases}$$

gilt. Da zudem $w_l^+(0) = w_l^+(l) = 0$ ist, folgt mit derselben Argumentation wie in Lemma 1.2.1, dass w_l^+ damit eindeutig bestimmt ist. Da die Funktion v_l^+ aus Definition 2.1.4 dieselben Differentialgleichungen und Randwertbedingungen erfüllt, folgt somit $w_l^+ = v_l^+$ in $[0, L]$. Dann liegt w_l^+ aber noch nicht einmal in $C^1([0, l])$, da $w_l^+ = v_l^+$ in $x = \frac{l}{2}$ nicht differenzierbar ist. Dies ist ein Widerspruch zu der Regularitätsaussage in (i). Daher war unsere Annahme falsch, d.h. es muss $\beta_l^+ > 0$ gelten. □

Darüber hinaus können wir dann wie im vorigen Kapitel den Abstand von $w_l^\pm$ aus Lemma 2.1.3 zu $v_l^\pm$ aus Definition 2.1.4 in der C^1-Norm für $l \gg 1$ durch eine bzgl. l exponentiell abfallende obere Schranke abschätzen. Dabei ist die Ausgangssituation aber deutlich einfacher als in Kapitel 1; denn zum Einen sind die Nullstellen von $w_l^\pm$ jeweils genau in 0 und l und zum Anderen ist die rechte Seite von (2.17) identisch Null für $l \gg 1$. Zunächst erhalten wir nun mithilfe des Beweises von [4, Lemma 3.1] das anschließende

Lemma 2.1.5.
Seien die Voraussetzungen 2.1.1 gegeben und das Potenzial G erfülle zusätzlich ($\mathcal{G}4$). Außerdem seien die Minimierer $w_l^\pm$ sowie M_l^+, m_l^- für $l \geq \widehat{l}_0$ aus Lemma 2.1.3 gegeben. Dann existiert ein $\widehat{l}_1 > 0$, sodass die Abschätzungen

(i) $|M_l^+ - 1| \lesssim \exp\left(-\frac{\sqrt{G''(1)}}{2} l\right)$ *und*

(ii) $|m_l^- + 1| \lesssim \exp\left(-\frac{\sqrt{G''(1)}}{2} l\right)$

für alle $l \geq \widehat{l}_1$ gelten, wobei in den Abschätzungen die Notation 1.1.5 b) verwendet wurde.

Beweis
(i) Unter Verwendung von Lemma 2.1.3 ergibt sich aus dem Beweis von [4, Lemma 3.1], und zwar aus dem Teil von (A.4) bis einschließlich der Identität nach (A.8), wobei in dieser Situation v durch w_l^+ und $M_v(l)$ durch M_l^+ ersetzt werden muss, dass

$$\ln(1-M_l^+) = \underbrace{\int_0^1 \frac{\sqrt{G''(1)}}{\sqrt{2G(t)}} - \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t}_{=:\,K\in\mathbb{R}} + \ln(2) - \frac{\sqrt{G''(M_l^+)}l}{2} + o(1) \tag{2.37}$$

für $l \to \infty$ gilt. Dabei ist zu beachten, dass man in dem oben genannten Abschnitt des Beweises von [4, Lemma 3.1] zum Einen indirekt ein zu Lemma 1.2.21 analoges Resultat verwendet (Abgesehen von anderer Notation muss in dieser Situation λ_L durch Null und deshalb auch s_L bzw. t_L durch -1 bzw. 1 ersetzt werden.) und zum Anderen indirekt für die zu (1.117) analoge Konvergenz benötigt, dass G dem Axiom ($\mathcal{G}4$) genügt.

Nach Anwendung der Exponentialfunktion auf beide Seiten der Gleichung (2.37) finden wir anschließend ein $l_0 > \widehat{l}_0$ ($\widehat{l}_0$ aus Lemma 2.1.3) mit

$$|1-M_l^+| = 1-M_l^+ \lesssim e^{-\frac{\sqrt{G''(M_l^+)}}{2}l} \tag{2.38}$$

für alle $l \geq l_0$. Dann folgt mit derselben Argumentation wie bei der Herleitung der Identität (1.160), dass

$$l\left|\sqrt{G''(M_l^+)} - \sqrt{G''(1)}\right| = o(1)$$

gilt, das die Existenz eines hinreichend großen $l_1 > l_0$ mit

$$|1-M_l^+| \underset{(2.38)}{\lesssim} e^{-\frac{\sqrt{G''(M_l^+)}}{2}l} = e^{-\frac{\sqrt{G''(M_l^+)}-\sqrt{G''(1)}}{2}l}e^{-\frac{\sqrt{G''(1)}}{2}l} \lesssim e^{-\frac{\sqrt{G''(1)}}{2}l}$$

für alle $l \geq l_1$ impliziert.

(ii) Wie in (i) ergibt sich die Existenz eines $l_2 > 0$, sodass die zu zeigende Abschätzung für alle $l \geq l_2$ gilt.

Dann wählen wir $\widehat{l}_1 := \max\{l_1, l_2\}$. □

Zudem gilt die folgende Hilfsaussage.

Lemma 2.1.6.
Sei der kink v aus Lemma 1.2.1 gegeben. Dann existiert für jedes $\epsilon > 0$ ein $\widehat{l}_\epsilon > 0$, sodass

$$\left|1 - v\left(\frac{l}{2}\right)\right| \lesssim \exp\left(-\left(\frac{\sqrt{G''(1)}}{2} - \epsilon\right)l\right) \tag{2.39}$$

für alle $l \geq \widehat{l}_\epsilon$ gilt.

Beweis
Man verfahre analog zum Beweis von Lemma 1.2.24 für $\mathfrak{m} = 0$ bis vor (1.147). Wenn man anschließend mit $\frac{l}{2}$ statt x_L arbeite, folgt die Behauptung. □

Unter Zuhilfenahme der letzten beiden Resultate folgt der

Satz 2.1.7.
Seien die Voraussetzungen 2.1.1 gegeben und das Potenzial G erfülle zusätzlich ($\mathcal{G}4$) und ($\mathcal{G}5$). Außerdem seien die Minimierer $w_l^{\pm}$ für $l \geq \widehat{l}_0$ aus Lemma 2.1.3 und die Funktionen $v_l^{\pm}$ aus Definition 2.1.4 gegeben. Dann existiert für jedes $\epsilon > 0$ ein $\widehat{l}_\epsilon > 0$, sodass die Abschätzung

$$\|w_l^{\pm} - v_l^{\pm}\|_{C^1([0,l])} \lesssim \exp\left(-\left(\frac{\sqrt{G''(1)}}{4} - \epsilon\right) l\right) \tag{2.40}$$

für alle $l \geq \widehat{l}_\epsilon$ gilt, wobei wir $(v_l^{\pm})_x(0) := 0$ für alle $l > 0$ definieren.

Beweis
Sei $\epsilon > 0$ und $l \geq l_0 := \widehat{l}_0$ ($\widehat{l}_0$ aus Lemma 2.1.3).

Dann genügt es zunächst wegen Lemma 2.1.3 (iv) und wegen $v_l^- = -v_l^+$ zu zeigen, dass ein $\widehat{l}_\epsilon > l_0$ existiert, sodass die die zu zeigende Abschätzung für $w_l^+ - v_l^+$ für alle $l \geq \widehat{l}_\epsilon$ gilt. Darüber hinaus sind $w_l^{\pm}$ nach Lemma 2.1.3 (v) und v_l^+ aufgrund deren Definition und, da der kink v nach Lemma 1.2.1 (i) ungerade ist, bzgl. der vertikalen Achse durch $\frac{l}{2}$ symmetrisch, infolgedessen nur nachzuweisen ist, dass es ein $\widehat{l}_\epsilon > l_0$ gibt, sodass

$$\|w_l^+ - v_l^+\|_{C^1\left(\left[0,\frac{l}{2}\right]\right)} \lesssim e^{-\left(\frac{\sqrt{G''(1)}}{4} - \epsilon\right) l} \tag{2.41}$$

für alle $l \geq \widehat{l}_\epsilon$ gilt.

Dazu gehe man im Wesentlichen analog zum Beweis der Abschätzung in Satz 1.2.23 auf dem Intervall $[x_L, L]$ für $\mathfrak{m} = 0$ vor. Dabei ist zu beachten, dass man λ_L durch Null ersetze und die Lemmata 2.1.5 und 2.1.6 statt des Korollars 1.2.22 und des Lemmas 1.2.24 verwende. □

2.2 Einführung und bisherige Resultate zur Metastabilität

In diesem Abschnitt beschreiben wir zum Einen zusätzlich zu den Voraussetzungen 2.0.4 weiter die Ausgangssituation in [6] für die Untersuchung der Cahn-Hilliard-Gleichung auf Metastabilität, wobei wir diese leicht verallgemeinern, und zum Anderen zitieren wir das zugehörige Hauptresultat [6, Theorem 1.5] in Satz 2.2.7. Ferner zitieren wir weitere Hilfsaussagen aus [4, 6] für unsere Überlegungen im nächsten Paragraphen.

Zu Beginn führen wir die zu Beginn des Kapitels erwähnte sogenannte **slow manifold of evolution** (dt.: langsame Mannigfaltigkeit der Evolution/Entwicklung) wie in [6, S. 1531] ein. Dabei verweisen wir an dieser Stelle noch einmal auf Bemerkung 2.0.2 d).

Definition 2.2.1. (Slow manifold of evolution)
Seien $L, l > 0$, $N \in 2\mathbb{N}$. Dann sei die Menge

$$\begin{aligned}\mathcal{N}_N(l) := \{ & w \in X^{per} \mid w \text{ besitze } N \text{ einfache Nullstellen } x_1, \ldots, x_N \in (-L, L] \text{ mit} \\ & x_1 < \cdots < x_N, \text{ sodass } l_i := |x_{i+1} - x_i| \geq l \text{ gelte und } w|_{(x_i, x_{i+1})}(\cdot + x_i) \\ & \text{ein Minimierer von } (2.15) \text{ oder } (2.16) \text{ in } (0, x_{i+1} - x_i) \text{ für } i = 1, \ldots, N \\ & \text{sei; } sign(w|_{(x_i, x_{i+1})}) = -sign(w|_{(x_{i+1}, x_{i+2})}) \text{ für } i = 1, \ldots, N-1\}\end{aligned}$$

gegeben, wobei die Funktion w innerhalb der Definition implizit zu einer $2L$-periodischen Funktion in $H^1_{loc}(\mathbb{R})$ fortgesetzt wird und die Definition $x_{N+1} := x_1 + 2L$ verwendet wird. Die Menge $\mathcal{N}_N(l)$ enthält alle sogenannten vorzeichen-wechselnden energie-optimalen Profile mit genau N einfachen Nullstellen.

Bemerkung 2.2.2.

a) Sei $\widehat{l_0} > 0$ die Konstante aus Lemma 2.1.3 sowie $l \geq \widehat{l_0}$ und $L > \frac{Nl}{2}$. Dann folgt mit Lemma 2.1.3, dass $\mathcal{N}_N(l)$ nicht-leer ist.

b) Für eine Funktion $w \in \mathcal{N}_N(l)$ liefert Lemma 2.1.3 (i), dass mindestens $w|_{(x_i, x_{i+1})} \in C^3([x_i, x_{i+1}])$ für $i = 1, \ldots, N$ gilt, aber i.A. gilt nur $w \in C^{0,\frac{1}{2}}([-L, L])$ nach (1.5), da w i.A. nicht in $y \in \{x_1, \ldots, x_N\}$ differenzierbar ist.

c) Für eine Funktion $w \in \mathcal{N}_N(l)$ ergibt sich mit Lemma 2.1.3 (ii), dass

$$-w_{xx} + G'(w) = 0$$

in (x_i, x_{i+1}) für $i = 1, \ldots, N$ gilt, d.h. $u : [-L, L] \times \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$, $u(x, t) := w(x)$ erfüllt die Cahn-Hilliard-Gleichung (2.8) für fast alle $x \in (-L, L)$ und alle $t > 0$.

Anschließend definieren wir die Menge der „metastabilen Funktionen“ der Cahn-Hilliard-Gleichung ähnlich wie in [6, S. 1532].

Definition 2.2.3. (Metastabile Funktionen der Cahn-Hilliard-Gleichung)
Seien $L, l > 0$, $N \in 2\mathbb{N}$, $\mathfrak{m} \in (-1,1)$ und $C_H, C_E > 0$. Dann sei die Menge

$$\mathcal{M}_{N,\mathfrak{m}}(l, C_H, C_E) := \left\{ u \in X^{per} \,\middle|\, \fint_{-L}^{L} u \,\mathrm{d}x = \mathfrak{m};\ E_L(u) \le C_E;\ \textit{es existiert ein} \right.$$
$$\left. \overline{w} \in \mathcal{N}_N(l) \textit{ mit } \fint_{-L}^{L} \overline{w} \,\mathrm{d}x = \mathfrak{m} \textit{ und } \|u - \overline{w}\|^2_{\dot{H}^{-1}} \le C_H \right\}$$

gegeben.

