INSTITUT FÜR MATHEMATIK, RWTH AACHEN

Vorlesung im
Wintersemester 2004/2005, 2006/2007, 2008/2009, 2010/2011, 2012/2013, 2014/2015, 2016/2017
Sommersemester 2005, 2007, 2009, 2011, 2013, 2015, 2017

Differential- und Integralrechnung I, II

Sätze und Definitionen – ein Gerüst zur Vorlesung

PROF. DR. HEIKO VON DER MOSEL

Letzte Änderung: 8. Dezember 2022

Dieses Skript ist unter `http://www.instmath.rwth-aachen.de/teaching/di` verfuegbar.

Anregungen und Korrekturvorschläge bitte an `heiko@instmath.rwth-aachen.de`.

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Reelle Zahlen

Die reellen Zahlen bilden das Grundgerüst der Mathematik, wir wählen für diese Vorlesung einen pragmatischen Zugang und führen die reellen Zahlen axiomatisch ein. Dabei gibt es drei Gruppen von Axiomen: die *algebraischen Axiome*, aus denen sämtliche Rechenregeln für reelle Zahlen folgen, die für Termumformungen nötig sind; die *Anordnungsaxiome*, auf denen der Umgang mit Ungleichungen fußt, und schließlich das konzeptionell wohl komplizierteste *Vollständigkeitsaxiom*, welches garantiert, dass auf der reellen Zahlengeraden keine "Lücken" existieren, so dass man z.B. auch Wurzelgleichungen lösen kann oder später trigonometrische Funktionen eingeführt werden können. Weiterhin legen wir mit den Sätzen von Archimedes und Eudoxos schon in diesem Kapitel das Fundament für sämtliche Grenzwertprozesse in der Analysis.

Definition 1.1
Eine *Menge* M ist eine Zusammenfassung von bestimmten, wohlunterschiedenen Objekten zu einem Ganzen. Die Objekte nennen wir *Elemente* der Menge. Die Schreibweise $x \in M$ heißt, dass das Element x zu der Menge M gehört. Demgegenüber heißt $y \notin M$, dass das Element y nicht zu der Menge M zu zählen ist.
Seien M, N Mengen. Wir definieren

$$\begin{aligned} M \subset N \quad &:\Leftrightarrow \quad (x \in M \Rightarrow x \in N) \\ &\Leftrightarrow \quad \text{Für alle } x \in M \text{ gilt: } x \in N \\ &\Leftrightarrow \quad \forall\, x \in M : x \in N. \end{aligned}$$

Falls $M \subset N$ und $N \subset M$, dann gilt: $M = N$.
Falls $M \not\subset N$ (oder $N \not\subset M$) dann gilt $M \neq N$. In mathematischer Kurzform heißt das:

$$(\exists\, m \in M \text{ mit } m \notin N) \Rightarrow M \neq N.$$

Wir definieren die *Schnittmenge* zweier Mengen M, N als:

$$M \cap N := \{x : x \in M \text{ und } x \in N\}.$$

Wir definieren die *Vereinigungsmenge* zweier Mengen M, N als:

$$M \cup N := \{x : x \in M \text{ oder } x \in N\}.$$

Wir definieren die *Differenzmenge* zweier Mengen M, N als:

$$M \setminus N (= M - N) := \{x \in M : x \notin N\}.$$

Schließlich setzen wir $\emptyset := \{\}$ als Symbol für die *leere Menge* und

$$M \times N := \{(x,y) : x \in M, y \in N\}$$

ist als *kartesisches Produkt* der Mengen M und N definiert.

Die reellen Zahlen werden bei uns *axiomatisch* eingeführt. Dabei unterscheiden wir zwischen den

I. algebraischen Axiomen,

II. den Axiomen der Anordnung und

III. dem Vollständigkeitsaxiom.

Wir bezeichnen die Menge der reellen Zahlen mit $\mathbb{R}$.

I. Die algebraischen Axiome für $\mathbb{R}$
Es gibt zwei Operationen in $\mathbb{R}$, eine Addition "+" und eine Multiplikation "·", d.h. für $a, b \in \mathbb{R}$ sind die Summe $a+b \in \mathbb{R}$ und das Produkt $a \cdot b = ab \in \mathbb{R}$ als Operationen erklärt und gehorchen folgenden Regeln:

(A1) $(a+b)+c = a+(b+c)\ \forall\, a,b,c \in \mathbb{R}$

(A2) $a+b = b+a\ \forall\, a,b \in \mathbb{R}$

(A3) $\exists\, 0 \in \mathbb{R} : 0+a = a\ \forall\, a \in \mathbb{R}$

(A4) $\forall\, a \in \mathbb{R}\ \exists\,!\, b \in \mathbb{R} : a+b = 0 \qquad (b := -a)$

(M1) $(ab)c = a(bc)\ \forall\, a,b,c \in \mathbb{R}$

(M2) $ab = ba\ \forall\, a,b \in \mathbb{R}$

(M3) $\exists\, 1 \in \mathbb{R}\setminus\{0\} : a \cdot 1 = a\ \forall\, a \in \mathbb{R}$

(M4) $\forall\, a \in \mathbb{R}\setminus\{0\}\ \exists\, b \in \mathbb{R} : ab = 1 \qquad (b := a^{-1} = 1/a)$

(AM) $a(b+c) = ab+ac\ \forall\, a,b,c \in \mathbb{R}$.

