Rheinisch-Westfälische Technische
Hochschule Aachen

Institut für Mathematik

Die Bewertung von Optionen in Theorie und Praxis

Seminararbeit

Marvin Markert
Matrikelnummer: 380953

Betreuung:
Prof. Dr. Maier-Paape

2. September 2021

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung **2**

2 Grundlagen **2**
2.1 Optionen 2
2.2 Stochastische Grundlagen 3

3 Black-Scholes-Modell **4**
3.1 Annahmen 4
3.2 Black-Scholes-Differentialgleichung 5
3.3 Preisformeln für europäische Optionen 7
3.4 Kritik & Praxis 8

4 Der VIX **10**

5 Fazit **12**

1 Einleitung

Die vorliegende Arbeit hat die Bewertung von Optionen in Theorie und Praxis zum Thema, welche täglich an Finanzmärkten Anwendung findet.
Zunächst wird in Kapitel 2 der Begriff „Option“ gemäß seiner Verwendung im Finanzwesen definiert. Anschließend werden Grundlagen aus der Stochastik, die für die folgenden Kapitel benötigt werden, dargelegt. In einem nächsten Schritt wird das Black-Scholes-Modell (Kapitel 3) eingeführt und vorgestellt, das zur Bestimmung des fairen Preises einer Option genutzt werden kann. Dabei wird die Black-Scholes-Differentialgleichung hergeleitet und auf europäische Optionen angewendet. Im Anschluss wird kurz auf Kritik am Modell eingegangen und betrachtet, ob und wie das Modell Anwendung in der Praxis findet. In Kapitel 4 wird schließlich die Berechnung des VIX, des sogenannten Volatilitätsindex der Chicago Board Options Exchange, dargelegt.
Als Grundlage dieser Ausarbeitung dienen die Kapitel 3 und 4 der Masterarbeit von Philipp Kalte [4], die ebenfalls die Bewertung von Optionen in Theorie und Praxis thematisiert.
Damit der vorgegebene Umfang dieser Arbeit nicht überschritten wird, werden an diversen Stellen Aussagen und Beweise nicht im Detail dargestellt, sondern es wird in diesen Fällen auf Literatur verwiesen, in der diese Themen detaillierter erläutert werden.

2 Grundlagen

Dieses Kapitel dient als Grundlage für die folgenden Kapitel. In Abschnitt 2.1 wird der Begriff einer „Option“ im Finanzwesen erklärt. Anschließend werden in Abschnitt 2.2 die benötigten stochastischen Grundlagen eingeführt.

2.1 Optionen

Zu Beginn stellt sich die Frage, was man unter einer Option im Finanzwesen versteht.
Eine Option ist ein Vertrag, der dem Käufer der Option ein Recht (aber nicht die Verpflichtung) zusichert, einen bestimmten Basiswert zu einem bestimmten Zeitpunkt zu kaufen oder zu verkaufen.
Bei einem Basiswert kann es sich um eine Aktie, eine Anleihe, Rohstoffe oder andere Finanzprodukte und Waren handeln. Es gibt sogenannte Kaufoptionen (Englisch *Call*) und Verkaufsoptionen (Englisch *Put*).
Außerdem unterscheidet man bei Ausübungsarten hauptsächlich europäische und amerikanische Optionen. Bei einer europäischen Option gibt es einen Stichtag, an dem die Option ausgeführt wird oder nicht. Bei einer amerikanischen hingegen gibt es für diese Aktion einen Ausübungszeitraum, von einem gewissen Tag bis zum Stichtag.
Zunächst benötigt man für den Kauf einer Option einen Basiswert und anschließend einen Basispreis, zu dem der Basiswert gekauft oder verkauft werden darf. Darüber hinaus müssen die Laufzeit der Option und die Optionsprämie - der Preis, den der Käufer zahlen muss, um sich das Recht zu kaufen oder zu verkaufen zu sichern - bestimmt werden.
Im Jahr 1973 stellten Black und Scholes [1] eine Methode zur Bewertung von Optionen vor, für die sie im Jahr 1997 den Wirtschaftsnobelpreis erhielten [2, S. 319]. Diese wird im Folgenden vorgestellt.

2.2 Stochastische Grundlagen

Zunächst werden stochastische Prozesse eingeführt [6, S. 268].

Definition 1 (Stochastischer Prozess)**.** *Sei $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, $(S, \mathcal{S})$ ein Messraum und $I \subset [0, \infty)$ eine Indexmenge. Dann heißt eine Familie $X = (X_t)_{t \in I}$ messbarer Abbildungen*

$$X_t : \Omega \mapsto S, \qquad t \in I,$$

stochastischer Prozess (mit Zustandsraum S).