Bemerkung 2.2.4.

a) Sei $u \in \mathcal{M}_{N,\mathfrak{m}}(l, C_H, C_E)$. So müssen wir beachten, dass a priori keine Aussage über die Nullstellen von u getroffen wird. Stattdessen wissen wir zunächst nur, dass das energie-optimale Profil $\overline{w}$ genau N einfache Nullstellen in $(-L, L]$ besitzt, die (im periodischen Sinne) einen Abstand von mindestens l haben.

b) In [6, S. 1532] wird die Menge der metastabilen Funktionen nur für $\mathfrak{m} = 0$ definiert und entsprechend wird in den wichtigsten Ergebnissen in [6] diese Annahme vorausgesetzt. Jedoch kann man die Beweise einiger Resultate selbst unter der Annahme $\mathfrak{m} \in (-1,1)$ überwiegend wortwörtlich übernehmen, da meistens nur wichtig ist, dass für ein $u \in \mathcal{M}_{N,\mathfrak{m}}(l, C_H, C_E)$ die Gleichung $\fint_{-L}^{L} u \,\mathrm{d}x = \mathfrak{m} = \fint_{-L}^{L} \overline{w} \,\mathrm{d}x$ und somit $u - \overline{w} \in X_0^{per}$ gilt.

c) Ohne Beweis sei Folgendes erwähnt: Sei $N \in 2\mathbb{N}$ und $\mathfrak{m} \in (-1,1)$. Dann existieren Konstanten $\widehat{l}_2$, $C_{E,0} > 0$, sodass es für jedes $l \ge \widehat{l}_2$ eine Konstante $\widehat{L}_0 > 0$ gibt, infolgedessen die Menge $\mathcal{M}_{N,\mathfrak{m}}(l, C_H, C_E)$ für jedes $L \ge \widehat{L}_0$, $C_E \ge C_{E,0}$ und $C_H > 0$ nicht-leer ist.

   Eine Beweisidee ist z.B. Folgende: Seien $N \in 2\mathbb{N}$ und $\mathfrak{m} \in (-1,1)$ gegeben. Außerdem seien $\sigma > 0$ und

$$C_{E,0} := N \int_{-1}^{1} \sqrt{2G(t)} \,\mathrm{d}t + \sigma.$$

   Unter Beachtung von Lemma 2.1.3 (iv) zeige man, dass eine Konstante $\widehat{l}_2 > \widehat{l}_0$ ($\widehat{l}_0 > 0$ aus Lemma 2.1.3) existiert, sodass für jedes $l \ge \widehat{l}_2$ eine Konstante $\widehat{L}_0 > 0$ existiert, sodass für alle $L \ge \widehat{L}_0$ ein $\overline{w} \in \mathcal{N}_N(l)$ mit $\fint_{-L}^{L} \overline{w} \,\mathrm{d}x = \mathfrak{m}$ und $E_L(\overline{w}) \le C_{E,0} \le C_E$ existiert. Anschließend wähle man $u := \overline{w}$, sodass $\|u - \overline{w}\|^2_{\dot{H}^{-1}} = 0 < C_H$ und daher insgesamt $u \in \mathcal{M}_{N,\mathfrak{m}}(l, C_H, C_E)$ gilt.

Des Weiteren wurde in [6, Lemma 1.2] für eine beliebige Funktion $u \in \mathcal{M}_{N,0}(l, C_H, C_E)$ unter geeigneten Annahmen an die Konstanten gezeigt, dass die Funktion u mindestens N Nullstellen besitzt und dass in der Nähe von u, und zwar mit einem

Abstand der Ordnung 1 bzgl. der L^2-Norm, ein vorzeichen-wechselndes energie-optimales Profil mit genau diesen Nullstellen existiert. Dieses Resultat wird nachfolgend mit kleinen Anpassungen an unsere Notation zitiert, wobei wir hier statt $\mathfrak{m} = 0$ die allgemeinere Annahme $\mathfrak{m} \in (-1, 1)$ treffen. Den Beweis kann man wortwörtlich übernehmen.

Lemma 2.2.5.
Seien $N \in 2\mathbb{N}$, $\mathfrak{m} \in (-1, 1)$ und $C_H,\ C_E > 0$. Dann existiert ein $\widehat{l_3} > 0$, sodass für jedes $l \geq \widehat{l_3}$ Folgendes gilt. Für jedes $u \in \mathcal{M}_{N,\mathfrak{m}}(l, C_H, C_E)$ bezeichne $\overline{c} := (\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_N)$ das Tupel mit den N Nullstellen des zugehörigen $\overline{w} \in \mathcal{N}_N(l)$ aus Definition 2.2.3 und es sei $\overline{H} := \|u - \overline{w}\|^2_{\dot{H}^{-1}}$. Dann besitzt u mindestens N verschiedene Nullstellen $x_1, \ldots, x_N \in (-L, L]$ mit $x_1 < \cdots < x_N$ und $c := (x_1, \ldots, x_N)$, sodass

$$|c - \overline{c}| \lesssim \overline{H}^{\frac{1}{3}} + \overline{H}^{\frac{1}{5}} \qquad \text{und} \qquad N \lesssim E_L(u) \tag{2.42}$$

gelten. Ferner existiert ein $w \in \mathcal{N}_N\left(\frac{l}{2}\right)$, dessen Nullstellen durch c gegeben sind, sodass die Abschätzung

$$\|u - w\|^2_{L^2} \lesssim \overline{H}^{\frac{1}{3}} + \overline{H}^{\frac{1}{5}} + \overline{H}^{\frac{1}{2}} \left((E_L(u))^{\frac{1}{2}} + 1\right) \tag{2.43}$$

gilt.

In Lemma 2.2.5 sowie für den Rest des Kapitels verwenden wir zum Einen die Notation 1.1.5 und zum Anderen

Notation 2.2.6.
Sei $L > 0$. Für zwei Tupel an Nullstellen, etwa $c := (x_1, \ldots, x_N)$ mit $x_1, \ldots, x_N \in (-L, L]$ und $x_1 < \cdots < x_N$ und $\overline{c} := (\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_N)$ mit $\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_N \in (-L, L]$ und $\overline{x}_1 < \cdots < \overline{x}_N$, seien $x_{N+1} := x_1 + 2L$ und $\overline{x}_{N+1} := \overline{x}_1 + 2L$. Dann interpretieren wir den Abstand zwischen c und $\overline{c}$ als der maximale Abstand zwischen „korrespondierenden Nullstellen", d.h. wir definieren

$$|c - \overline{c}| := \min\left\{ \max_{i=1,\ldots,N} |x_i - \overline{x}_i|, \max_{i=1,\ldots,N} |x_{i+1} - \overline{x}_i|, \max_{i=1,\ldots,N} |x_i - \overline{x}_{i+1}| \right\}.$$

Jetzt können wir das Hauptresultat [6, Theorem 1.5] mit geringfügig geänderter Notation zitieren.

Satz 2.2.7. (Metastabilität der Cahn-Hilliard-Gleichung)
Seien $N \in 2\mathbb{N}$, $C_H, C_E, C_1 > 1$ und C_{ed} die Konstante aus [6, Lemma 2.7]. Es existiert ein $\widehat{L}_0 > 0$, sodass für jedes $L \geq \widehat{L}_0$ und jedes

$$l_0 \geq \frac{2L}{C_1}, \quad \overline{H}_0 \leq C_H, \quad \overline{E}_0 \leq C_E, \tag{2.44}$$

Folgendes gilt. Die Lösung $u : [-L, L] \times \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$ der Cahn-Hilliard-Gleichung (2.8) unter den zusätzlichen Bedingungen (2.9) in den Voraussetzungen 2.0.4 mit Anfangsdatum $u_0 \in \mathcal{M}_{N,0}(l_0, \overline{H}_0, E_0)$ erfüllt das Nachfolgende. Für

$$\delta := (2L)^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\sqrt{G''(1)}l(0)\right) \quad \textit{und für alle} \quad t \in [0, \delta^{-1}] \tag{2.45}$$

gilt $u(t) \in \mathcal{M}_{N,0}(l_0, \overline{H}(t), E_0)$ mit $\overline{H}(t) := \|u(t) - \overline{w}\|^2_{\dot{H}^{-1}} \lesssim 1$, wobei $\overline{w}$ und $\bar{c}$ in Bezug auf das Anfangsdatum u_0 wie in Lemma 2.2.5 seien. Ferner bezeichne $c(t)$ das Tupel mit den N Nullstellen von $u(t)$ wie in Lemma 2.2.5, $l(0)$ bezeichne den minimalen Abstand zwischen den Nullstellen in $c(0)$ (im periodischen Sinne, siehe Definition 2.2.1), $w(t) \in \mathcal{N}_N\left(\frac{l_0}{2}\right)$ sei ein beliebiges zu $u(t)$ gehöriges vorzeichen-wechselndes energie-optimales Profil, also mit genau den Nullstellen in $c(t)$, $\mathcal{E}(t) := E_L(u(t)) - E_L(w(t))$ bezeichne die Energie-Differenz zwischen $u(t)$ und $w(t)$, wobei $\mathcal{E}_0 := \mathcal{E}(0)$ sei, und $D(t)$ sei die Dissipation von $u(t)$ aus Lemma 2.0.6. Dann existieren die folgenden Entwicklungsphasen:

(i) Es existiert ein $s_1 \lesssim (\overline{H}_0 + \mathcal{E}_0 + \mathcal{E}_0^3)L^2$, sodass

$$\|u(t) - w(t)\|^2_{H^1} + \mathcal{E}(t) \lesssim \mathit{min}\left\{\mathcal{E}_0, \frac{\overline{H}_0 + \mathcal{E}_0 + \mathcal{E}_0^3}{t}\right\}, \tag{2.46}$$

$$(c(t) - \bar{c})^2 \lesssim (\overline{H}_0 + \mathcal{E}_0 + \mathcal{E}_0^3)^{\frac{1}{2}} \mathcal{E}^{\frac{1}{2}}(t), \tag{2.47}$$

$$\overline{H}(t) \lesssim \overline{H}_0 + \mathcal{E}_0 + \mathcal{E}_0^3$$

für alle $t \in [0, s_1]$ gilt, sodass $u(s_1)$ insbesondere algebraisch nahe an $\mathcal{N}_N\left(\frac{l_0}{2}\right)$ liegt, d.h.

$$\|u(s_1) - w(s_1)\|^2_{H^1} + \mathcal{E}(s_1) \lesssim L^{-2}. \tag{2.48}$$

(ii) Für $t \in [s_1, \delta^{-1}]$ gilt

$$\|u(t) - w(t)\|^2_{H^1} + \mathcal{E}(t) \lesssim L^{-2} \exp\left(\frac{-2t}{C_{ed}(2L)^2}\right) + \delta,$$

$$|c(t) - c(s_1)| \lesssim L^{-\frac{1}{2}},$$

$$\|u(t) - u(s_1)\|_{\dot{H}^{-1}} \lesssim 1$$

und für $t \in [s_1 + 1, \delta^{-1}]$ besitzt $u(t)$ genau N einfache Nullstellen und die Dissipation $D(t)$ verhält sich wie L^{-2}. Dabei sind die Konstanten in $\lesssim$ bis jetzt abhängig von C_H, C_E und C_1, während sie im Folgenden universell sind.

(iii) Es existiert ein $s_2 \lesssim C(C_H, C_E, C_1)l(0)L^2$, sodass die Lösung in dem exponentiell langen Zeitintervall $[s_2, \delta^{-1}]$ exponentiell nahe an $\mathcal{N}_N\left(\frac{l_0}{2}\right)$ liegt und sich in diesem Zeitintervall langsam entwickelt, d.h. für $s, t \in [s_2, \delta^{-1}]$ gilt

$$\begin{aligned} \|u(t) - w(t)\|_{H^1}^2 + \mathcal{E}(t) &\lesssim L^2\delta^2, \\ |c(t) - c(s)| &\lesssim l(0)^{-\frac{1}{2}}\delta(|t-s| + L^2), \\ \|u(t) - u(s)\|_{\dot{H}^{-1}} &\lesssim \delta(|t-s| + L^2) \end{aligned}$$

und die Dissipation $D(t)$ ist exponentiell klein, und zwar mit der Ordnung $L^2\delta^2$.