Wir vereinbaren die Schreibweisen:

$$\begin{aligned} a-b &:= a+(-b) \\ \frac{a}{b} &= a/b := ab^{-1} = b^{-1}a \\ ab+cd &:= (ab)+(cd). \end{aligned}$$

Bemerkung. Die Null $(= 0 \in \mathbb{R})$ in Axiom (A3) ist eindeutig bestimmt, ebenso das zu $a \in \mathbb{R}$ negative Element $b = -a \in \mathbb{R}$. Die Eins $(= 1 \in \mathbb{R})$ in Axiom (M3) ist eindeutig bestimmt, gleichfalls das zu $a \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ inverse Element $b = 1/a \in \mathbb{R}$.

Aus den algebraischen Axiomen lassen sich folgende Rechenregeln ableiten:

$$
\begin{array}{rcl}
-(-a) & = & a \\
(-a)+(-b) & = & -(a+b) \\
(a^{-1})^{-1} & = & a \text{ für } a \neq 0 \\
a^{-1}b^{-1} & = & (ab)^{-1} \text{ für } a,b \neq 0 \\
a \cdot 0 & = & 0 \\
a(-b) & = & -(ab) \\
(-a)(-b) & = & ab \\
a(b-c) & = & ab-ac \\
\forall\, a,b \in \mathbb{R}, a \neq 0, & \exists! & c \in \mathbb{R} : ac = b \qquad (c := b/a) \\
\dfrac{a}{c}+\dfrac{b}{d} & = & \dfrac{ad+bc}{cd}, \qquad c,d \neq 0 \\
\dfrac{a}{c}\cdot\dfrac{b}{d} & = & \dfrac{ab}{cd}, \qquad c,d \neq 0 \\
\dfrac{a/c}{b/d} & = & \dfrac{ad}{bc}, \qquad b,c,d \neq 0, \\
ab = 0 & \Rightarrow & a = 0 \text{ oder } b = 0.
\end{array}
$$

II. Die Axiome der Anordnung für $\mathbb{R}$
Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ gilt: Entweder $a = b$, oder $a < b$, oder $b < a$, d.h. zwischen ungleichen reellen Zahlen a, b besteht eine Anordnung, die wir mit “<” symbolisieren. Dabei gelten folgende Regeln:

(O1) $(a < b \text{ und } b < c) \Rightarrow a < c$

(O2) $a < b \Rightarrow a + c < b + c \;\forall\, c \in \mathbb{R}$

(O3) $(a < b \text{ und } 0 < c) \Rightarrow ac < bc$.

Wir vereinbaren die folgenden Schreibweisen:

$$\begin{aligned} a > b &\;:\Leftrightarrow\; b < a \\ a \leq b &\;:\Leftrightarrow\; a < b \text{ oder } a = b \\ a \geq b &\;:\Leftrightarrow\; a > b \text{ oder } a = b. \end{aligned}$$

Die folgenden Rechenregeln für Ungleichungen lassen sich nun mit Hilfe aller bislang bekannten Axiome und der bisher abgeleiteten Rechenregeln beweisen:

$$\begin{aligned} a < b &\;\Leftrightarrow\; b - a > 0 \\ a < 0 &\;\Leftrightarrow\; -a > 0 \\ a > 0 &\;\Leftrightarrow\; -a < 0 \\ a < b &\;\Leftrightarrow\; -b < -a \\ (a < b \text{ und } c < d) &\;\Rightarrow\; a + c < b + d \\ ab > 0 &\;\Leftrightarrow\; (a > 0 \text{ und } b > 0) \text{ oder } (a < 0 \text{ und } b < 0) \\ ab < 0 &\;\Leftrightarrow\; (a > 0 \text{ und } b < 0) \text{ oder } (a < 0 \text{ und } b > 0) \\ a \neq 0 &\;\Leftrightarrow\; a^2 > 0 \qquad (\Rightarrow 1 > 0\,(!)) \\ (a < b \text{ und } c < 0) &\;\Rightarrow\; ac > bc \\ a > 0 &\;\Leftrightarrow\; \frac{1}{a} > 0 \\ \left(a^2 < b^2 \text{ und } a \geq 0 \text{ und } b > 0\right) &\;\Rightarrow\; a < b. \end{aligned}$$