Nun wird ein spezieller stochastischer Prozess definiert, der im Folgenden Anwendung findet [4, S. 29].

Definition 2 (Brownsche Bewegung)**.** *Sei $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $(B_t)_{t \geq 0}$ ein stochastischer Prozess, der die folgenden Eigenschaften erfüllt:*

1. *$B_0 = 0$ P-f.s.*
2. *Für jede endliche Auswahl von $0 \leq t_0 < t_1 < ... < t_n$ sind die Inkremente*

   $$B_{t_1} - B_{t_0}, ..., B_{t_n} - B_{t_{n-1}}$$

   stochastisch unabhängig.
3. *Es ist $B_t - B_s \sim \mathcal{N}(0, t - s)$ für alle $0 \leq s < t$.*
4. *Die Pfade von $(B_t)_{t \geq 0}$ sind P-f.s. stetig.*

Dann heißt $(B_t)_{t \geq 0}$ (Standard-)Brownsche Bewegung.

Für das weitere Vorgehen, wird auf die Thematik der stochastischen Integration nach Itō zurückgegriffen. Diese wird beispielsweise in Kapitel 3 in „Stochastic Differential Equations“ von Bernt Øksendal [7] erläutert. In Kapitel 5 wird dort auf den Begriff der stochastischen Differentialgleichung eingegangen:
Für gegebene Funktionen a und b wird die stochastische Integralgleichung

$$X_t = X_0 + \int_0^t a(X_s, s)ds + \int_0^t b(X_s, s)dB_s \tag{1}$$

durch Einführung der Differentialschreibweise

$$dX_t = a(X_t, t)dt + b(X_t, t)dB_t$$

zur stochastischen Differentialgleichung. Hierbei bezeichnet in (1) das erste Integral ein Lebesgue-Integral und das zweite ein Itō-Integral. Es wird also ein Prozess X_t gesucht der die Integralgleichung (1) erfüllt.
Ein Itō-Prozess ist ein stochastischer Prozess X_t auf $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ der Form

$$X_t = X_0 + \int_0^t u(X_s, s)ds + \int_0^t v(X_s, s)dB_s,$$

wobei u und v gewisse Eigenschaften erfüllen müssen, die in Øksendal [7, S. 44] erläutert werden, aber hier aus Umfangs-Gründen nicht aufgeführt werden. Damit folgt nun die Itō-Formel [7, Thm. 4.1.2], welche im weiteren Verlauf benötigt wird.

Satz 1 (Itō-Formel)**.** *Sei X_t ein durch*

$$dX_t = udt + vdB_t$$

gegebener Itō-Prozess. Sei $f(x,t) \in C^2(\mathbb{R} \times [0,\infty))$. Dann ist

$$Y_t := f(X_t, t), \quad t \geq 0,$$

wieder ein Itō-Prozess und es gilt

$$dY_t = \frac{\partial f}{\partial t}(X_t,t)dt + \frac{\partial f}{\partial x}(X_t,t)dX_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(X_t,t)(dX_t)^2,$$

wobei $(dX_t)^2 = dX_t \cdot dX_t$ nach den Regeln

$$dt \cdot dt = dt \cdot dB_t = dB_t \cdot dt = 0, \quad dB_t \cdot dB_t = dt$$

berechnet wird.

3 Black-Scholes-Modell

In diesem Kapitel wird auf das Black-Scholes-Modell eingegangen, mit welchem man den fairen Preis einer Option bestimmen kann.

3.1 Annahmen

Im Black-Scholes-Modell wird angenommen, dass der Markt eine risikolose Anlagemöglichkeit, in Form eines verzinsten Bankkontos $(R_t)_{t\geq 0}$, bildet. Legt man $R_0 \in \mathbb{R}$ für einen Zeitraum $t \geq 0$ an, so erhält man $R_0 e^{rt}$ zurück, wobei $r \geq 0$ die konstante Zinsrate bezeichne. Demnach soll

$$dR_t = rR_t dt, \quad t \geq 0,$$

erfüllt sein.
Darüber hinaus, soll am Markt eine Aktie gehandelt werden, deren Preisprozess durch

$$S_t = S_0 \exp\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma B_t\right), \quad t \geq 0,$$

mit $S_0, \sigma > 0$ und $\mu \in \mathbb{R}$, modelliert wird [6, S. 397]. Dabei beschreibt der Parameter μ die erwartete Rendite und σ die Volatilität [2, S. 320].
Nun sei

$$X_t := \log(S_t) = \log(S_0) + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma B_t, \quad t \geq 0.$$

Daraus erhält man die Differentialschreibweise

$$dX_t = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)dt + \sigma dB_t, \quad t \geq 0.$$