Bemerkung 2.2.8.
Mit den verwendeten Methoden in [6] kann man ein ähnliches Resultat auch für $\mathfrak{m} \in (-1, 1)$ statt nur $\mathfrak{m} = 0$ beweisen. Diese Erkenntnis wird im nächsten Abschnitt eine Annahme in unserem Hauptresultat, dem Satz 2.3.1, rechtfertigen.

Für den Beweis von Satz 2.3.1 benötigen wir nun noch einige Hilfsaussagen aus [4, 6]: Zunächst sind die nachfolgenden nicht-linearen Energie- und Dissipationsabschätzungen zentral, die aus [6, Lemma 2.1] stammen, wobei hier als Mittelwert wieder $\mathfrak{m} \in (-1, 1)$ zugelassen wird, da der Beweis für den Fall $\mathfrak{m} = 0$ wortwörtlich übernommen werden kann.

Lemma 2.2.9.
Seien $\mathfrak{m} \in (-1, 1)$ und $C_H,\ C_E > 0$. Dann existiert ein $\widehat{l_4} > 0$, sodass für jedes $l \geq \widehat{l_4}$, $N \in 2\mathbb{N}$, $u \in \mathcal{M}_{N,\mathfrak{m}}(l, C_H, C_E)$ und für jedes zugehörige vorzeichen-wechselnde energieoptimale Profil $w \in \mathcal{N}_N\left(\frac{l}{2}\right)$ wie in Lemma 2.2.5 die Abschätzungen

$$\|u - w\|_{H^1}^2 \lesssim_{C_H, C_E} \mathcal{E}(u) \lesssim_{C_E} \|u - w\|_{H^1}^2, \tag{2.49}$$

$$\|u - w\|_{\dot{H}^1}^2 := \|u_x - w_x\|_{L^2}^2 \lesssim_{C_H, C_E} D(u) \tag{2.50}$$

gelten, wobei $\mathcal{E}(u) := E_L(u) - E_L(w)$ die Energiedifferenz von u und w und $D(u)$ die Dissipation von u wie in Lemma 2.0.6, sofern sie existiert, bezeichnen.

Ferner existiert ein $\gamma > 0$, sodass für den Fall, dass $\mathcal{E}(u) \leq \gamma$ gilt, die Konstanten in den obigen Ungleichungen unabhängig von C_H und C_E sind.

Darüber hinaus benötigen wir, dass in einer ähnlichen Situation wie in Satz 2.2.7 eine kleine Dissipation D und eine kleine Energie-Differenz $\mathcal{E}$ für $l \gg 1$ implizieren, dass u genau N einfache Nullstellen besitzt. Eine solche Aussage liefert das anschließend zitierte [6, Lemma 2.13], das ebenfalls wieder problemlos auf den Fall $\mathfrak{m} \in (-1, 1)$ verallgemeinert werden kann.

Lemma 2.2.10.
Seien $\mathfrak{m} \in (-1,1)$ und $C_H,\ C_E > 0$. Dann existiert ein $\widehat{l_5} > 0$ und ein $\sigma > 0$, sodass für jedes $l \geq \widehat{l_5}$, $N \in 2\mathbb{N}$, $u \in \mathcal{M}_{N,\mathfrak{m}}(l, C_H, C_E)$ und für jedes zugehörige vorzeichen-wechselnde energie-optimale Profil $w \in \mathcal{N}_N\left(\frac{l}{2}\right)$ wie in Lemma 2.2.5 Folgendes gilt. Falls $w \in \mathcal{N}_N(\widehat{l_5})$ sowie für die Energiedifferenz $\mathcal{E}(u) := E_L(u) - E_L(w)$ zwischen u und w und die Dissipation $D(u)$ von u wie in Lemma 2.0.6, sofern sie existiert, die Ungleichung $\mathcal{E}(u) + D(u) \leq \sigma$ gilt, besitzt u genau N einfache Nullstellen.

Um dieses Lemma anwenden zu können, ist es sehr hilfreich zu wissen, dass eine kleine Energie-Differenz bereits für $l \gg 1$ impliziert, dass auch die Dissipation klein wird. Im Wesentlichen entspricht dies [6, Lemma 2.12], das jedoch wiederum für $\mathfrak{m} \in (-1,1)$ erweitert werden kann.

Lemma 2.2.11.
Seien $\mathfrak{m} \in (-1,1)$ und $C_H,\ C_E > 0$. Dann existiert ein $\widehat{l_6} > 0$ und ein $\mu_0 > 0$, sodass für jedes $\mu \in (0, \mu_0]$, $l \geq \widehat{l_6}$, $N \in 2\mathbb{N}$, $u_0 \in \mathcal{M}_{N,\mathfrak{m}}(l, C_H, C_E)$ und für jedes zugehörige vorzeichen-wechselnde energie-optimale Profil $\overline{w} \in \mathcal{N}_N(l)$ wie in Lemma 2.2.5 Folgendes gilt. Sei $u : [-L, L] \times \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$ die Lösung der Cahn-Hilliard-Gleichung (2.8) unter den zusätzlichen Bedingungen (2.9) in den Voraussetzungen 2.0.4 mit Anfangsdatum u_0. Darüber hinaus bezeichne $\overline{\mathcal{E}}(t) := E_L(u(t)) - E_L(\overline{w})$ die Energiedifferenz zwischen $u(t)$ und $\overline{w}$ und $D(t)$ die Dissipation von $u(t)$ wie in Lemma 2.0.6 für $t \geq 0$, sofern sie existiert. Falls $s, \tau \geq 0$ mit $s + 1 \leq \tau$ existieren, sodass $\overline{\mathcal{E}}(t) \leq \mu$ für alle $t \in [s, \tau]$ gilt, gilt

$$\max_{t \in [s+1, \tau]} D(t) \lesssim \mu. \tag{2.51}$$

Bemerkung 2.2.12.
Der Beweis von [6, Lemma 2.12] wurde nur für $\mu = \mu_0$ ($= \gamma$ in der Quelle) geführt. Aber er kann wortwörtlich für $\mu \in (0, \mu_0)$ übernommen werden.

Schließlich kommen wir noch zu einer Art Lipschitz-Eigenschaft von Funktionen in $\mathcal{N}_N(l)$ für $l \gg 1$, die maßgeblich auf dem Beweis von [4, Lemma 3.1] beruht.

Lemma 2.2.13.
Es existiert ein $\widehat{l_7} > 0$, sodass für alle $N \in 2\mathbb{N}$, $l \geq \widehat{l_7}$ sowie $w, \tilde{w} \in \mathcal{N}_N(l)$ mit zugehörigen Nullstellen-Tupeln c und $\tilde{c}$ die Abschätzung

$$|E_L(w) - E_L(\tilde{w})| \lesssim N \exp\left(-\sqrt{G''(1)}\, l\right) |c - \tilde{c}| \tag{2.52}$$

gilt.

Beweis
Zunächst ergibt sich aus dem Beweis von [4, Lemma 3.1], dass es ein $l_1 > \widehat{l_0}$ ($\widehat{l_0} > 0$ aus Lemma 2.1.3) gibt, sodass für alle $l, \tilde{l} \geq l_1$ und für alle Minimierer $\tilde{w}_l$ bzw. $\tilde{w}_{\tilde{l}}$

von (2.15) oder (2.16) in $(0, l)$ bzw. $(0, \tilde{l})$ die Abschätzung

$$\begin{aligned} |E_{[0,l]}(\tilde{w}_l) - E_{[0,\tilde{l}]}(\tilde{w}_{\tilde{l}})| &\lesssim \exp\left(-\sqrt{G''(1)}\,\min\{l, \tilde{l}\}\right) |l - \tilde{l}| \\ &\leq \exp\left(-\sqrt{G''(1)} l_1\right) |l - \tilde{l}| \end{aligned} \tag{2.53}$$

gilt. Dabei stellen wir bei genauer Betrachtung jenes Beweises fest, dass angenommen wird, dass $\tilde{w}_l$ und $\tilde{w}_{\tilde{l}}$ Minimierer des Minimierungsproblems (2.15) auf ggf. verschiedenen Intervallen sind. Um diese Annahme zu erfüllen, genügt es nach Lemma 2.1.3 (iv), $\tilde{w}_l$ bzw. $\tilde{w}_{\tilde{l}}$ ggf. mit -1 zu multiplizieren, während sich die jeweilige Energie nicht verändert.

Nun seien $l \geq l_1$, $N \in 2\mathbb{N}$ und $w, \tilde{w} \in \mathcal{N}_N(l)$ mit zugehörigen Nullstellen-Tupeln $c = (x_1, \ldots, x_N)$ und $\tilde{c} = (\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_N)$ wie in der Notation 2.2.6. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit gelte nun

$$|c - \tilde{c}| = \max_{i=1,\ldots,N} |x_i - \tilde{x}_i|. \tag{2.54}$$

Anschließend setzen wir w und $\tilde{w}$ $2L$-periodisch auf $\mathbb{R}$ fort und definieren

$$\begin{aligned} w_i &:= w|_{(x_i, x_{i+1})}(\cdot + x_i) \quad \text{in } (0, l_{w,i}) \quad \text{mit } l_{w,i} := x_{i+1} - x_i \quad \text{und} \\ \tilde{w}_i &:= \tilde{w}|_{(\tilde{x}_i, \tilde{x}_{i+1})}(\cdot + \tilde{x}_i) \quad \text{in } (0, l_{\tilde{w},i}) \quad \text{mit } l_{\tilde{w},i} := \tilde{x}_{i+1} - \tilde{x}_i \end{aligned}$$

für $i = 1, ..., N$. Da $w, \tilde{w} \in \mathcal{N}_N(l)$ sind, sind $l_{w,i}, l_{\tilde{w},i} \geq l \geq l_1$ und w_i bzw. $\tilde{w}_i$ sind Minimierer von (2.15) oder (2.16) in $(0, l_{w,i})$ bzw. $(0, l_{\tilde{w},i})$ für alle $i = 1, \ldots, N$, sodass wir

$$\begin{aligned} |E_{[0,l_{w,i}]}(w_i) - E_{[0,l_{\tilde{w},i}]}(\tilde{w}_i)| &\underset{(2.53)}{\lesssim} \exp\left(-\sqrt{G''(1)} l_1\right) |l_{w,i} - l_{\tilde{w},i}| \\ &\leq \exp\left(-\sqrt{G''(1)} l_1\right) (|x_i - \tilde{x}_i| + |x_{i+1} - \tilde{x}_{i+1}|) \end{aligned}$$

für alle $i = 1, \ldots, N$ erhalten. In Kombination mit einfachen Translationen folgt dann

$$\begin{aligned} |E_L(w) - E_L(\tilde{w})| &= \left| \sum_{i=1}^N E_{[0,l_{w,i}]}(w_i) - \sum_{i=1}^N E_{[0,l_{\tilde{w},i}]}(\tilde{w}_i) \right| \leq \sum_{i=1}^N \left| E_{[0,l_{w,i}]}(w_i) - E_{[0,l_{\tilde{w},i}]}(\tilde{w}_i) \right| \\ &\lesssim \sum_{i=1}^N \left(\exp\left(-\sqrt{G''(1)} l_1\right) (|x_i - \tilde{x}_i| + |x_{i+1} - \tilde{x}_{i+1}|) \right) \\ &= \exp\left(-\sqrt{G''(1)} l_1\right) \sum_{i=1}^N 2|x_i - \tilde{x}_i| \\ &\underset{(2.54)}{\lesssim} N \exp\left(-\sqrt{G''(1)} l_1\right) |c - \tilde{c}|. \end{aligned}$$

Schließlich wählen wir $\widehat{l_7} := l_1$. □

2.3 Konvergenzraten und Abschätzungen mithilfe der L^1-Norm

Der Grundgedanke in diesem Abschnitt ist es, in einer ähnlichen Ausgangssituation wie in Satz 2.2.7 eine neuere Methode aus [5] anzuwenden, um die Metastabilität der Cahn-Hilliard-Gleichung weiter zu untersuchen. Zur Vereinfachung beschränken wir uns in diesem Abschnitt auf den Fall $N = 2$. Die Verallgemeinerung der meisten hier bewiesenen Ergebnisse auf den Fall $N \in 2\mathbb{N}$ ist jedoch möglich und nicht so schwer.