Eine Verschärfung der letztgenannten Rechenregel lautet

$$\left(a^2 < b^2 \text{ und } b > -a\right) \Rightarrow a < b.$$

Definition 1.3
(i) Eine nichtleere Menge $M \subset \mathbb{R}$ heißt *nach oben beschränkt* $:\Leftrightarrow$

$$\exists\, S \in \mathbb{R} : x \leq S \;\forall\, x \in M.$$

Die Zahl S heißt dann *obere Schranke von* M.
Eine nichtleere Menge $M \subset \mathbb{R}$ heißt *nach unten beschränkt* $:\Leftrightarrow$

$$\exists\, s \in \mathbb{R} : x \geq s \;\forall\, x \in M.$$

Die Zahl s heißt dann *untere Schranke von* M.
Eine nichtleere Menge $M \subset \mathbb{R}$ heißt *beschränkt* $:\Leftrightarrow$

$$\exists\, C \in \mathbb{R}, C \geq 0 : -C \leq x \leq C \;\forall\, x \in M.$$

(ii) Sei $\emptyset \neq M \subset \mathbb{R}$. Die Zahl $C_1 \in \mathbb{R}$ heißt *kleinste obere Schranke* oder *Supremum* von M ($C_1 =: \sup M$), falls C_1 eine obere Schranke von M ist und falls zusätzlich für alle oberen Schranken S von M gilt:

$$C_1 \leq S.$$

Sei $\emptyset \neq M \subset \mathbb{R}$. Die Zahl $c_1 \in \mathbb{R}$ heißt *größte untere Schranke* oder *Infimum* von M ($c_1 =: \inf M$), falls c_1 eine untere Schranke von M ist und falls zusätzlich für alle unteren Schranken s von M gilt:

$$c_1 \geq s.$$

(iii) Falls für das Supremum einer nach oben beschränkten Menge M gilt $\sup M \in M$, dann nennt man das Supremum von M auch das *Maximum* von M und schreibt $\sup M = \max M$.
Falls für das Infimum einer nach unten beschränkten Menge M gilt $\inf M \in M$, dann nennt man das Infimum von M auch das *Minimum* von M und schreibt $\inf M = \min M$.

Wir vereinbaren die Schreibweise $\sup M < \infty$, falls $M \subset \mathbb{R}$ nach oben beschränkt ist, und $\inf M > -\infty$, falls $M \subset \mathbb{R}$ nach unten beschränkt ist.
Im Fall nicht nach oben / unten beschraenkter Mengen verwenden wir auch die Notation "$\sup M = \infty$" fuer $\sup M \not< \infty$ und "$\inf M = -\infty$" fuer $\inf M \not> -\infty$.

III. Das Vollständigkeitsaxiom für $\mathbb{R}$: Sei $\emptyset \neq M \subset \mathbb{R}$ nach oben beschränkt, dann gilt $\sup M \in \mathbb{R}$.
(Man kann alternativ auch formulieren: Sei $\emptyset \neq M \subset \mathbb{R}$ nach unten beschränkt, dann gilt $\inf M \in \mathbb{R}$.)

Satz 1.5
Sei $\emptyset \neq M \subset \mathbb{R}$.

(i) $\sup M < \infty \Rightarrow \forall \epsilon > 0 \, \exists x \in M : \sup M - \epsilon < x$

(ii) $\sup M \not< \infty \Leftrightarrow \forall k > 0 \, \exists x \in M : k < x$.

Ähnlich wie Satz 1.5 beweist man

Satz 1.6
Sei $\emptyset \neq M \subset \mathbb{R}$.

(i) $\inf M > -\infty \Rightarrow \forall \epsilon > 0 \, \exists x \in M : x < \inf M + \epsilon$

(ii) $\inf M \not> -\infty \Leftrightarrow \forall k > 0 \, \exists x \in M : x < -k$.

Die zentrale Bedeutung des Vollständigkeitsaxioms spiegelt sich in der Auflösbarkeit algebraischer Gleichungen in $\mathbb{R}$ wider. Insbesondere können wir nun beweisen, dass $\sqrt{2}$ eine reelle Zahl ist. Zunächst bemerken wir, dass $\sqrt{2}$ keine rationale Zahl ist:

Lemma 1.7
$r^2 = 2 \Rightarrow r \notin \mathbb{Q}$.

Lemma 1.8
Sei $a \in \mathbb{R}$ *mit* $a \geq 0$. *Dann gibt es ein nichtnegatives* $r \in \mathbb{R}$ *mit* $r^2 = a$. *Wir schreiben* $r =: \sqrt{a}$.