Wählt man $f : \mathbb{R} \times [0, \infty) \to \mathbb{R}, (x, t) \mapsto \exp(x)$, so ist $S_t = f(X_t, t)$ und mit der Itō-Formel erhält man

$$\begin{aligned}
dS_t &= \frac{\partial f}{\partial t}(X_t, t)dt + \frac{\partial f}{\partial x}(X_t, t)dX_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(X_t, t)(dX_t)^2 \\
&= e^{X_t} dX_t + \frac{1}{2} e^{X_t} (dX_t)^2 \\
&= S_t \left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) dt + \sigma dB_t \right) + \frac{1}{2} S_t \left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) dt + \sigma dB_t \right)^2 \\
&= S_t \left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) dt + \sigma dB_t \right) + \frac{1}{2} S_t \left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right)^2 (dt)^2 + 2 \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) \sigma (dt)(dB_t) + \sigma^2 (dB_t)^2 \right) \\
&= S_t \left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) dt + \sigma dB_t \right) + \frac{1}{2} S_t \sigma^2 dt \\
&= \mu S_t dt + \sigma S_t dB_t .
\end{aligned}$$

Somit wurde die Differentialschreibweise für S_t berechnet.
Des Weiteren werden folgende Annahmen bezüglich des Marktes getroffen [8, Abschn. 8.1.1], [4, S.31]:

- Das Angebot ist genauso hoch wie die Nachfrage.
- Es existiert keine Arbitrage-Möglichkeit.
- Jedem Akteur stehen sämtliche Marktinformationen ohne Zeitverzögerung zur Verfügung.
- Die Kurse aller Wertpapiere passen sich unverzüglich jedweden relevanten neuen Informationen an.
- Zu jedem Zeitpunkt lassen sich Wertpapiere in beliebigen Mengen (auch fraktionale Anteile) kaufen.
- Es gibt keine Transaktionskosten und keine Geld-Brief-Spanne.
- Es müssen keinerlei Steuern gezahlt werden.
- Zu jeder Zeit lassen sich beliebig hohe Geldbeträge zum festen Zinssatz r leihen oder risikolos anlegen.
- Leerkäufe sind uneingeschränkt möglich.

3.2 Black-Scholes-Differentialgleichung

Der faire Preis einer Option kann durch das Lösen der Black-Scholes-Differentialgleichung, welche in diesem Abschnitt hergeleitet werden wird, bestimmt werden [8, S. 383]. Dabei ist der faire Preis eines Finanzguts derjenige, mit dem am Markt keine Arbitrage-Möglichkeit besteht.
Bei der Herleitung der Differentialgleichung wird sich am Vorgehen von Steele [9, Abschn. 10.2] orientiert.
Wie bei den Annahmen schon eingeführt, bezeichne S_t den Preis einer Aktie zum Zeitpunkt

t und R_t den Preis des mit r verzinsten risikolosen Bonds zum Zeitpunkt t. Die Idee im Folgenden lautet, ein dynamisches Portfolio zu erzeugen, welches aus der Aktie und dem Bond besteht und kontinuierliche Umschichtungen zulässt.
Es gebe $a_t \in \mathbb{R},\ t \in [0,T]$ die Anzahl an Aktien, die zum Zeitpunkt t gehalten werden, an und $b_t \in \mathbb{R},\ t \in [0,T]$, die Anzahl der Bonds zum Zeitpunkt t. Der Wert des Portfolios zum Zeitpunkt t ist dann

$$V_t = a_t S_t + b_t R_t. \tag{2}$$

Das Portfolio wird zum Zeitpunkt 0 durch V_0 gebildet. Anschließend darf es im Zeitraum $(0,T]$ keine positiven oder negativen Entnahmen geben, damit der faire Preis der Option korrekt bestimmt werden kann. Das heißt, Umschichtungen dürfen nur zwischen Aktien und Bonds stattfinden. Die sogenannte Selbst-Finanzierungsbedingung

$$\begin{aligned}
&a_t S_{t+dt} + b_t R_{t+dt} = a_{t+dt} S_{t+dt} + b_{t+dt} R_{t+dt} \\
&\Leftrightarrow (a_{t+dt} S_{t+dt} + b_{t+dt} R_{t+dt}) - (a_t S_t + b_t R_t) = a_t dS_t + b_t dR_t \\
&\Leftrightarrow V_{t+dt} - V_t = a_t dS_t + b_t dR_t \\
&\Leftrightarrow dV_t = a_t dS_t + b_t dR_t
\end{aligned}$$

liefert eine stochastische Differentialgleichung. Wie im ersten Abschnitt schon gezeigt, gilt

- $dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dB_t$ und
- $dR_t = r R_t dt$.