Jedenfalls gelingt uns mit dieser Methode in unserem Hauptresultat, dem Satz 2.3.1, unter Verwendung der sogenannten **excess mass** (dt.: überschüssige Masse), sprich des L^1-Abstands der Lösung $u(\cdot)$ der Cahn-Hilliard-Gleichung und eines zugehörigen vorzeichen-wechselnden energie-optimalen Profils $w(\cdot)$, für einen beliebigen Mittelwert $\mathfrak{m} \in (-1, 1)$ der Lösung $u(\cdot)$ sowie $L \gg 1$ und $l \gg 1$ unter weiteren vereinfachenden Annahmen Folgendes: Zum Einen bestimmen wir die Abklingrate der Energie-Differenz von $u(\cdot)$ und $w(\cdot)$ auf einem exponentiell langen Zeitraum und zum Anderen bestimmen wir eine obere Schranke für den Abstand der Nullstellen $c(\cdot)$ von $u(\cdot)$ und der Nullstellen $\bar{c}$ eines zum Anfangsdatum u_0 zugehörigen vorzeichen-wechselnden energie-optimalen Profils $\overline{w}$ auf einem Zeitraum mit der Länge der Ordnung L^4. Diese Ergebnisse lassen sich zum Teil als erste Entwicklungsphase der metastabilen Lösung u interpretieren, worauf wir in Bemerkung 2.3.2 b) genauer eingehen.
Am Ende dieses Abschnitts stellen wir noch kurz einen Bezug zu den Minimierern von (1.10) her, da sie bei der Betrachtung der Lösung u für große Zeiten eine wichtige Rolle spielen (können).

Nun kommen wir direkt zu unserem Hauptresultat, für dessen Beweis die Hauptideen aus den Beweisen von [5, Lemma 3.3, Lemma 3.4, Proposition 3.6, Lemma 3.7] stammen. Die darin verwendeten zentralen Werkzeuge sind sogenannte Nash-Ungleichungen, Dualitätsargumente und Schauder-Abschätzungen.

Satz 2.3.1.
Das Potenzial G erfülle zusätzlich zu den Annahmen in den Voraussetzungen 2.0.4 das Axiom ($\mathcal{G}5$). Zudem seien $\mathfrak{m} \in (-1, 1)$ und $C_H, C_E, C_V, C_1 > 1$. Dann existiert ein $\widehat{L}_1 > 0$, sodass für alle $L \geq \widehat{L}_1$ und

$$l_0 \geq \frac{2L}{C_1}, \qquad \overline{H}_0 \leq C_H, \qquad E_0 \leq C_E, \qquad V_0 \leq C_V \tag{2.55}$$

Folgendes gilt. Die Lösung $u : [-L, L] \times \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$ der Cahn-Hilliard-Gleichung (2.8) unter den zusätzlichen Bedingungen (2.9) mit einem Anfangsdatum $u_0 \in \mathcal{M}_{2,\mathfrak{m}}(l_0, \overline{H}_0, E_0)$ erfüllt das Nachfolgende. Sei

$$T := \exp\left(\frac{\sqrt{G''(1)}}{2} l_0\right) l_0^{-1} \tag{2.56}$$

und seien $\overline{w}$ und $\overline{c}$ in Bezug auf das Anfangsdatum u_0 für $N = 2$ wie in Lemma 2.2.5, dann gilt $u(t) \in \mathcal{M}_{2,\mathfrak{m}}(l_0, \overline{H}(t), E_0)$ mit $\overline{H}(t) := \|u - \overline{w}\|^2_{H^{-1}}$ für alle $t \in [0, T]$, wobei wir $\overline{H}(t) \lesssim 1$ für alle $t \in [0, T]$ annehmen. Für $t \in [0, T]$ bezeichne ferner $c(t)$ das Tupel mit den zwei Nullstellen von $u(t)$, $w(t) \in \mathcal{N}_2\left(\frac{l_0}{2}\right)$ sei ein zu $u(t)$ gehöriges vorzeichenwechselndes energie-optimales Profil, also mit genau den Nullstellen in $c(t)$, wie in Lemma 2.2.5, sodass zum Einen für die excess mass *$V(t) := \|u(t) - w(t)\|_{L^1}$, $t \in [0, T]$,*

$$V(0) \leq V_0 \qquad \text{und} \qquad V(t) \lesssim V_0 + 1 \quad \text{für alle } t \in [0, T] \tag{2.57}$$

und zum Anderen

$$w(t) \leq w(s) \qquad \textit{oder} \qquad w(t) \geq w(s) \tag{2.58}$$

für alle $s, t \in [0, L^4]$ gelte, und $\mathcal{E}(t) := E_L(u(t)) - E_L(w(t))$ bezeichne die Energie-Differenz von $u(t)$ und $w(t)$, wobei $\mathcal{E}_0 := \mathcal{E}(0)$ sei.

Dann folgt

$$\|u(t) - w(t)\|^2_{H^1} + \mathcal{E}(t) \lesssim \min\left\{\mathcal{E}_0 + 1, \frac{V_0^2 + 1}{t^{\frac{1}{2}}}\right\} \tag{2.59}$$

für alle $t \in [0, T]$. Außerdem gilt

$$|\overline{c} - c(t)| \lesssim \overline{H}_0^{\frac{1}{3}} + \overline{H}_0^{\frac{1}{5}} + V_0 + 1 \tag{2.60}$$

für alle $t \in [0, L^4]$ und $u(t)$ besitzt genau zwei einfache Nullstellen für $t \in [L, T]$.

Dabei können die Konstanten in den Abschätzungen mit $\lesssim$ von C_H, C_E, C_V und C_1 abhängen.

Bemerkung 2.3.2.

a) In Satz 2.3.1 haben wir einige vereinfachende Annahmen getroffen:

(i) Zunächst haben wir angenommen, dass $\overline{H}(t) \lesssim 1$ für alle $t \in [0, T]$ gilt. Denn wie wir bereits in Bemerkung 2.2.8 erwähnt haben, kann ein zu Satz 2.2.7 analoges Resultat für den Fall $\mathfrak{m} \in (-1, 1)$ bewiesen werden, das unter geeigneten Annahmen an die gegebenen Konstanten die Abschätzung $\overline{H}(t) \lesssim 1$ (mit einer universellen Konstante, die von C_H, C_E und C_1 abhängen kann) für $t \in [0, \tilde{\delta}^{-1}]$ mit einem bzgl. $l(0) \geq \frac{l_0}{2}$ exponentiell kleinen $\tilde{\delta} > 0$ (ähnlich wie δ in Satz 2.2.7) liefert. Da nun sogar $L^{\frac{1}{2}} T < \delta^{-1}$ (δ aus Satz 2.2.7) für $L, l_0 \gg 1$ gilt, ist die Annahme somit legitim.

a) (ii) Des Weiteren haben wir die zu $u(\cdot)$ gehörigen vorzeichen-wechselnden energie-optimalen Profile $w(\cdot)$ so gewählt, dass zum Einen (2.57) gilt. Diese Abschätzung kann man jedoch auch zeigen, indem man das eingangs erwähnte, aber ziemlich aufwendige Dualitätsargument in [5, Proposition 3.6] auf die hier vorliegende Situation anpasst. Zur Abkürzung des Beweises verzichten wir darauf jedoch in dieser Arbeit.

(iii) Zum Anderen soll für die Profile $w(\cdot)$ mindestens eine der Ungleichungen in (2.58) gelten. Diese Annahme dient ebenfalls der Vereinfachung des Beweises. Man kann darauf auch verzichten, das aber wieder einen gewissen Mehraufwand mit sich bringt.

b) Die Abschätzungen in Satz 2.3.1 können wir zum Teil als erste Entwicklungsphase der Lösung u interpretieren: Denn im Beweis haben wir $\widehat{L}_1$ so groß gewählt, dass für alle $L \geq \widehat{L}_1$ und $l_0 \geq \frac{2L}{C_1}$ insbesondere $T \geq L^4$ gilt. Somit gelten die Abschätzungen (2.59) und (2.60) unter den angegebenen Annahmen insbesondere für alle $t \in [0, L^4]$. Diese sind vergleichbar mit den Abschätzungen (2.46) und (2.47) für alle $t \in [0, s_1]$ mit $s_1 \lesssim L^2$ in Satz 2.2.7 (i). Zwar sind die Abklingraten in (2.59) und (2.46) unterschiedlich, aber jeweils am Ende der Zeitintervalle gilt

$$\|u(L^4) - w(L^4)\|_{H^1}^2 + \mathcal{E}(L^4) \underset{(2.59)}{\lesssim} L^{-2}$$

in Satz 2.3.1 und

$$\|u(s_1) - w(s_1)\|_{H^1}^2 + \mathcal{E}(s_1) \underset{(2.48)}{\lesssim} L^{-2}$$

in Satz 2.2.7.

c) Darüber hinaus kann man wie in Satz 2.2.7 ebenfalls in diesem Resultat unter Verwendung neuerer Methoden im Zusammenhang mit der excess mass zeigen, dass es mindestens eine weitere Entwicklungsphase, etwa $I_2 \subseteq \mathbb{R}_{\geq L^4}$, gibt, für die man dann auch entsprechende Abschätzungen herleiten kann; z.B. gilt die Abschätzung

$$\mathcal{E}(t) \lesssim \mathcal{E}(L^4) \exp\left(\frac{-t}{C}\right)$$

mit einer Konstanten $C > 0$ für alle $t \in I_2$. Daran wird sogar aktuell noch unter deutlich allgemeineren Voraussetzungen, also z.B. für $N \in 2\mathbb{N}$ und ohne die Annahmen (2.57) und (2.58), geforscht.

Beweis von Satz 2.3.1

Zunächst seien $\widehat{l}_0 > 0$ die Konstante aus Lemma 2.1.3, $\widehat{l}_\epsilon > 0$ die zu $\epsilon := \frac{\sqrt{G''(1)}}{8}$ gehörige Konstante aus Satz 2.1.7, $\widehat{l}_3 > 0$ bzw. $\widehat{l}_6 > 0$ die zu $\mathfrak{m}$, $N = 2$, C_H und C_E gehörige Konstante aus Lemma 2.2.5 bzw. Lemma 2.2.11 und $\widehat{l}_7 > 0$ die Konstante aus Lemma 2.2.13. Außerdem sei $\tilde{L}_0 > 0$ so groß, dass

$$\exp\left(\frac{\sqrt{G''(1)}}{2}\tilde{l}_0\right)\tilde{l}_0^{-1} \geq L^4$$

für alle $\tilde{l}_0 \geq \frac{2L}{C_1}$ und $L \geq \tilde{L}_0$ gilt. Dann wählen wir

$$L_0 := C_1 \max\{\widehat{l}_0, \widehat{l}_\epsilon, \widehat{l}_3, \widehat{l}_6, \widehat{l}_7, \tilde{L}_0\}, \qquad L \geq L_0 \tag{2.61}$$

und

$$l_0 \geq \frac{2L}{C_1} \geq 2 \max\{\widehat{l}_0, \widehat{l}_\epsilon, \widehat{l}_3, \widehat{l}_6, \widehat{l}_7\}, \tag{2.62}$$

wobei in diesem Beweis zur Sicherung der Existenz der vorzeichen-wechselnden energie-optimalen Profile stets ohne Einschränkung der Allgemeinheit $l_0 \leq L$ gelte. Ferner seien $u_0 \in \mathcal{M}_{2,\mathfrak{m}}(l_0, \overline{H}_0, E_0)$ und zugehörige $\overline{w}$ und $\overline{c}$ wie in Lemma 2.2.5 gegeben. Außerdem sei $u : [-L, L] \times \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$ die Lösung der Cahn-Hilliard-Gleichung (2.8) unter den zusätzlichen Bedingungen (2.9) mit jenem Anfangsdatum u_0. Nach Bemerkung 2.0.7 gilt dann

$$E_L(u(t)) \leq E_L(u_0) \leq E_0 \tag{2.63}$$

für alle $t \geq 0$ und nach Annahme gilt $\overline{H}(t) \lesssim 1$ für alle $t \in [0, T]$, d.h. es existiert eine universelle Konstante $C_2 = C_2(C_H, C_E, C_1) \geq C_H$ mit $\overline{H}(t) \leq C_2$ für alle $t \in [0, T]$. Nun seien $\widehat{l}_3^* > 0$ bzw. $\widehat{l}_4 > 0$ bzw. $\widehat{l}_5 > 0$ die zu $\mathfrak{m}$, $N = 2$, C_2 und C_E gehörigen Konstanten aus Lemma 2.2.5 bzw. Lemma 2.2.9 bzw. Lemma 2.2.10 und wir wählen von vornherein

$$L_1 := C_1 \max\{\widehat{l}_0, \widehat{l}_\epsilon, \widehat{l}_3^*, \widehat{l}_4, \widehat{l}_5, \widehat{l}_6, \widehat{l}_7, \tilde{L}_0\}, \qquad L \geq L_1 \tag{2.64}$$

und

$$l_0 \geq \frac{2L}{C_1} \geq 2 \max\{\widehat{l}_0, \widehat{l}_\epsilon, \widehat{l}_3^*, \widehat{l}_4, \widehat{l}_5, \widehat{l}_6, \widehat{l}_7\}. \tag{2.65}$$

Dann bleibt die Gültigkeit von (2.63) natürlich erhalten und zudem gilt noch die Annahme $\overline{H}(t) \leq C_2$ für alle $t \in [0, T]$, da es sich bei C_2 per Annahme um eine universelle Konstante handelt. Zusammen mit Lemma 2.0.6 (i) impliziert dies insbesondere $u(t) \in \mathcal{M}_{2,\mathfrak{m}}(l_0, \overline{H}(t), E_0)$ für alle $t \in [0, T]$. Des Weiteren seien für alle $t \in [0, T]$ ein Nullstellen-Tupel $c(t) := (x_1(t), x_2(t))$ von $u(t)$ und ein zu $u(t)$ gehöriges vorzeichen-wechselndes energie-optimales Profil $w(t) \in \mathcal{N}_2\left(\frac{l_0}{2}\right)$, also mit genau den Nullstellen in $c(t)$, wie in Lemma 2.2.5 gegeben, wobei sich deren Existenz aus demselben Lemma aufgrund von $l_0 \geq \widehat{l}_3^*$ nach (2.65) ergibt. Dabei nehmen wir an, dass sie (2.57) und (2.58) erfüllen.