Für den Beweis von Lemma 1.8 benötigen wir neben der Beobachtung, dass die Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ nicht beschränkt ist, noch zwei fundamentale Sätze:

Satz 1.9 [Archimedes]
Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ *mit* $x > 0, y > 0$ *gibt es ein* $n \in \mathbb{N}$ *(abhängig von* x *und* y*), so dass* $nx > y$.

Satz 1.10 [Eudoxos]
Für alle $x \in \mathbb{R}$ *mit* $x > 0$ *gibt es ein* $n \in \mathbb{N}$*, so dass* $1/n < x$.

Kapitel 2

Die Mengen $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ und das Induktionsprinzip

Obwohl wir schon im ersten Kapitel mit Beispielen gerechnet haben, die die Eigenschaften der *natürlichen Zahlen* genutzt haben, werden wir in diesem Kapitel die natürlichen Zahlen, und darauf aufbauend die *ganzen Zahlen* und die *rationalen Zahlen* als Teilmengen der reellen Zahlen mathematisch stringent einführen. Das *Prinzip der Induktion* wird als Beweis- und Definitionsprinzip erklärt, um unendlich viele Aussagen quasi simultan zu formulieren oder zu beweisen.

Definition 2.1
(i) Eine Menge $M \subset \mathbb{R}$ heißt *induktiv* $:\Leftrightarrow$ $1 \in M$ und $(\, x \in M \Rightarrow x+1 \in M.\,)$.
(ii) $\mathbb{N} := \bigcap\limits_{\substack{M \subset \mathbb{R} \\ M \text{ induktiv}}} M.$

Satz 2.2
Ist $M \subset \mathbb{N}$ induktiv, dann gilt $M = \mathbb{N}$.

Satz 2.3 [Prinzip der vollständigen Induktion]
Voraussetzung: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gibt es Aussagen (=Behauptungen) B_n, die folgende zwei Eigenschaften erfüllen:

(i) *B_1 ist wahr*

(ii) $\forall\, n \in \mathbb{N} : (\, B_n \text{ wahr } \Rightarrow B_{n+1} \text{ wahr }\,)$

Behauptung: Dann ist B_n wahr für alle $n \in \mathbb{N}$.

Corollar 2.5
Voraussetzung: Für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_0$ gibt es Aussagen (=Behauptungen) B_n, die folgende zwei Eigenschaften erfüllen:

(i) *B_{n_0} ist wahr*

(ii) $\forall\, n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 : (\, B_n \text{ wahr } \Rightarrow B_{n+1} \text{ wahr }\,)$

Behauptung: Dann ist B_n wahr für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_0$.

Mit Hilfe der vollständigen Induktion kann man folgende wesentlichen Eigenschaften der Menge $\mathbb{N}$ beweisen:

Satz 2.7 (i) $n \geq 1 \; \forall \, n \in \mathbb{N}$

(ii) $n + m \in \mathbb{N} \; \forall \, n, m \in \mathbb{N}$

(iii) $n \cdot m = nm \in \mathbb{N} \; \forall \, n, m \in \mathbb{N}$

(iv) *Für* $n \in \mathbb{N}$ *gilt entweder* $n = 1$ *oder* $n - 1 \in \mathbb{N}$

(v) $n - m \in \mathbb{N} \; \forall \, n, m \in \mathbb{N}$ *mit* $n > m$

(vi) $\nexists \, n \in \mathbb{N}$ *mit* $0 < n < 1$ *(Anders gesagt:* $\mathbb{N} \cap (0, 1) = \emptyset$*)*

(vii) $\forall \, m \in \mathbb{N} : \mathbb{N} \cap (m, m+1) = \emptyset.$

Definition 2.8
Die *ganzen Zahlen* $\mathbb{Z}$ sind definiert durch

$$\mathbb{Z} := \mathbb{N} \cup \{0\} \cup \{-n : n \in \mathbb{N}\}.$$

Die *rationalen Zahlen* $\mathbb{Q}$ sind definiert durch

$$\mathbb{Q} := \{p/q : p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}\}.$$

Die Differenzmenge $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ nennt man die *irrationalen* Zahlen.

Lemma 2.10
(i) *Die Ausdrücke*

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \quad \textit{und} \quad \prod_{i=1}^{n} x_i$$

hängen nicht von der Reihenfolge der x_i *ab.*

(ii)

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i \right) \left(\sum_{j=1}^{N} y_j \right) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{N} x_i y_j \qquad \forall \, n, N \in \mathbb{N}$$

(iii) *Für* $x, y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, p, q \in \mathbb{Z}$ *gilt:*

$$\begin{aligned} x^p x^q &= x^{p+q} \\ (x^p)^q &= x^{pq} \\ (xy)^p &= x^p y^p. \end{aligned}$$

Kapitel 3

Abstandsfunktion und elementare Ungleichungen

Der *Abstand* auf der reellen Zahlengerade lässt sich durch die *Betragsfunktion* geeignet definieren, und der Vergleich von Abständen führt dann zwangsläufig auf Ungleichungen, die man unter Beachtung der Anordnungsaxiome umformen und analysieren kann. Einige der elementarsten Ungleichungen, die in späteren Kapiteln immer wieder zur Anwendung kommen, werden hier behandelt, wie z.B. die Cauchy-Schwarz-Ungleichung, die Bernoullische Ungleichung und die Minkowski-Ungleichung.