Damit erhält man

$$\begin{aligned}
dV_t &= a_t dS_t + b_t dR_t \\
&= a_t(\mu S_t dt + \sigma S_t dB_t) + b_t(r R_t dt) \\
&= (a_t \mu S_t + b_t r R_t) dt + a_t \sigma S_t dB_t.
\end{aligned} \tag{3}$$

Eine zweite stochastische Differentialgleichung für V_t kann durch die Itō-Formel erhalten werden. Dazu wählt man $f(S_t,t) := V_t$, $u(S_t,t) := \mu S_t$ und $v(S_t,t) := \sigma S_t$:

$$\begin{aligned}
dV_t &= \frac{\partial f}{\partial t}(S_t,t)dt + \frac{\partial f}{\partial x}(S_t,t)dS_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(S_t,t)(dS_t)^2 \\
&= \frac{\partial f}{\partial t}(S_t,t)dt + \frac{\partial f}{\partial x}(S_t,t)(\mu S_t dt + \sigma S_t dB_t) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(S_t,t)(\mu S_t dt + \sigma S_t dB_t)^2 \\
&= \left(\frac{\partial f}{\partial t}(S_t,t) + \mu S_t \frac{\partial f}{\partial x}(S_t,t) + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(S_t,t)\right) dt + \sigma S_t \frac{\partial f}{\partial x}(S_t,t) dB_t.
\end{aligned} \tag{4}$$

Vergleicht man nun die Koeffizienten von dB_t in (3) und (4), so stellt man fest, dass

$$a_t \sigma S_t = \sigma S_t \frac{\partial f}{\partial x}(S_t,t) \Leftrightarrow a_t = \frac{\partial f}{\partial x}(S_t,t). \tag{5}$$

Ein Vergleich der Koeffizienten von dt liefert

$$\begin{aligned}
&a_t \mu S_t + b_t r R_t = \frac{\partial f}{\partial t}(S_t,t) + \mu S_t \frac{\partial f}{\partial x}(S_t,t) + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(S_t,t) \\
&\Leftrightarrow b_t r R_t = \frac{\partial f}{\partial t}(S_t,t) + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(S_t,t).
\end{aligned} \tag{6}$$

Setzt man nun die Darstellungen von a_t und $b_t r R_t$ in $rf(S_t,t)$ ein, erhält man

$$rf(S_t,t) \overset{(2)}{=} r(a_t S_t + b_t R_t) \overset{(5),(6)}{=} rS_t \frac{\partial f}{\partial x}(S_t,t) + \frac{\partial f}{\partial t}(S_t,t) + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(S_t,t).$$

Dies ist äquivalent zu

$$\frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(S_t,t) + rS_t \frac{\partial f}{\partial x}(S_t,t) + \frac{\partial f}{\partial t}(S_t,t) - rf(S_t,t) = 0. \tag{7}$$

Da $(S_t)_{t\in[0,T]}$ ein stochastischer Prozess und zufällig ist, handelt es sich bei (7) nicht um eine deterministische partielle Differentialgleichung. Allerdings kann S_t nur positive Werte annehmen und lässt sich durch x ersetzten, wodurch man ein partielle Differentialgleichung

$$\frac{1}{2}\sigma^2 x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t) + rx \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) + \frac{\partial f}{\partial t}(x,t) - rf(x,t) = 0 \tag{8}$$

für $0 < x < \infty$ und $0 < t < T$, erhält [8, S. 391]. Die Gleichung in (8) wird als Black-Scholes-Differentialgleichung bezeichnet. Es handelt sich um eine parabolische partielle Differenzialgleichung, welche sich eindeutig lösen lässt, falls $f(x,T)$, $f(0,t)$ und das Wachstumsverhalten von $f(x,t)$ für $x \to \infty$ für $t \in (0,T)$ gegeben sind [8, S. 391].

3.3 Preisformeln für europäische Optionen

In diesem Abschnitt werden Preisformeln für den fairen Preis von europäischen Optionen ermittelt und vorgestellt.
Dazu bezeichne $C_t^E(S_t)$ den fairen Preis eines europäischen Calls mit Basispreis $K > 0$ zum Zeitpunkt $t \in [0,T]$ in Abhängigkeit des Aktienkurses S_t. Analog bezeichne $P_t^E(S_t)$ den fairen Preis eines europäischen Puts.
Für einen europäischen Call lautet die Black-Scholes-Differentialgleichung

$$\frac{1}{2}\sigma^2 x^2 \frac{\partial^2 C^E}{\partial x^2}(x,t) + rx \frac{\partial C^E}{\partial x}(x,t) + \frac{\partial C^E}{\partial t}(x,t) - rC^E(x,t) = 0.$$

Für den Preis des Calls müssen drei Bedingungen erfüllt sein [4, S. 33f.]:

1. $C_T^E(x) = (x-K)^+ := \max\{x-K, 0\} \quad \forall x > 0$
2. $\lim_{x\to 0} C_t^E(x) = 0 \quad \forall t \in [0,T]$
3. $C_t^E(x)$ und x haben für $x \to \infty$ das selbe asymptotische Wachstum

Bedingung 1. bedeutet, dass der faire Preis des Calls am Ende der Laufzeit seinem Auszahlungsprofil entspricht. Bedingung 2. besagt, dass, wenn der Aktienkurs gegen 0 geht, so ist das auch für den fairen Preis des Calls der Fall.
Um die 3. Bedingung zu verstehen, benötigt man den Begriff der Put-Call-Parität [8, S. 368]. Da im Black-Scholes-Modell keine Dividende gezahlt wird, liefert die Put-Call-Parität für alle $x > 0$

$$C_t^E(x) - x = P_t^E(x) - Ke^{-r(T-t)}, \quad t \in [0,T]. \tag{9}$$

Da der Wert des Puts gegen 0 geht, wenn der Aktienkurs unaufhörlich steigt, liefert die Bildung des Limes auf beiden Seiten der Gleichung (9)

$$\lim_{x\to\infty}(C_t^E(x) - x) = -Ke^{-r(T-t)} \quad \forall t \in [0,T],$$

was die dritte Bedingung erläutert.
Da diese drei Bedingungen gelten, existiert eine eindeutige Lösung der Black-Scholes-Differentialgleichung. Die Lösung lautet [4, S. 34]

$$C_t^E(x) = x\Phi(d_1) - Ke^{-r(T-t)}\Phi(d_2), \quad x > 0, \tag{10}$$

mit

$$\begin{aligned} d_1 &:= \frac{\log(x/K) + (r+\sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}, \\ d_2 &:= d_1 - \sigma\sqrt{T-t}, \end{aligned}$$

und Φ bezeichne die Verteilungsfunktion der Standard-Normalverteilung.
Mit (9) lässt sich die Preisformel für den fairen Preis eines europäischen Puts bestimmen:

$$\begin{aligned} &C_t^E(x) - x = P_t^E(x) - Ke^{-r(T-t)} \\ &\Leftrightarrow x\Phi(d_1) - Ke^{-r(T-t)}\Phi(d_2) - x = P_t^E(x) - Ke^{-r(T-t)} \\ &\Leftrightarrow P_t^E(x) = (1-\Phi(d_2))Ke^{-r(T-t)} - (1-\Phi(d_1))x \\ &\Leftrightarrow P_t^E(x) = \Phi(-d_2)Ke^{-r(T-t)} - \Phi(-d_1)x. \end{aligned} \tag{11}$$

Wenn man die beiden Preisformeln (10) und (11) genauer betrachtet, fällt auf, dass sie nicht vom Drift-Parameter μ abhängen. Dies besagt, dass zum Zeitpunkt 0 zwei Optionen, welche den gleichen Basispreis K und Verfallstermin T haben, gleich viel Wert sind, auch wenn ihr Drift unterschiedlich ist. Genaueres dazu ist in Kalte [4, S. 38] zu finden.

3.4 Kritik & Praxis

In diesem Abschnitt wird kurz auf Kritik am Black-Scholes-Modell und seiner Anwendung in der Praxis eingegangen.
In den vorherigen Abschnitten wurde $S_t = S_0 \exp\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma B_t\right)$ angenommen, also, dass $\log(S_t)$ normalverteilt ist. Dies trifft in der Realität aber nicht zu, da am Beispiel logarithmierter Tagesrenditen [4, Abschn. 3.6], [5] Ereignisse in der unmittelbaren Umgebung des Erwartungswertes häufiger vorkommen als bei der Normalverteilung. Ebenfalls unterschätzt die Normalverteilung extremere Ausgänge, die in der Realität mit einer vergleichsweise höheren Wahrscheinlichkeit auftreten. Darüber hinaus ist bei logarithmierten Tagesrenditen der Erwartungswert leicht positiv, was vermutlich der Inflation geschuldet ist. Demnach sind die Wölbung und die Schiefe der Normalverteilung nicht realistisch, wie in Abbildung 1 zu sehen ist. Dabei ist die Volatilität von 22,4% die tatsächliche mittlere jährliche Volatilität und die 15,8% ein Versuch, das Histogramm besser zu approximieren.
Des Weiteren wird im Black-Scholes-Modell die Volatilität als konstant angesehen. Dass dies realitätsfern ist, stellte Black selber schon 1976 fest [4, S. 50]. Er bemerkte, dass sich bei steigenden Aktienkursen die Volatilität verringert und bei fallenden Aktienkursen erhöht.