Zu Beginn zeigen wir (2.59) in zwei Schritten.

Schritt 1: Es gilt die *Nash-Ungleichung*

$$\mathcal{E}(t) \lesssim D^{\frac{1}{3}}(t)(V(t)+1)^{\frac{4}{3}} \tag{2.66}$$

für alle $t \in [0, T]$, wobei $D(\cdot)$ die Dissipation von $u(\cdot)$ aus Lemma 2.0.6 (ii) bezeichne.

Dazu: Sei $f(t) := u(t) - w(t)$, $t \in [0, T]$. Dann gilt zum Einen

$$f(t) \in H^1 \underset{(1.5)}{\subseteq} C^{0,\frac{1}{2}}([-L, L])$$

und somit

$$f^2(t) \in W^{1,1} \subseteq C([-L,L]),$$

wobei die letzte Inklusion aus den Einbettungssätzen für Sobolevräume folgt, und zum Anderen gilt für $g(\cdot,t) = g(t) \in \{f(t), f^2(t)\}$

$$g(x,t) - g(y,t) = \int_y^x g_z(z,t)\,\mathrm{d}z \tag{2.67}$$

für alle $x, y \in [-L,L]$ und $t \in [0,T]$. Damit erhalten wir als erste Abschätzung

$$\begin{aligned} \|f^2(t)\|_{C([-L,L])} &= \max_{x\in[-L,L]} f^2(x,t) \underset{(2.67)}{=} \max_{x\in[-L,L]} \int_{x_1(t)}^x (f^2)_y(y,t)\,\mathrm{d}y && (2.68)\\ &= \max_{x\in[-L,L]} \int_{x_1(t)}^x 2f(y,t) f_y(y,t)\,\mathrm{d}y \\ &\lesssim \left(\int_{-L}^L f^2(y,t)\,\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{-L}^L f_y^2(y,t)\,\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{2}} && (2.69)\\ &\le \|f(t)\|_{C([-L,L])}^{\frac{1}{2}} \left(\int_{-L}^L |f(y,t)|\,\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{-L}^L f_y^2(y,t)\,\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{2}} && (2.70) \end{aligned}$$

für alle $t \in [0,T]$, wobei wir in (2.68) die Identität $f^2(x_1(t),t) = 0$ und in (2.69) sowie (2.70) insbesondere die Hölder-Ungleichung verwendet haben. Dies impliziert

$$\begin{aligned} \|f(t)\|_{C([-L,L])} &= \|f^2(t)\|_{C([-L,L])}^{\frac{1}{2}} \\ &\lesssim \|f(t)\|_{C([-L,L])}^{\frac{1}{4}} \left(\int_{-L}^L |f(x,t)|\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{4}} \left(\int_{-L}^L f_x^2(x,t)\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{4}} \end{aligned}$$

und daher

$$\|f(t)\|_{C([-L,L])}^{\frac{3}{4}} \lesssim \left(\int_{-L}^L |f(x,t)|\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{4}} \left(\int_{-L}^L f_x^2(x,t)\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{4}}$$

bzw.

$$\|f(t)\|_{C([-L,L])} \lesssim \left(\int_{-L}^L |f(x,t)|\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{3}} \left(\int_{-L}^L f_x^2(x,t)\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{3}} \tag{2.71}$$

für alle $t \in [0,T]$. Ferner gelten (2.49) und (2.50) für $u(t)$ und $w(t)$ bzw. $f(t)$ für alle $t \in [0,T]$, da $l_0 \geq \widehat{l_4}$ nach (2.65) gilt, sodass wir zum Einen unter erneuter

Anwendung der Hölder-Ungleichung

$$\begin{aligned}
\int_{-L}^{L} f^2(x,t)\,\mathrm{d}x &\leq \|f(t)\|_{C([-L,L])}\int_{-L}^{L} |f(x,t)|\,\mathrm{d}x \\
&\underset{(2.71)}{\lesssim} \left(\int_{-L}^{L} |f(x,t)|\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{4}{3}}\left(\int_{-L}^{L} f_x^2(x,t)\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{3}} \\
&\underset{(2.50)}{\lesssim} V^{\frac{4}{3}}(t)D^{\frac{1}{3}}(t)
\end{aligned} \tag{2.72}$$

und zum Anderen

$$\int_{-L}^{L} f_x^2(x,t)\,\mathrm{d}x = \left(\int_{-L}^{L} f_x^2(x,t)\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{2}{3}}\left(\int_{-L}^{L} f_x^2(x,t)\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{3}} \underset{(2.49),(2.50)}{\lesssim} \mathcal{E}^{\frac{2}{3}}(t)D^{\frac{1}{3}}(t) \tag{2.73}$$

für alle $t \in [0,T]$ erhalten. Dabei erkennen wir, dass (2.52) für $l = \frac{l_0}{2} \geq \widehat{l}_7$ nach (2.65) sowie $\overline{w} \in \mathcal{N}_2(l_0) \subseteq \mathcal{N}_2\left(\frac{l_0}{2}\right)$ und $w(t) \in \mathcal{N}_2\left(\frac{l_0}{2}\right)$ für alle $t \in [0,T]$ gilt, sodass unter Verwendung der Bezeichnung $\overline{\mathcal{E}}(t) := E_L(u(t)) - E_L(\overline{w})$, $t \in [0,T]$, die Abschätzung

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}(t) &= E_L(u(t)) - E_L(w(t)) \leq \overline{\mathcal{E}}(t) + |E_L(\overline{w}) - E_L(w(t))| \\
&\underset{(2.63),(2.52)}{\lesssim} \overline{\mathcal{E}}(0) + e^{-\frac{\sqrt{G''(1)}}{2}l_0}|\overline{c} - c(t)| < \overline{\mathcal{E}}(0) + e^{-\frac{\sqrt{G''(1)}}{2}l_0}L \\
&\underset{(2.65)}{\lesssim} \overline{\mathcal{E}}(0) + e^{-\frac{\sqrt{G''(1)}}{2}l_0}l_0 \leq \mathcal{E}_0 + |E_L(w(0) - E_L(\overline{w})| + e^{-\frac{\sqrt{G''(1)}}{2}l_0}l_0 \\
&\lesssim \mathcal{E}_0 + e^{-\frac{\sqrt{G''(1)}}{2}l_0}l_0 \lesssim \mathcal{E}_0 + 1 \lesssim 1
\end{aligned} \tag{2.74}$$

für alle $t \in [0,T]$ folgt, wobei wir in (2.74) den Term $|E_L(w(0) - E_L(\overline{w})|$ genauso wie $|E_L(w(t) - E_L(\overline{w})|$ vorher abgeschätzt haben. In Kombination mit (2.73) ergibt sich daher

$$\int_{-L}^{L} f_x^2(x,t)\,\mathrm{d}x \lesssim \mathcal{E}^{\frac{2}{3}}(t)D^{\frac{1}{3}}(t) \lesssim D^{\frac{1}{3}}(t) \leq D^{\frac{1}{3}}(t)(V(t)+1)^{\frac{4}{3}} \tag{2.75}$$

und somit insgesamt

$$\mathcal{E}(t) \underset{(2.49)}{\lesssim} \int_{-L}^{L} f^2(x,t) + f_x^2(x,t)\,\mathrm{d}x \underset{(2.72),(2.75)}{\lesssim} D^{\frac{1}{3}}(t)(V(t)+1)^{\frac{4}{3}}$$

für alle $t \in [0,T]$, das der Behauptung in Schritt 1 entspricht.

Schritt 2: Sei

$$\overline{V} := \max\left\{\sup_{t\in[0,T]} V(t), 1\right\} \underset{(2.57)}{\lesssim} V_0 + 1,$$

dann gilt

$$\mathcal{E}(t) \lesssim \frac{\overline{V}^2}{t^{\frac{1}{2}}} \tag{2.76}$$

für alle $t \in [0, T]$.

Dazu: Einerseits erhalten wir mit einer ähnlichen Abschätzung wie in (2.74)

$$\mathcal{E}(t) \geq \overline{\mathcal{E}}(t) - |E_L(\overline{w}) - E_L(w(t))| \gtrsim \overline{\mathcal{E}}(t) - e^{-\frac{\sqrt{G''(1)}}{2} l_0} l_0 =: \widehat{\mathcal{E}}(t)$$

und andererseits gilt

$$\mathcal{E}(t) \underset{(2.66)}{\lesssim} D^{\frac{1}{3}}(t)(V(t)+1)^{\frac{4}{3}} \lesssim D^{\frac{1}{3}}(t)\overline{V}^{\frac{4}{3}} \underset{2.0.6\ (ii)}{\lesssim} -\left(\frac{d}{dt}\widehat{\mathcal{E}}(t)\right)^{\frac{1}{3}} \overline{V}^{\frac{4}{3}}$$

für alle $t \in [0, T]$, das zusammen

$$\widehat{\mathcal{E}}(t) \lesssim -\left(\frac{d}{dt}\widehat{\mathcal{E}}(t)\right)^{\frac{1}{3}} \overline{V}^{\frac{4}{3}} \qquad \text{oder} \qquad \widehat{\mathcal{E}}^3(t) \lesssim -\left(\frac{d}{dt}\widehat{\mathcal{E}}(t)\right) \overline{V}^4 \tag{2.77}$$

für alle $t \in [0, T]$ ergibt.

Basierend auf der letzteren Differentialungleichung weisen wir jetzt nach, dass

$$\widehat{\mathcal{E}}(t) \lesssim \frac{\overline{V}^2}{t^{\frac{1}{2}}} \tag{2.78}$$

für alle $t \in [0, T]$ gilt. Dazu stellen wir zunächst fest, dass $\mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R},\ t \mapsto \widehat{\mathcal{E}}(t)$ nach Bemerkung 2.0.5 a) und Lemma 2.0.6 (i) stetig differenzierbar und monoton fallend ist. Falls $\widehat{\mathcal{E}}(0) \leq 0$ gilt, folgt daraus $\widehat{\mathcal{E}}(t) \leq 0$ für alle $t \in [0, T]$, sodass (2.78) trivialerweise zutrifft.
Andernfalls existiert ein $\tilde{T} \in (0, T]$, sodass $\widehat{\mathcal{E}}(t) > 0$ für alle $t \in [0, \tilde{T})$ und $\widehat{\mathcal{E}}(t) \leq 0$ für alle $t \in [\tilde{T}, T]$ gelten. Da die Abschätzung (2.78) in $[\tilde{T}, T]$ wiederum trivial ist, können wir uns auf das Intervall $[0, \tilde{T})$ beschränken: Wenn wir beide Seiten der letzteren Differentialungleichung in (2.77) durch $\widehat{\mathcal{E}}^3(\cdot)$ teilen und bzgl. der Zeit integrieren, ergibt sich

$$t \lesssim \overline{V}^4 \int_0^t -\frac{\frac{d}{ds}\widehat{\mathcal{E}}(s)}{\widehat{\mathcal{E}}^3(s)}\, \mathrm{d}s = \overline{V}^4 \left[\frac{1}{2\widehat{\mathcal{E}}^2(s)}\right]_0^t = \overline{V}^4 \left(\frac{1}{2\widehat{\mathcal{E}}^2(t)} - \frac{1}{2\widehat{\mathcal{E}}^2(0)}\right) \lesssim \frac{\overline{V}^4}{\widehat{\mathcal{E}}^2(t)}$$

für alle $t \in [0, \tilde{T})$, das zu (2.78) umgeformt werden kann.