Definition 3.1
Für $x, y \in \mathbb{R}$ sei

$$d(x,y) := \begin{cases} x - y & \text{für } x \geq y \\ y - x & \text{für } x < y \end{cases}$$

der *Abstand* oder die *Distanz* zwischen x und y.

Satz 3.2
Es gilt

(i) $d(x,y) \geq 0 \; \forall \; x,y \in \mathbb{R}$ *und* $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ *(Definitheit)*

(ii) $d(x,y) = d(y,x) \; \forall \; x,y \in \mathbb{R}$ *(Symmetrie)*

(iii) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y) \; \forall \; x,y,z \in \mathbb{R}$ *(Dreiecksungleichung)*

(iv) $d(\varrho x, \varrho y) = \varrho \cdot d(x,y) \; \forall \; \varrho \geq 0, x,y \in \mathbb{R}$ *(Homogenität)*

(v) $d(x+z, y+z) = d(x,y) \; \forall \; x,y,z \in \mathbb{R}$ *(Translationsinvarianz)*

Definition 3.3
Der Ausdruck

$$|x| := d(x,0) \qquad \left(\quad = \begin{cases} x & \text{für } x \geq 0 \\ -x & \text{für } x < 0 \end{cases} \right)$$

ist der *Betrag* von $x \in \mathbb{R}$.

Satz 3.4
Es gilt

(i) $|x| \geq 0 \ \forall \ x \in \mathbb{R}$ *und* $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ *(Definitheit)*

(ii) $|x \cdot y| = |x| \cdot |y| \ \forall \ x, y \in \mathbb{R}$ *(Spezialfall der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung)*

(iii) $|x + y| \leq |x| + |y| \ \forall \ x, y \in \mathbb{R}$ *(Dreiecksungleichung)*

Satz 3.5
Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt:

(i) $|x - y| \leq |x| + |y|$

(ii) $\big||x| - |y|\big| \leq |x - y|$

(iii) $\big||x| - |y|\big| \leq |x + y|$

Satz 3.6 [Bernoullische Ungleichung]
Für alle $x \in \mathbb{R}$ *mit* $x > -1, x \neq 0$ *und alle* $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ *gilt:*

$$(1+x)^n > 1 + nx.$$

Lemma 3.8
Für alle $x, y, \epsilon \in \mathbb{R}, \epsilon > 0$ *gilt:*

$$|xy| \leq \frac{\epsilon}{2}x^2 + \frac{1}{2\epsilon}y^2.$$

Corollar 3.9
Für alle $x, y \geq 0$ *gilt*

$$\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}.$$

Bemerkung. Man kann auch allgemeiner zeigen, dass für $x_1, \ldots, x_n \geq 0$ gilt:

$$x_1 \cdot \cdots \cdot x_n \leq \left[\frac{1}{n}(x_1 + \cdots + x_n)\right]^n.$$

Zieht man die n-te Wurzel aus dieser Beziehung, erhält man links das *geometrische Mittel* und rechts das *arithmetische Mittel* der Zahlen $x_1, \ldots, x_n$.

Satz 3.10 [Cauchy-Schwarzsche Ungleichung]
Für alle $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n \in \mathbb{R}$ *gilt:*

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i y_i| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}.$$

Satz 3.11 [Minkowski-Ungleichung]
Für alle $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n \in \mathbb{R}$ *gilt:*

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}.$$

Kapitel 4

Reelle Funktionen

Für die Mathematik zentral ist der Begriff der *Abbildung* oder *Funktion*, der in diesem Kapitel eingeführt wird. Spezifische Eigenschaften mancher Funktionen wie beispielsweise *Monotonieeigenschaften* werden erklärt, und die Hintereinanderschaltung, die sogenannte *Verkettung* von Funktionen wird behandelt. Ein wichtiger Spezialfall ist es, wenn die Verkettung zweier Funktionen zu der *Identitätsabbildung* führt, die ein Element einfach auf sich selbst abbildet. Diese *Umkehrbarkeit* und Kriterien dafür werden im zentralen *Umkehrsatz* untersucht. Der Umkehrsatz erlaubt auch die Einführung bisher nicht behandelbarer Funktionen wie allgemeine Exponentialfunktionen. Auch einfache Operationen wie die Addition oder Multiplikation von Funktionen führen auf kompliziertere Funktionsausdrücke, die man aber in ihren Bestandteilen analysieren kann. Spezielle Funktionen sind Polynome und rationale Funktionen, die man mit einfachen Methoden genauer untersuchen kann; insbesondere deren *Definitionsbereiche* und deren *Nullstellen* lassen sich leicht angeben.