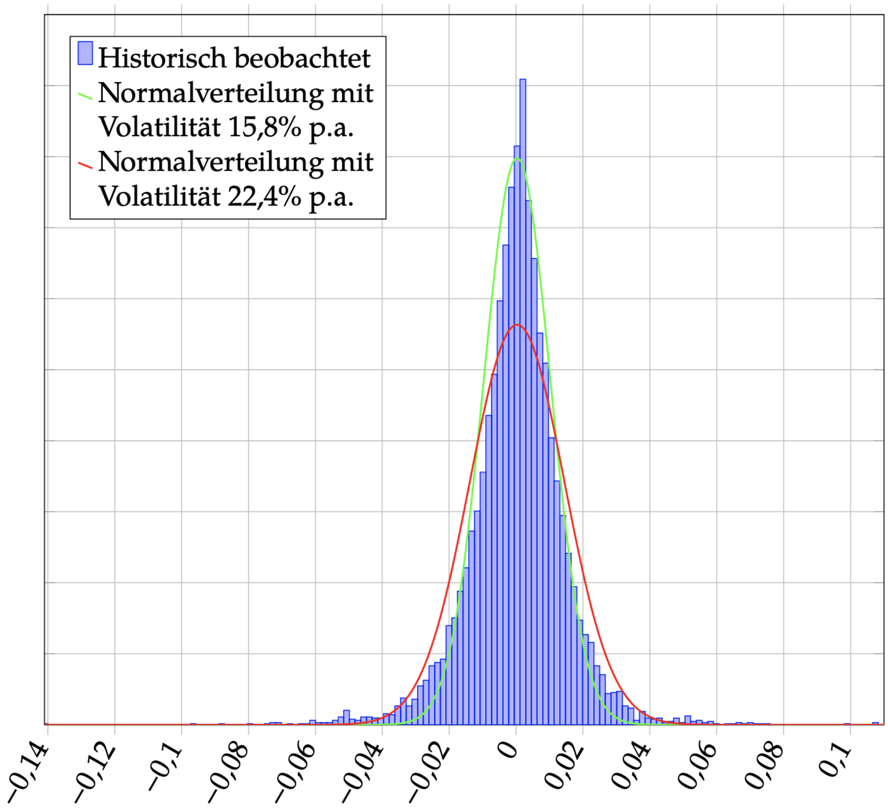

Abb. 1: Histogramm der logarithmierten Tagesrenditen des DAX zwischen 01.01.1988 und 15.09.2017. [4, Abb. 3.7]

Preisformeln, welche die Volatilität als konstant annehmen, müssen daher falsch sein.
Ebenfalls wird im Modell angenommen, dass die Inkremente von $(S_t)_{t\geq 0}$ stochastisch unabhängig sind. Dies würde bedeuten, dass der bisherige Kursverlauf keinen Einfluss auf künftige Bewegungen haben würde. In der Praxis bilden Aktienmärkte aber häufig Auf- und Abwärtstrends.
Darüber hinaus werden ein konstanter Zinssatz zum Leihen und Verleihen und pausenloser Handel auch fraktionaler Wertpapiere mit unbegrenzter Liquidität ohne Transaktionskosten oder Spread angenommen, welche nicht der Realität entsprechen.
Alles in allem werden trotzdem einige der genannten Punkte akzeptiert, da so eine Entwicklung von Modellen überhaupt erst möglich ist.

Weiterhin stellt sich die Frage, ob die Preisformeln (10) und (11) Anwendung in der Praxis finden.
$C_t^E(S_t)$ und $P_t^E(S_t)$ sind streng monoton wachsend in σ. Es ist möglich, eindeutig auf das σ, mit dem der faire Preis der Option im Black-Scholes-Modell dem realen Preis entspricht, zu schließen, wenn die preisbeeinflussende Faktoren S_t, K, r, T und der Marktpreis einer europäischen Option gegeben sind. Dieses σ wird dann implizite Volatilität genannt.
In der Praxis hängt die implizite Volatilität vom Basispreis ab, im Gegensatz zum Modell, in dem K keinen Einfluss auf σ hat. Händler verwenden also die Preisformeln, bestimmen aber

σ in Abhängigkeit von K und T. Genaueres dazu lässt sich in der Masterarbeit von Philipp Kalte [4, Abschn. 3.7] finden.