Anschließend erhalten wir wieder mit einer ähnlichen Abschätzung wie in (2.74)

$$\widehat{\mathcal{E}}(t) \gtrsim \overline{\mathcal{E}}(t) - e^{-\frac{\sqrt{G''(1)}}{2} l_0} l_0 \gtrsim \mathcal{E}(t) - e^{-\frac{\sqrt{G''(1)}}{2} l_0} l_0$$

für alle $t \in [0, T]$, das zusammen mit (2.78) die Abschätzung

$$\mathcal{E}(t) \lesssim \frac{\overline{V}^2}{t^{\frac{1}{2}}} + e^{-\frac{\sqrt{G''(1)}}{2} l_0} l_0 = \frac{\overline{V}^2}{t^{\frac{1}{2}}} + e^{-\frac{\sqrt{G''(1)}}{2} l_0} l_0 \frac{\overline{V}^2 T^{\frac{1}{2}}}{\overline{V}^2 T^{\frac{1}{2}}} \leq \frac{\overline{V}^2}{t^{\frac{1}{2}}} + e^{-\frac{\sqrt{G''(1)}}{4} l_0} l_0^{\frac{1}{2}} \frac{\overline{V}^2}{t^{\frac{1}{2}}} \lesssim \frac{\overline{V}^2}{t^{\frac{1}{2}}}$$

für alle $t \in [0, T]$ liefert, sodass nun auch Schritt 2 erledigt ist.

Schließlich folgt (2.59) aus (2.49), (2.76), (2.57) und (2.74).

Nun widmen wir uns dem Beweis von (2.60). Dabei gilt zunächst

$$|\overline{c} - c(t)| \leq |\overline{c} - c(0)| + |c(0) - c(t)| \underset{(2.42)}{\lesssim} \overline{H}_0^{\frac{1}{3}} + \overline{H}_0^{\frac{1}{5}} + |c(0) - c(t)| \tag{2.79}$$

für alle $t \in [0, T]$. Daher genügt es, die Abschätzung

$$|c(0) - c(t)| \lesssim V_0 + 1 \tag{2.80}$$

für alle $t \in [0, L^4]$ zu zeigen. Dazu ist es hilfreich, für $t \in [0, L^4]$ die Funktionen $u(t)$ und $w(t)$ $2L$-periodisch auf $\mathbb{R}$ fortzusetzen und Letztere durch folgende Funktion zu approximieren: Unter Verwendung der Funktionen v_l^+ und v_l^-, $l > 0$, aus Definition 2.1.4 und der Bezeichnung $x_3(t) := x_1(t) + 2L$ definieren wir $\tilde{v}(t) = \tilde{v}(\cdot, t) : \mathbb{R} \to H^1$ durch

$$\tilde{v}(x,t) := \begin{cases} \operatorname{sign}((w(t))|_{(x_1(t), x_2(t))} v^+_{x_2(t) - x_1(t)}(x - x_1(t)), & \text{falls } x \in (x_1(t), x_2(t)], \\ \operatorname{sign}((w(t))|_{(x_2(t), x_3(t))} v^+_{x_3(t) - x_2(t)}(x - x_2(t)), & \text{falls } x \in (x_2(t), x_3(t)], \end{cases} \tag{2.81}$$

mit $2L$-periodischer Fortsetzung auf $\mathbb{R}$. Per Definition besitzt $\tilde{v}(t)$ exakt dieselben Nullstellen und dieselben Vorzeichen wie $w(t)$. Wegen $\frac{l_0}{2} \geq \widehat{l}_\epsilon$ nach (2.65) gilt außerdem (2.40) mit $\epsilon = \frac{\sqrt{G''(1)}}{8}$ und $l \geq \frac{l_0}{2}$, das aufgrund der Definitionen von $w(t)$ und $\tilde{v}(t)$ insbesondere die Abschätzung

$$\|w(t) - \tilde{v}(t)\|_{C^0(\mathbb{R})} \lesssim e^{-\frac{\sqrt{G''(1)}}{16} l_0} \tag{2.82}$$

für alle $t \in [0, L^4]$ impliziert. Jedenfalls gehen wir jetzt für den Nachweis von (2.80) wieder schrittweise vor:

Schritt 1: Es existiert ein $L_2 \geq L_1$, sodass Folgendes gilt, wenn wir von Anfang an

$$L \geq L_2 \qquad \text{und} \qquad l_0 \geq \frac{2L}{C_1}$$

annehmen: Es gilt

$$|c(0) - c(t)| \leq \frac{L}{8C_1} \tag{2.83}$$

für alle $t \in [0, L]$ und

$$|c(L^k) - c(t)| \leq \frac{L}{8C_1} \tag{2.84}$$

für alle $t \in [L^k, L^{k+1}]$ für $k \in \{1,2,3\}$.

Dazu: Wir nehmen an, dass die Behauptung nicht zutrifft. Dann gelte ohne Einschränkung der Allgemeinheit, dass zu einem beliebigen $L_2 \geq L_1$ ein $L \geq L_2$ und $l_0 \geq \frac{2L}{C_1}$ existiert, infolgedessen (2.84) für ein festes $k \in \{1,2,3\}$ nicht gelte, d.h. es existiert ein $t_0 \in [L^k, L^{k+1}]$ mit

$$|c(L^k) - c(t_0)| > \frac{L}{8C_1}, \tag{2.85}$$

wobei ohne Einschränkung der Allgemeinheit

$$|c(L^k) - c(t_0)| = \max\{|x_1(L^k) - x_1(t_0)|, |x_2(L^k) - x_2(t_0)|\} = |x_1(L^k) - x_1(t_0)|$$

gelte. Wenn wir $x_0(t) := x_2(t) - 2L$ für $t \in [0, L^4]$ definieren, folgt aus (2.85) mit einigen Fallunterscheidungen, dass $i_1, i_2 \in \{0,1,2,3\}$ sowie $t_1, t_2 \in \{L^k, t_0\}$ mit $t_1 \neq t_2$ existieren, sodass

$$d := x_{i_2}(t_2) - x_{i_1}(t_1) > \frac{L}{8C_1} \tag{2.86}$$

und

$$x_j(t) \notin \left(x_{i_1}(t_1) - \frac{L}{8C_1}, x_{i_2}(t_2) + \frac{L}{8C_1} \right) \tag{2.87}$$

für alle $(j,t) \in (\{0,1,2,3\} \times \{L^k, t_0\}) \setminus \{(i_1,t_1),(i_2,t_2)\}$ gilt. Dabei seien ohne Einschränkung der Allgemeinheit $x_{i_1}(t_1) = x_1(L^k)$ und $x_{i_2}(t_2) = x_1(t_0)$.
Aufgrund von (2.58) können wir nun ohne Einschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass $w(L^k) \geq w(t_0)$ in $[-L, L]$ und somit in $\mathbb{R}$ gilt. In Kombination mit (2.86) und (2.87) folgt somit zum Einen, dass sowohl $w(L^k)$ in $x_1(L^k)$ als auch $w(t_0)$ in $x_1(t_0)$ vom Negativen ins Positive wechseln, und zum Anderen, dass

$$(x_1(t_0) <)\ x_2(t_0) \leq x_2(L^k)$$

gilt und dass sowohl $w(t_0)$ in $x_2(t_0)$ als auch $w(L^k)$ in $x_2(L^k)$ vom Positiven ins Negative wechseln. Für die nachfolgenden Abschätzungen ist es nun teilweise einfacher, mit den Funktionen $\tilde{v}(t)$ aus (2.81) für $t \in \{L^k, t_0\}$ zu arbeiten, wobei aufgrund von $x_1(L^k) < x_1(t_0) < x_2(t_0) \leq x_2(L^k)$, $w(L^k) \geq w(t_0)$ in $\mathbb{R}$ und deren Definition ebenfalls

$$\tilde{v}(L^k) \geq \tilde{v}(t_0) \tag{2.88}$$

in $\mathbb{R}$ gilt und $\tilde{v}(t)$ dieselben Vorzeichen-Wechsel in den Nullstellen $x_i(t)$ wie $w(t)$ für $t \in \{L^k, t_0\}$ und $i \in \{1,2\}$ vollzieht. Daraus folgern wir, dass

$$\underset{x \in [x_1(L^k), x_2(L^k)]}{\operatorname{argmax}} \tilde{v}(x, L^k) = \frac{x_1(L^k) + x_2(L^k)}{2} \underset{(2.87)}{>} \frac{x_1(L^k) + x_1(t_0)}{2}$$

sowie

$$\underset{x \in [x_0(t_0), x_1(t_0)]}{\operatorname{argmin}} \tilde{v}(x, t_0) = \frac{x_0(t_0) + x_1(t_0)}{2} \underset{(2.87)}{<} \frac{x_1(L^k) + x_1(t_0)}{2}$$

und aufgrund von Lemma 2.1.3 (v) daher

$$\tilde{v}(L^k) \geq \tilde{v}\left(x_1(L^k) + \frac{d}{4}, L^k\right) \underset{(2.86)}{>} \tilde{v}\left(x_1(L^k) + \frac{L}{32C_1}, L^k\right) = v\left(\frac{L}{32C_1}\right) \tag{2.89}$$

in $\left[x_1(L^k) + \frac{d}{4}, x_1(t_0) - \frac{d}{4}\right]$ sowie

$$\tilde{v}(t_0) \leq \tilde{v}\left(x_1(t_0) - \frac{d}{4}, t_0\right) \underset{(2.86)}{<} \tilde{v}\left(x_1(t_0) - \frac{L}{32C_1}, t_0\right) = -v\left(\frac{L}{32C_1}\right) \tag{2.90}$$

in $\left[x_1(L^k) + \frac{d}{4}, x_1(t_0) - \frac{d}{4}\right]$ gelten, wobei v der kink aus Lemma 1.2.1 ist. Nun seien $L_2 \geq L_1$ und dazu ein $L \geq L_2$ und ein $l_0 \geq \frac{2L}{C_1}$ von vornherein so groß gewählt, dass

$$v\left(\frac{L}{32C_1}\right) \geq \frac{1}{2} \tag{2.91}$$

gilt, das wegen Lemma 1.2.1 (ii) möglich ist. Anschließend können wir wegen (2.86) eine Abschneidefunktion $\eta : \mathbb{R} \to [0,1]$ mit $\eta \in C^1(\mathbb{R})$,

$$|\eta_x| \lesssim \frac{1}{L} \quad \text{in } \mathbb{R}, \qquad \eta \equiv 1 \quad \text{in } \left[x_1(L^k) + \frac{d}{4}, x_1(t_0) - \frac{d}{4}\right] \tag{2.92}$$

und

$$\eta \equiv 0 \quad \text{in } \mathbb{R} \setminus (x_1(L^k), x_1(t_0)) \tag{2.93}$$

wählen. Insgesamt erhalten wir damit die Abschätzung

$$\begin{aligned}
&\int_{-L}^{L} \eta(\tilde{v}(L^k) - \tilde{v}(t_0))\,\mathrm{d}x \\
\underset{(2.88),(2.92),(2.93)}{\geq}\; &\int_{x_1(L^k)+\frac{d}{4}}^{x_1(t_0)-\frac{d}{4}} \tilde{v}(L^k) - \tilde{v}(t_0)\,\mathrm{d}x \\
\underset{(2.89),(2.90)}{\geq}\; &\int_{x_1(L^k)+\frac{d}{4}}^{x_1(t_0)-\frac{d}{4}} v\left(\frac{L}{32C_1}\right) - \left(-v\left(\frac{L}{32C_1}\right)\right)\,\mathrm{d}x \\
=\; &dv\left(\frac{L}{32C_1}\right) \underset{(2.86),(2.91)}{>} \frac{L}{16C_1}.
\end{aligned} \tag{2.94}$$