Definition 4.2
(i) Eine *Funktion* (oder *Abbildung*) $f : M_1 \to M_2$ ist eine Zuordnung, die jedem $x \in M_1$ genau ein Element $y = f(x) \in M_2$ zuordnet.

(ii) Die Menge $\mathscr{D}(f) := M_1$ ist der *Definitionsbereich* von f, und die Menge $\mathscr{W}(f) := f(M_1) \subset M_2$ ist der *Wertebereich* von f.

(iii) Sei $f : M_1 \to M_2$ eine Funktion, dann heißt die Menge

$$\text{Graph}\, f := \{(x,y) \in M_1 \times M_2 : y = f(x)\}$$

der *Graph* der Funktion f.

Bemerkung. Oft muss man den Definitionsbereich $\mathscr{D}(f)$ geeignet wählen, damit man sinnvoll von einer Funktion sprechen kann.

Anhand einer graphischen Darstellung lässt sich häufig entscheiden, ob es sich bei einer gegebenen Zuordnung wirklich um eine Funktion handelt:
Eine Menge $R \subset M_1 \times M_2$ ist Graph einer Funktion, wenn die folgende Implikation gilt:

$$\Big((x,y) \in R \text{ und } (x,y') \in R\Big) \Rightarrow y = y'.$$

Definition 4.4
Eine Funktion $f : \mathscr{D}(f) \to \mathbb{R}$ heißt *gerade* $:\Leftrightarrow$

$$f(x) = f(-x) \qquad \forall\, x \in \mathscr{D}(f) \quad \text{(s.d. auch } -x \in \mathscr{D}(f)\text{)}.$$

Eine Funktion $f : \mathscr{D}(f) \to \mathbb{R}$ heißt *ungerade* $:\Leftrightarrow$

$$f(x) = -f(-x) \qquad \forall\, x \in \mathscr{D}(f) \quad \text{(s.d. auch } -x \in \mathscr{D}(f)\text{)}.$$

Definition 4.6
Eine Funktion $f : \mathscr{D}(f) \to \mathbb{R}$ heißt *monoton wachsend* $:\Leftrightarrow$

$$x < y \Rightarrow f(x) \le f(y) \qquad \forall\, x, y \in \mathscr{D}(f).$$

Eine Funktion $f : \mathscr{D}(f) \to \mathbb{R}$ heißt *monoton fallend* $:\Leftrightarrow$

$$x < y \Rightarrow f(x) \ge f(y) \qquad \forall\, x, y \in \mathscr{D}(f).$$

Eine Funktion $f : \mathscr{D}(f) \to \mathbb{R}$ heißt *streng monoton wachsend* $:\Leftrightarrow$

$$x < y \Rightarrow f(x) < f(y) \qquad \forall\, x, y \in \mathscr{D}(f).$$

Eine Funktion $f : \mathscr{D}(f) \to \mathbb{R}$ heißt *streng monoton fallend* $:\Leftrightarrow$

$$x < y \Rightarrow f(x) > f(y) \qquad \forall\, x, y \in \mathscr{D}(f).$$

Definition 4.8
Seien $f : \mathscr{D}(f) \to \mathbb{R}$ und $g : \mathscr{D}(g) \to \mathbb{R}$ zwei Funktionen. Dann definiert

$$\begin{aligned} h &:= g \circ f \\ h(x) &:= g(f(x)) \text{ für } x \in \mathscr{D}(f) \text{ und } f(x) \in \mathscr{D}(g) \end{aligned}$$

die *Komposition* von f und g. Es gilt

$$\text{Graph}\, h := \{(x,y) \in \mathscr{D}(f) \times \mathbb{R} : f(x) \in \mathscr{D}(g) \text{ und } y = g(f(x))\}.$$

Definition 4.10
Eine Funktion $f : \mathscr{D}(f) \to \mathbb{R}$ heißt *injektiv* ("f ist 1-1") $:\Leftrightarrow$

$$\forall\, x,y \in \mathscr{D}(f) : \qquad \big(f(x) = f(y) \Rightarrow x = y\big).$$

Definition 4.13
Sei $f : \mathscr{D}(f) \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit Wertebereich $\mathscr{W}(f)$. Falls es eine Funktion $g : \mathscr{W}(f) \to \mathscr{D}(f)$ mit

$$g(f(x)) = x \qquad \forall\, x \in \mathscr{D}(f)$$

gibt, dann heißt g die *Umkehrfunktion* von f. Wir schreiben $g =: f^{-1}$.
Die Umkehrfunktion g ist eindeutig bestimmt. Es gilt

$$\text{Graph}\, f^{-1} = \{(y,x) \in \mathbb{R}^2 : (x,y) \in \text{Graph}\, f\}.$$

Satz 4.15 [Umkehrsatz in $\mathbb{R}$]
Falls $f : \mathscr{D}(f) \to \mathbb{R}$ streng monoton ist, dann existiert die Umkehrfunktion $g : \mathscr{W}(f) \to \mathscr{D}(f)$.