4 Der VIX

Der VIX ist der Volatilitätsindex der Chicago Board Options Exchange, der seit 1993 berechnet wird. Er gibt die erwartete Schwankungsintensität des S&P 500 in den nächsten 30 Tagen in Prozentpunkten an und nutzt zur Berechnung aktuelle Optionspreise [10].
Die im Black-Scholes-Modell als konstant angenommene Volatilität lässt sich allgemeiner als stochastischer Prozess $(\sigma_t)_{t\in[0,T]}$, welcher

$$\int_0^T \sigma_t^2 dt \leq \infty, \quad \text{f.s.}$$

erfüllt, modellieren [4, S. 55]. Es sei

$$\overline{V} := \frac{1}{T}\int_0^T \sigma_t^2 dt$$

die annualisierte Varianz. Zur Berechnung des VIX benötigt man ihren risikoneutralen Erwartungswert $E^*(\overline{V})$, welcher von Hull [3] wie folgt berechnet wird.
Dabei heißt ein Wahrscheinlichkeitsmaß P^* auf $(\Omega, \mathcal{F})$ risikoneutral, falls

$$E^*(S_1) = S_0(1+r') = S_0 e^{\ln(1+r')} = S_0 e^r$$

wobei E^* den Erwartungswert bezüglich P^* und $r' \geq 0$ bzw. $r := \ln(1+r') \geq 0$ die risikolose Zinsrate bezeichnen [4, S. 13].
Unter dem risikoneutralen Wahrscheinlichkeitsmaß gelte

$$S_t = S_0 \exp\left(\left(r - \frac{\sigma_t^2}{2}\right)t + \sigma_t B_t\right).$$

Analog wie bei den Berechnungen im Black-Scholes-Modell erhält man

$$dS_t = rS_t dt + \sigma_t S_t dB_t \Leftrightarrow \frac{dS_t}{S_t} = rdt + \sigma_t dB_t \tag{12}$$

und (mit der Itō-Formel)

$$d\log S_t = \left(r - \frac{\sigma_t^2}{2}\right)dt + \sigma_t dB_t. \tag{13}$$

Durch Subtraktion der beiden Gleichungen (12) und (13) erhält man

$$\frac{dS_t}{S_t} - d\log S_t = \frac{\sigma_t^2}{2}dt.$$

Integration auf beiden Seiten von Zeit 0 bis Zeit T und einsetzen von $\overline{V}$ liefert

$$\begin{aligned}
&\int_0^T \frac{dS_t}{S_t} - \log\left(\frac{S_T}{S_0}\right) = \frac{1}{2}\int_0^T \sigma_t^2 dt \\
\Leftrightarrow\ & \overline{V} = \frac{2}{T}\left(\int_0^T \frac{dS_t}{S_t} - \log\left(\frac{S_T}{S_0}\right)\right) \\
\overset{\frac{dS_t}{S_t}=rdt+\sigma_t dB_t}{\Leftrightarrow}\ & \overline{V} = \frac{2}{T}\left(rT + \int_0^T \sigma_t dB_t - \log\left(\frac{S_T}{S_0}\right)\right).
\end{aligned}$$

Nach Øksendal [7, Thm. 3.2.1] ist $E^*\left(\int_0^T \sigma_t dB_t\right) = 0$. Demnach gilt

$$E^*(\overline{V}) = \frac{2}{T}\left(rT - E^*\left(\log\left(\frac{S_T}{S_0}\right)\right)\right) = \frac{2}{T}\left(\log\left(\frac{F_0}{S_0}\right) - E^*\left(\log\left(\frac{S_T}{S_0}\right)\right)\right) \tag{14}$$

für $F_0 := S_0 e^{rT}$. Für die weiteren Berechnungen wird ein Lemma benötigt, auf dessen Beweis hier aus Platzgründen verzichtet wird, der aber in Kalte [4, S. 56] zu finden ist.

Lemma 1. *Für alle $S' > 0$ gilt*

$$\int_0^{S'} \frac{1}{K^2}\max\{K - S_T, 0\}dK + \int_{S'}^{\infty} \frac{1}{K^2}\max\{S_T - K, 0\}dK = \log\left(\frac{S'}{S_T}\right) + \frac{S_T}{S'} - 1.$$

Durch Umstellung der Gleichung des Lemmas nach $-\log\left(\frac{S'}{S_T}\right) = \log\left(\frac{S_T}{S'}\right)$ kann man für ein beliebiges $S' > 0$ folgern, dass

$$E^*\left(\log\left(\frac{S_T}{S'}\right)\right) = \frac{F_0}{S'} - 1 - \int_0^{S'} \frac{1}{K^2}E^*\left(\max\{K - S_T, 0\}\right)dK - \int_{S'}^{\infty} \frac{1}{K^2}E^*\left(\max\{S_T - K, 0\}\right)dK,$$

da offenbar $E^*(S_T) = F_0$. Weiter gilt

$$E^*\left(\log\left(\frac{S_T}{S'}\right)\right) = \frac{F_0}{S'} - 1 - \int_0^{S'} \frac{1}{K^2}e^{rT}p(K)dK - \int_{S'}^{\infty} \frac{1}{K^2}e^{rT}c(K)dK, \tag{15}$$