Dagegen ergibt sich

$$
\begin{aligned}
&\int_{-L}^{L} \eta(\tilde{v}(L^k) - \tilde{v}(t_0))\,\mathrm{d}x \\
\leq\quad & \left|\int_{-L}^{L} \eta(w(L^k) - w(t_0))\,\mathrm{d}x\right| + \left|\int_{-L}^{L} \eta(\tilde{v}(L^k) - w(L^k))\,\mathrm{d}x\right| \\
& + \left|\int_{-L}^{L} \eta(w(t_0) - \tilde{v}(t_0))\,\mathrm{d}x\right| \\
\underset{(2.92),(2.93),(2.82)}{\lesssim}\quad & \left|\int_{-L}^{L} \eta(w(L^k) - w(t_0))\,\mathrm{d}x\right| + Le^{-\frac{\sqrt{G''(1)}}{16} l_0} \\
\leq\quad & \left|\int_{-L}^{L} \eta(w(L^k) - u(L^k))\,\mathrm{d}x\right| + \left|\int_{-L}^{L} \eta(u(L^k) - u(t_0))\,\mathrm{d}x\right| \\
& + \left|\int_{-L}^{L} \eta(u(t_0) - w(t_0))\,\mathrm{d}x\right| + Le^{-\frac{\sqrt{G''(1)}}{8C_1} L} \\
\underset{(2.92),(2.93),(2.6)}{\lesssim}\quad & V(L^k) + \|\eta_x\|_{L^2} \|u(L^k) - u(t_0)\|_{\dot{H}^{-1}} + V(t_0) + 1 \\
\underset{(2.57),(2.92),2.0.6\ (iii)}{\lesssim}\quad & V_0 + \frac{1}{L^{\frac{1}{2}}} \int_{L^k}^{t_0} D^{\frac{1}{2}}(\tau)\,\mathrm{d}\tau + 1 \\
\leq\quad & V_0 + \left(\frac{t_0 - L^k}{L} \int_{L^k}^{t_0} D(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right)^{\frac{1}{2}} + 1 && (2.95) \\
\underset{2.0.6\ (ii)}{=}\quad & V_0 + \left(\frac{t_0 - L^k}{L} \int_{L^k}^{t_0} \frac{d}{d\tau}\big(E_L(\overline{w}) - E_L(u(\tau))\big)\,\mathrm{d}\tau\right)^{\frac{1}{2}} + 1 \\
\leq\quad & V_0 + (L^k - L^{k-1})^{\frac{1}{2}} \Big(\big(\mathcal{E}(L^k) - \mathcal{E}(L^{k+1})\big) \\
& + \big|E_L(w(L^{k+1})) - E_L(\overline{w})\big| + \big|E_L(w(L^k)) - E_L(\overline{w})\big|\Big)^{\frac{1}{2}} + 1 \\
\underset{(2.49),(2.59)}{\lesssim}\quad & V_0 + L^{\frac{k}{2}} \left(\frac{V_0^2 + 1}{L^{\frac{k}{2}}} + e^{-\frac{\sqrt{G''(1)}}{2} l_0} l_0\right)^{\frac{1}{2}} + 1 && (2.96) \\
\leq\quad & V_0 + L^{\frac{k}{4}}(V_0 + 1) + L^{\frac{k}{2}} e^{-\frac{\sqrt{G''(1)}}{4} l_0} l_0^{\frac{1}{2}} + 1 && (2.97) \\
\leq\quad & V_0 + L^{\frac{k}{4}}(V_0 + 1) + L^{\frac{k+1}{2}} e^{-\frac{\sqrt{G''(1)}}{2C_1} L} + 1 \\
\lesssim\quad & V_0 + L^{\frac{k}{4}}(V_0 + 1) + 1 \leq C_V + L^{\frac{3}{4}}(C_V + 1) + 1,
\end{aligned}
$$

wobei wir in (2.95) die Jensen-Ungleichung für $y \mapsto y^{\frac{1}{2}}$, in (2.96) insbesondere eine ähnliche Abschätzung wie in (2.74) und in (2.97) die Ungleichung $(a+b)^{\frac{1}{2}} \leq a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}}$ für alle $a, b \geq 0$ angewendet haben. Zusammen mit (2.94) gilt also

$$\frac{L}{16C_1} < \int_{-L}^{L} \eta(\tilde{v}(L^k) - \tilde{v}(t_0))\,\mathrm{d}x \lesssim C_V + L^{\frac{3}{4}}(C_V + 1) + 1,$$

sodass wir für von Beginn an hinreichend groß gewählte $L_2 \geq L_1$ sowie $L \geq L_2$ und $l_0 \geq \frac{2L}{C_1}$ einen Widerspruch erhalten. Demnach muss die Behauptung in Schritt 1 zutreffen.

<u>*Schritt 2:*</u> Seien von vornherein

$$L \geq L_2 \qquad \text{und} \qquad l_0 \geq \frac{2L}{C_1}$$

für die Konstante $L_2 \geq L_1$ aus dem vorigen Schritt 1. Dann gilt

$$|c(0) - c(t)| \lesssim V_0 + 1 \tag{2.98}$$

für alle $t \in [0, L]$ und

$$|c(L^k) - c(t)| \lesssim V_0 + 1 \tag{2.99}$$

für alle $t \in [L^k, L^{k+1}]$ für $k \in \{1, 2, 3\}$.

Dazu: Wir beschränken uns auf den Nachweis von (2.99) für ein beliebiges, aber festes $k \in \{1, 2, 3\}$, da der Nachweis von (2.98) analog verläuft. Dazu sei $t \in [L^k, L^{k+1}]$. Dann gilt zunächst

$$|c(L^k) - c(t)| \underset{(2.84)}{\leq} \frac{L}{8C_1} < \frac{l_0}{8}. \tag{2.100}$$

Dabei gelte ohne Einschränkung der Allgemeinheit zum Einen

$$|c(L^k) - c(t)| = \max\{|x_1(L^k) - x_1(t)|, |x_2(L^k) - x_2(t)|\} \tag{2.101}$$

und zum Anderen aufgrund der Annahme (2.58)

$$w(L^k) \geq w(t) \tag{2.102}$$

in $\mathbb{R}$. Nun impliziert (2.102), dass entweder

$$x_1(L^k) \leq x_1(t) < x_2(t) \leq x_2(L^k) \tag{2.103}$$

oder

$$x_1(t) \leq x_1(L^k) < x_2(L^k) \leq x_2(t)$$

gilt, wobei wir ohne Einschränkung der Allgemeinheit (2.103) annehmen. Dies bedeutet, dass sowohl $w(L^k)$ in $x_1(L^k)$ als auch $w(t)$ in $x_1(t)$ vom Negativen ins Positive wechseln und dass sowohl $w(t)$ in $x_2(t)$ als auch $w(L^k)$ in $x_2(L^k)$ vom Positiven ins Negative wechseln. Zudem gilt

$$x_1(L^k) - x_0(L^k) \geq \frac{l_0}{2} \qquad \text{und} \qquad x_2(t) - x_1(t) \geq \frac{l_0}{2} \tag{2.104}$$

wegen $w(L^k), w(t) \in \mathcal{N}_2\left(\frac{l_0}{2}\right)$. Wie im ersten Schritt betrachten wir nun wieder $\tilde{v}(s)$ aus (2.81) für $s \in \{L^k, t\}$, für die wie im ersten Schritt insbesondere auch die Ungleichung

$$\tilde{v}(L^k) \geq \tilde{v}(t) \tag{2.105}$$

in $\mathbb{R}$ zutrifft. Darüber hinaus beobachten wir, dass z.B.

$$\underset{x\in[x_1(L^k),x_2(L^k)]}{\operatorname{argmax}} \quad \tilde{v}(x, L^k) = \frac{x_1(L^k) + x_2(L^k)}{2} \underset{(2.100),(2.101),(2.104)}{>} x_1(t_0)$$

sowie

$$\underset{x\in[x_0(t),x_1(t)]}{\operatorname{argmin}} \quad \tilde{v}(x, t) = \frac{x_0(t) + x_1(t)}{2} \underset{(2.100),(2.101),(2.104)}{<} x_1(L^k)$$

gelten. Damit erhalten wir unter Verwendung, dass der kink v nach Lemma 1.2.1 (i) ungerade ist, mithilfe von einfachen Substitutionen

$$\begin{aligned}
\left| \int_{x_1(L^k)}^{x_1(t)} \tilde{v}(L^k) - \tilde{v}(t)\,\mathrm{d}x \right| &\underset{(2.105)}{=} \int_{x_1(L^k)}^{x_1(t)} \tilde{v}(L^k) - \tilde{v}(t)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{x_1(L^k)}^{x_1(t)} v(x - x_1(L^k)) - v(x - x_1(t))\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{x_1(t)-x_1(L^k)} v(y)\,\mathrm{d}y - \int_{x_1(L^k)-x_1(t)}^{0} v(y)\,\mathrm{d}y \\
&= 2 \int_0^{x_1(t)-x_1(L^k)} v(y)\,\mathrm{d}y.
\end{aligned}$$

Falls $x_1(t) - x_1(L^k) \geq V_0 + 1$ ist, folgt somit

$$\begin{aligned}
\left| \int_{x_1(L^k)}^{x_1(t)} \tilde{v}(L^k) - \tilde{v}(t)\,\mathrm{d}x \right| &= 2 \int_0^{x_1(t)-x_1(L^k)} v(y)\,\mathrm{d}y \\
&= 2 \int_0^{V_0+1} v(y)\,\mathrm{d}y + 2 \int_{V_0+1}^{x_1(t)-x_1(L^k)} v(y)\,\mathrm{d}y \\
&\geq 2 \int_{V_0+1}^{x_1(t)-x_1(L^k)} v(1)\,\mathrm{d}y \gtrsim \big(x_1(t) - x_1(L^k)\big) - (V_0+1) \\
&\underset{(2.103)}{=} |x_1(t) - x_1(L^k)| - (V_0+1),
\end{aligned}$$

da der kink v nach Lemma 1.2.1 streng monoton wächst und $v(0) = 0$ gilt, bzw.

$$|x_1(t) - x_1(L^k)| \lesssim \left| \int_{x_1(L^k)}^{x_1(t)} \tilde{v}(L^k) - \tilde{v}(t)\,\mathrm{d}x \right| + V_0 + 1. \tag{2.106}$$

Andernfalls gilt die Abschätzung (2.106) natürlich auch. Schließlich folgern wir

$$\begin{aligned}
|x_1(t) - x_1(L^k)| &\lesssim \left| \int_{x_1(L^k)}^{x_1(t)} \tilde{v}(L^k) - \tilde{v}(t)\,\mathrm{d}x \right| + V_0 + 1 \\
&\leq \left| \int_{-L}^{L} w(L^k) - w(t)\,\mathrm{d}x \right| + \left| \int_{-L}^{L} \tilde{v}(L^k) - w(L^k)\,\mathrm{d}x \right| \\
&\quad + \left| \int_{-L}^{L} w(t) - \tilde{v}(t)\,\mathrm{d}x \right| + V_0 + 1 \\
&\underset{(2.82)}{\lesssim} \left| \int_{-L}^{L} w(L^k) - w(t)\,\mathrm{d}x \right| + L e^{-\frac{\sqrt{G''(1)}}{16} l_0} + V_0 + 1 \\
&\lesssim \left| \int_{-L}^{L} \big(w(L^k) - u(L^k)\big) + \big(u(t) - w(t)\big)\,\mathrm{d}x \right| + V_0 + 1 \qquad (2.107) \\
&\leq V(L^k) + V(t) + V_0 + 1 \underset{(2.57)}{\lesssim} V_0 + 1,
\end{aligned}$$

wobei wir in (2.107) insbesondere benutzt haben, dass $⨍_{-L}^{L} u(L^k)\,\mathrm{d}x = ⨍_{-L}^{L} u(t)\,\mathrm{d}x = \mathfrak{m}$ gilt. Analog zeigt man

$$|x_2(L^k) - x_2(t)| \lesssim V_0 + 1,$$

sodass sich insgesamt

$$|c(L^k) - c(t)| \underset{(2.101)}{=} \max\{|x_1(L^k) - x_1(t)|, |x_2(L^k) - x_2(t)|\} \lesssim V_0 + 1$$

für alle $t \in [L^k, L^{k+1}]$ ergibt, womit Schritt 2 abgeschlossen ist.

Somit erhalten wir unmittelbar (2.80), indem wir die Dreiecksungleichung sowie (2.98) und (2.99) verwenden.