Satz 4.17
Für alle $n \in \mathbb{N}, c \in \mathbb{R}_+$ gibt es genau ein $x \in \mathbb{R}_+$ mit $x^n = c$.
(Hierbei ist $\mathbb{R}_+ := \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$.)

Bemerkung. Wir vereinbaren die Schreibweise

$$\begin{aligned} x^{p/q} &:= (x^{1/q})^p = (x^p)^{1/q} \text{ für } p, q \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R}_+ \\ \text{und } x^{-p/q} &:= (x^{-1})^{p/q} \text{ für } x > 0, \end{aligned}$$

woraus die Rechenregeln

$$\begin{aligned} x^{r+s} &= x^r x^s \\ x^{rs} &= (x^r)^s \\ x^r y^r &= (xy)^r \end{aligned}$$

für alle $r, s \in \mathbb{Q}$ und alle zulässigen $x \in \mathbb{R}$ folgen.

Definition 4.18
Seien die Funktionen $f : \mathscr{D}(f) \to \mathbb{R}$ und $g : \mathscr{D}(g) \to \mathbb{R}$ gegeben und $M := \mathscr{D}(f) \cap \mathscr{D}(g)$. Dann heißt die Funktion $(f+g) : M \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$(f+g)(x) := f(x) + g(x) \text{ für } x \in M$$

die *Summe der Funktionen f und g*.

Die Funktion $(f-g) : M \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$(f-g)(x) := f(x) - g(x) \text{ für } x \in M$$

heißt die *Differenz der Funktionen f und g*.

Die Funktion $(f \cdot g) : M \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$(f \cdot g)(x) := f(x) \cdot g(x) \text{ für } x \in M$$

heißt das *Produkt der Funktionen f und g*.

Die Funktion $(f/g) : \{x \in M : g(x) \neq 0\} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$(f/g)(x) := f(x)/g(x) \text{ für } x \in M, g(x) \neq 0,$$

heißt der *Quotient der Funktionen f und g*.

Definition 4.19
Eine Funktion $f : \mathscr{D}(f) \to \mathbb{R}$ heißt *nach unten beschränkt* $:\Leftrightarrow \mathscr{W}(f)$ ist nach unten beschränkt, d.h. es gibt $m \in \mathbb{R}$, so dass $m \leq f(x)$ für alle $x \in \mathscr{D}(f)$.

Eine Funktion $f : \mathscr{D}(f) \to \mathbb{R}$ heißt *nach oben beschränkt* $:\Leftrightarrow \mathscr{W}(f)$ ist nach oben beschränkt, d.h. es gibt $M \in \mathbb{R}$, so dass $M \geq f(x)$ für alle $x \in \mathscr{D}(f)$.

Eine Funktion $f : \mathscr{D}(f) \to \mathbb{R}$ heißt *beschränkt* $:\Leftrightarrow \mathscr{W}(f)$ ist beschränkt, d.h. es gibt $C \in \mathbb{R}_+$, so dass $-C \leq f(x) \leq C$ für alle $x \in \mathscr{D}(f)$.

Bemerkung. Die Summe und das Produkt beschränkter Funktionen sind beschränkte Funktionen.

Definition 4.20
Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt *Polynom* vom Grad n, wenn es Zahlen (*Koeffizienten*) $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ mit $a_n \neq 0$ gibt, so dass für $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f(x) &= a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \\ &= \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \\ &=: P_n(x). \end{aligned}$$

Satz 4.21 [Koeffizientenvergleich]
Für Polynome $P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ und $Q_m(x) = \sum_{k=0}^{m} b_k x^k$ vom Grad n bzw. m gilt

$$P_n(x) = Q_m(x) \ \forall \ x \in \mathbb{R} \quad \Leftrightarrow \quad n = m \text{ und } a_k = b_k \ \forall \ k = 0, \ldots, n.$$

Speziell gilt also, dass Polynome unterschiedlichen Grades nicht gleich sein können.

Lemma 4.22
Für $a \in \mathbb{R}$ mit $|a| < \epsilon \ \forall \ \epsilon > 0$ gilt $a = 0$.