wobei $c(K)$ und $p(K)$ die Preise europäischer Call- und Put-Optionen mit Basispreis K, Restlaufzeit T und risikoloser Zinsrate r sind.
Da

$$\log\left(\frac{S_T}{S_0}\right) = \log\left(\frac{S'}{S_0}\right) + \log\left(\frac{S_T}{S'}\right),$$

gilt

$$E^*\left(\log\left(\frac{S_T}{S_0}\right)\right) = \log\left(\frac{S'}{S_0}\right) + E^*\left(\log\left(\frac{S_T}{S'}\right)\right). \tag{16}$$

Setzt man nun (15) in (16) und anschließend (16) in (14) ein, so folgt

$$\begin{aligned} E^*(\overline{V}) &= \frac{2}{T}\left(\log\left(\frac{F_0}{S_0}\right) - \log\left(\frac{S'}{S_0}\right) - \frac{F_0}{S'} + 1 + \int_0^{S'} \frac{1}{K^2}e^{rT}p(K)dK + \int_{S'}^{\infty} \frac{1}{K^2}e^{rT}c(K)dK\right) \\ &= \frac{2}{T}\left(\log\left(\frac{F_0}{S'}\right) - \frac{F_0}{S'} + 1 + \int_0^{S'} \frac{1}{K^2}e^{rT}p(K)dK + \int_{S'}^{\infty} \frac{1}{K^2}e^{rT}c(K)dK\right). \end{aligned}$$

Im Wesentlichen ist der aktuelle Kurs des VIX gegeben durch

$$100\sqrt{E^*(\overline{V})}$$

mit $T = \frac{1}{12}$, d.h. einem Monat Restlaufzeit. Die genauen Berechnungen können in einem White Paper (unter `http://www.cboe.com/micro/vix/vixwhite.pdf`) nachgelesen werden. Genauere Analysen des VIX sind in Kalte [4, Kap. 4] zu finden, werden hier aber außen vor gelassen, um den Rahmen dieser Ausarbeitung nicht zu sprengen.

5 Fazit

Im Rahmen dieser Arbeit wurde das Black-Scholes-Modell und dessen Differentialgleichung vorgestellt, die zur Optionsbewertung genutzt werden kann. Wie im Abschnitt zu Kritik und Praxis erwähnt, werden dabei diverse Annahmen getroffen, die in der Realität nicht zutreffen. Allerdings bietet es eine Möglichkeit, den fairen Preis einer Option zu berechnen, wodurch dieser nicht willkürlich gewählt werden muss.
Aufgrund der genannten Kritikpunkte stellt sich die Frage, ob es ein besseres Modell für die Bewertung von Optionen gibt. Ein weiteres bekanntes analytisches Modell ist das sogenannte Cox-Ross-Rubinstein-Modell, welches auch oft Binomialmodell genannt wird. Dieses zu untersuchen würde aber den Rahmen dieser Arbeit sprengen und wäre daher Thema einer zukünftigen Abhandlung.

Literatur

[1] Black, F., Scholes, M., 1973. *The Pricing of Options and Corporate Liabilities.* The Journal of Political Economy, 81, Chicago, 637-654.

[2] Hull, J.C., 2018. *Options, Futures, and Other Derivatives.* 10. Auflage, Pearson, New York.

[3] Hull, J.C. *Valuation of a Variance Swap*, Technical Note 22 zu *Options, Futures, and Other Derivatives.* Abgerufen am 11.08.2021 unter `http://www-2.rotman.utoronto.ca/~hull/technicalnotes`.

[4] Kalte, P., 2017. *Die Bewertung von Optionen in Theorie und Praxis.* Masterarbeit, RWTH Aachen.

[5] Kempen, R., Maier-Paape, S., Platen, A., 2016. *Normalverteilte Finanzmarktdaten? Teil 1: Tagesrenditen.* Smart Investor, 4: 32–34.

[6] Meintrup, D., Schäffler, S., 2005. *Stochastik: Theorie und Anwendungen.* Springer, Berlin, Heidelberg, New York.

[7] Øksendal, B., 2000. *Stochastic Differential Equations: An Introduction with Applications.* 5. Auflage, Springer, Heidelberg, New York.

[8] Petters, A.O., Dong, X., 2016. *An Introduction to Mathematical Finance with Applications: Understanding and Building Financial Intuition.* Springer, Switzerland.

[9] Steele, J.M., 2001. *Stochastic Calculus and Financial Applications.* Springer, New York.

[10] Whaley, R.E., 2009. *Understanding the VIX.* The Journal of Portfolio Management, 35, London, New York, 98–105.