Abschließend zeigen wir noch, dass $u(t)$ für $t \in [L, T]$ genau zwei einfache Nullstellen besitzt, wobei wir L und somit l_0 ggf. von vornherein noch größer wählen müssen. Da bereits $L \geq L_2 \geq L_1$ und dementsprechend

$$\frac{l_0}{2} \geq \frac{L_1}{C_1} \underset{(2.64)}{\geq} \max\{\widehat{l}_5, \widehat{l}_6\}$$

gelten, ist es unser Ziel, die Behauptung mit den Lemmata 2.2.10 und 2.2.11 zu zeigen. Zu Beginn seien die Parameter $\sigma > 0$ aus Lemma 2.2.10 und $\mu_0 > 0$ aus Lemma 2.2.11 gegeben. Dann erhalten wir mit einer ähnlichen Abschätzung wie in (2.74)

$$\begin{aligned} \overline{\mathcal{E}}(t) &\leq \mathcal{E}(t) + |E_L(w(t)) - E_L(\overline{w})| \lesssim \mathcal{E}(t) + e^{-\frac{\sqrt{G''(1)}}{2} l_0} l_0 \\ &\underset{(2.59)}{\lesssim} \frac{V_0^2 + 1}{t^{\frac{1}{2}}} + e^{-\frac{\sqrt{G''(1)}}{2} l_0} l_0 \leq \frac{C_V^2 + 1}{L^{\frac{1}{2}}} + e^{-\frac{\sqrt{G''(1)}}{2} l_0} l_0 \end{aligned}$$

für alle $t \in [L, T]$, sodass wir für jedes $\mu \in (0, \mu_0]$ ein $L_\mu \geq L_2$ finden können, sodass sich für von vornherein festgelegte $L \geq L_\mu$ und $l_0 \geq \frac{2L}{C_1}$ die Abschätzung

$$\max_{t \in [L,T]} \Big(\max\{\overline{\mathcal{E}}(t), \mathcal{E}(t)\} \Big) \leq \mu$$

und nach Lemma 2.2.11 somit

$$\max_{t \in [L,T]} D(t) \lesssim \mu$$

ergibt. Dabei sei die Konstante in der letzten Abschätzung durch $C > 0$ gegeben. Nun wählen wir $\mu \in (0, \mu_0]$ so klein, dass

$$\max\{C, 1\}\mu \leq \frac{\sigma}{2}$$

gilt. Dazu existiert dann eine hinreichend große Konstante $L_3 := L_\mu \geq L_2$, sodass wir für von vornherein festgelegte $L \geq L_3$ und $l_0 \geq \frac{2L}{C_1}$ die Abschätzung

$$\max_{t \in [L,T]} \Big(\max\{\overline{\mathcal{E}}(t), \mathcal{E}(t)\} \Big) \leq \mu \leq \frac{\sigma}{2}$$

und nach Lemma 2.2.11 somit

$$\max_{t \in [L,T]} D(t) \leq C\mu \leq \frac{\sigma}{2}$$

erhalten. Die letzten beiden Ungleichungen implizieren dann insbesondere

$$\mathcal{E}(t) + D(t) \leq \sigma$$

für alle $t \in [L, T]$, sodass $u(t)$ nach Lemma 2.2.10 für alle $t \in [L, T]$ genau zwei einfache Nullstellen besitzt.

Schließlich wählen wir $\widehat{L}_1 := L_3$. □

Zum Abschluss des Kapitels stellen wir noch kurz einen Zusammenhang zwischen Funktionen $u \in \mathcal{M}_{2,\mathfrak{m}}(l, C_H, C_E)$ für $\mathfrak{m} \in (-1, 1)$, $C_H, C_E > 0$ und $l \gg 1$ und den Minimierern von (1.10) für $L \gg 1$ her: Zunächst beobachten wir, dass $u \in \mathcal{A}_{L,\mathfrak{m}}$ gilt, wobei die Menge $\mathcal{A}_{L,\mathfrak{m}}$ in Definition 1.0.5 eingeführt wurde. Sei nun $\tilde{w}_L$ ein beliebiger Minimierer von (1.10), wie z.B. w_L aus Definition 1.1.2. Dann gilt

$$E_L(u) \geq E_L(\tilde{w}_L).$$

Nun wollen wir hier skizzenhaft Abschätzungen für die Energie-Differenz $\tilde{\mathcal{E}}(u) := E_L(u) - E_L(\tilde{w}_L)$ - ggf. mit weiteren Anforderungen an $\tilde{w}_L$ - herleiten. Als Inspiration dafür dienen die Abschätzungen (2.49), wobei wir die Beweisidee übernehmen können: Zum Einen erhalten wir völlig analog zu [6, (3.37)] die Abschätzungen

$$\tilde{\mathcal{E}}(u) \lesssim_{C_E} \|u - \tilde{w}_L\|^2_{H^1}, \tag{2.108}$$

wenn wir in [6, (3.37)] bei der zweiten Gleichheit beachten, dass $u(-L) = u(L)$ sowie $\tilde{w}_L^{(k)}(-L) = \tilde{w}_L^{(k)}(L)$ für $k \in \{0, 1\}$ wie in Lemma 1.1.3 (iii) gelten, und bei der dritten Gleichheit die Euler-Lagrange-Langrange wie in (1.15) sowie $⨍_{-L}^{L} u - \tilde{w}_L \,\mathrm{d}x = 0$ verwenden.
Zum Anderen sei w_L^* die H^1-Projektion von u auf die Menge der Minimierer von (1.10), die wiederum ein solcher Minimierer ist, denn insbesondere aufgrund der Einbettung (1.5) ist die Menge $\mathcal{A}_{L,\mathfrak{m}} \subseteq H^1$ bzgl. der H^1-Norm abgeschlossen und $E_L : (H^1, \|\cdot\|_{H^1}) \to (\mathbb{R}, |\cdot|)$ ist stetig. Dann ergibt sich ähnlich wie im [6, Proof of (2.1) of Lemma 2.1] mit der Wahl $\tilde{w}_L := w_L^*$ ebenfalls die untere Abschätzung

$$\|u - w_L^*\|^2_{H^1} \lesssim_{C_H, C_E} \tilde{\mathcal{E}}(u). \tag{2.109}$$

Dies folgt im Wesentlichen aus der Kombination von der Abschätzung (2.108) mit Folgendem:

- Es werden Analoga von [6, Lemma 3.7 und Lemma 3.8] mit w_L^* statt v gebraucht, die die gewünschte Ungleichung für kleine bzw. große Energie-Differenzen $\tilde{\mathcal{E}}(u)$ liefern. Dabei verläuft der Beweis von Letzterem ganz genauso, während die Anpassung des Beweises von Ersterem komplizierter und aufwendiger ist. Denn dafür benötigen wir insbesondere zum Einen eine ähnliche linearisierte Abschätzung wie in [6, Lemma 3.5] für $f = u - w_L^*$ und w_L^* statt v und zum Anderen ein Approximationsresultat wie in [6, Lemma 3.6] mit w_L^* statt $\mp v$.

- Seien $\overline{w}$ das zu u gehörige vorzeichen-wechselnde energie-optimale Profil wie in Lemma 2.2.5 und $\overline{w}_L^*$ die H^1-Projektion von $\overline{w}$ auf die Menge der Minimierer von (1.10). Dann gilt aufgrund von $⨍_{-L}^{L} \overline{w}_L^* \, dx = ⨍_{-L}^{L} \overline{w} \, dx = \mathfrak{m}$ und deren Minimierungseigenschaften sicherlich $\|\overline{w} - \overline{w}_L^*\|_{H^1}^2 \lesssim 1$ und zusammen mit den Projektionseigenschaften somit

$$\begin{aligned} \|u - w_L^*\|_{L^2}^2 &\leq \|u - w_L^*\|_{H^1}^2 \leq \|u - \overline{w}_L^*\|_{H^1}^2 \lesssim \|u - \overline{w}\|_{H^1}^2 + \|\overline{w} - \overline{w}_L^*\|_{H^1}^2 \\ &\lesssim \|u - \overline{w}\|_{L^2}^2 + \|u_x\|_{L^2}^2 + \|\overline{w}_x\|_{L^2}^2 + 1 \\ &\underset{(2.6)}{\lesssim} \|u - \overline{w}\|_{\dot{H}^{-1}} (\|u_x\|_{L^2} + \|\overline{w}_x\|_{L^2}) + E_L(u) + E_L(\overline{w}) + 1 \\ &\lesssim \|u - \overline{w}\|_{\dot{H}^{-1}} \left(E_L^{\frac{1}{2}}(u) + E_L^{\frac{1}{2}}(\overline{w}) \right) + E_L(u) + E_L(\overline{w}) + 1 \\ &\lesssim_{C_H, C_E} 1. \end{aligned}$$

Als Anwendung von (2.108) und (2.109) sei z.B. die Situation von Satz (2.3.1) gegeben. Ferner seien $w_L^*(t)$ die H^1-Projektion von $u(t)$ auf die Menge der Minimierer von (1.10) und dazu sei $\tilde{\mathcal{E}}(t) := \tilde{\mathcal{E}}(u(t))$ mit der Wahl $\tilde{w}_L(t) := w_L^*(t)$ für $t \geq 0$, $L \gg 1$ und $l_0 \geq \frac{2L}{C_1}$ definiert. So erhalten wir die Abschätzung

$$\|u(t) - w_L^*(t)\|_{H^1}^2 \underset{(2.109)}{\lesssim} \tilde{\mathcal{E}}(t) \underset{(2.108)}{\lesssim} \|u(t) - w_L^*(t)\|_{H^1}^2 \tag{2.110}$$

für alle $t \in [0, T]$.
Damit können wir nun einen kleinen Ausblick geben: Wenn man zeigen kann, dass (2.110) für alle $t \geq 0$ und $\tilde{\mathcal{E}}(t) \to 0$ für $t \to \infty$ gelten sowie eine Funktion $w_L^* \in H^1$ mit $w_L^*(t) \to w_L^*$ für $t \to \infty$ in H^1 existiert, folgt schließlich

$$u(t) \xrightarrow[t \to \infty]{} w_L^* \quad \text{in } H^1.$$

Dabei ist w_L^* ebenfalls ein Minimierer von (1.10), da die Menge $\mathcal{A}_{L,\mathfrak{m}} \subseteq H^1$ bzgl. der H^1-Norm abgeschlossen und $E_L : (H^1, \|\cdot\|_{H^1}) \to (\mathbb{R}, |\cdot|)$ stetig ist.

A Anhang

An dieser Stelle führen wir einige sonstige Bezeichnungen und Ergebnisse an, die wir in Kapitel 1 und 2 benutzt haben, wobei wir hier auf Beweise verzichten, da die Resultate hinreichend bekannt sind:

Definition A.0.1. (Lebesgue-Punkt)
Seien $n \in \mathbb{N}$, $\emptyset \neq \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $q \in [1, \infty]$. Dann bezeichnet man einen Punkt $x_0 \in \Omega$ als Lebesgue-Punkt *der Funktion $u \in L^q_{loc}(\Omega)$, falls*

$$\lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{\mathcal{L}^n(B_\epsilon(x_0))} \int\limits_{B_\epsilon(x_0)} |u(x) - u(x_0)| \, \mathrm{d}x = 0$$

gilt, wobei $\mathcal{L}^n$ das Lebesgue-Maß auf dem $\mathbb{R}^n$ sei.

Lemma A.0.2. (Dichtheit der Lebesgue-Punkte)
Seien $n \in \mathbb{N}$, $\emptyset \neq \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $q \in [1, \infty]$ und $u \in L^q_{loc}(\Omega)$. Dann sind $\mathcal{L}^n$-fast alle Punkte aus Ω Lebesgue-Punkte von u, d.h. die Lebesgue-Punkte von u liegen dicht in Ω.

Lemma A.0.3. (Fundamentallemma von DuBois-Reymond)
Seien $-\infty \leq a < b \leq \infty$ und $f \in L^1_{loc}\big((a,b)\big)$ mit

$$\int\limits_a^b f(x)\phi(x) \, \mathrm{d}x = 0$$

für alle $\phi \in C_c^\infty\big((a,b)\big)$ mit $\int_a^b \phi \, \mathrm{d}x = 0$, dann existiert eine Konstante $C \in \mathbb{R}$, sodass $f(x) = C$ für fast alle $x \in (a,b)$ gilt.

Literaturverzeichnis

[1] Lia Bronsard, Robert V. Kohn. On the slowness of phase boundary motion in one space dimension. Comm. Pure Appl. Math. 43 (8) (1990), S. 983-997
URL: https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/cpa.3160430804

[2] Xinfu Chen. Generation, propagation, and annihilation of metastable patterns. J. Differential Equations 206 (2) (2004), S. 399-437
URL: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022039604002025?via%3Dihub

[3] Wadim Gerner. Metastability of the 1-d Cahn-Hilliard equation for well-prepared initial data. Masterarbeit. Lehrstuhl für angewandte Analysis, RWTH Aachen, 2016

[4] Felix Otto, Maria G. Reznikoff. Slow motion of gradient flows. J. Differential Equations 237 (2) (2007), S. 372-420
URL: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022039607000824?via%3Dihub

[5] Felix Otto, Sebastian Scholtes, Maria G. Westdickenberg. Optimal L^1-type relaxation rates for the Cahn-Hilliard equation on the line. SIAM J. Math. Anal. 51 (6) (2019), S. 4645-4682
URL: https://arxiv.org/abs/1705.10985

[6] Sebastian Scholtes, Maria G. Westdickenberg. Metastability of the Cahn-Hilliard equation in one space dimension. J. Differential Equations 265 (2018), S. 1528-1575
URL: https://arxiv.org/abs/1705.10985