Bemerkung. Zur Berechnung von P_n ist folgendes Schema günstig (*Horner-Schema*):

$$\begin{aligned} P_n(x) &= a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \\ &= \{a_n x^{n-1} + a_{n-1} x^{n-2} + \cdots + a_2 x + a_1\} x + a_0 \\ &= \{[a_n x^{n-2} + a_{n-1} x^{n-3} + \cdots + a_3 x + a_2] x + a_1\} x + a_0 \\ &\ \ \vdots \\ &= \{[(\cdots(a_n x + a_{n-1}) x + a_{n-2}) x + \cdots + a_2] x + a_1\} x + a_0. \end{aligned}$$

Definition 4.24
Für eine Funktion $f : \mathscr{D}(f) \to \mathbb{R}$ heißt $x_0 \in \mathscr{D}(f)$ *Nullstelle* von $f :\Leftrightarrow f(x_0) = 0$. Weiterhin heißt $x_0 \in \mathbb{R}$ *m-fache Nullstelle* des Polynoms $P_n(x)$ (vom Grad n), wenn es ein Polynom $Q_{n-m}(x)$ (vom Grad $n-m$) gibt, so dass

$$P_n(x) = (x - x_0)^m Q_{n-m}(x) \text{ und } Q_{n-m}(x_0) \neq 0.$$

Die Zahl m heißt dann die *Vielfachheit* der Nullstelle x_0.

Definition 4.26
Seien $P_n(x)$ und $Q_m(x)$ Polynome vom Grad n bzw. m. Dann heißt

$$R(x) := \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$$

rationale Funktion und hat den Definitionsbereich $\mathscr{D}(R) = \{x \in \mathbb{R} : Q_m(x) \neq 0\}$.

Satz 4.27
Für $R(x) = P_n(x)/Q_m(x)$ mit $n \geq m$ gibt es Polynome $S_{n-m}(x)$ und $T_k(x)$, so dass

$$R(x) = S_{n-m}(x) + \frac{T_k(x)}{Q_m(x)} \quad \forall\, x \in \mathscr{D}(R).$$

Hierbei ist $T_k(x) \equiv 0$ oder ein Polynom vom Grad $k < m$. Diese Darstellung der rationalen Funktion R heißt auch Normalform!*, $S_{n-m}(x)$ ist der* ganzrationale*, $T_k(x)/Q_m(x)$ der* gebrochen rationale *Anteil von R.*

Kapitel 5

Folgen, Exponentialfunktion und Logarithmus

Es gibt weitere Funktionen, die beispielsweise für die Formulierung von Naturgesetzen und Wachstumsprozessen entscheidend sind, die sich aber aus den bisher kennengelernten Abbildungen nicht herleiten lassen. Das essentielle Instrument für die Definition solcher Funktionen wie etwa *Exponentialfunktion* und *Sinusfunktion* ist der in diesem Kapitel zentrale Begriff der *Konvergenz*, der im Grunde genommen schon am Ende des ersten Kapitels vorbereitet wurde. Wir beginnen mit dem Konzept von Folgen und erklären, wann eine Folge konvergiert, d.h. einen *Grenzwert* besitzt und wann nicht. Dieses Konzept allein reicht schon für die Definition der Exponentialfunktion, und der im Kapitel 4 hergeleitete Umkehrsatz liefert dann den Logarithmus als deren Umkehrfunktion. Die Konvergenz von Folgen ist auch das einzige Hilfsmittel, um unendliche Summen, sogenannte *Reihen* und deren Konvergenz zu erklären. Wichtig ist die Herleitung hinreichender Kriterien für deren Konvergenz, und der Vergleich mit speziellen Reihen, wie der *geometrischen Reihe* oder der *harmonischen Reihe*.

Definition 5.2
Eine Funktion $f : U \subset \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ heißt *Folge*, und wir nennen $f(n) =: a_n$ *Folgenglieder*.
Die Folge bezeichnen wir auch mit $\{a_n\}_{n\in U}$.

Definition 5.4
Eine Folge $\{a_n\}$ *konvergiert* gegen eine Zahl $a \in \mathbb{R}$ (hat den Grenzwert a) $:\Leftrightarrow$

$$\forall\, \epsilon > 0\ \exists\, N = N(\epsilon) : |a_n - a| < \epsilon\ \forall\, n \geq N.$$

Wir schreiben dann auch $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ oder $a_n \to a$ für $n \to \infty$.
Wenn eine Folge nicht konvergent ist, dann heißt sie *divergent*.

Satz 5.6 [Grenzwertsätze]
Falls $a_n \to a$ und $b_n \to b$ für $a, b \in \mathbb{R}$, dann gilt

(i) $(ca_n) \to ca \quad \forall\, c \in \mathbb{R}$

(ii) $(a_n + b_n) \to a + b$

(iii) $(a_n b_n) \to ab$

(iv) $(a_n/b_n) \to a/b$ *für* $b \neq 0$

für $n \to \infty$.

Bemerkung. Man beachte in (iv), dass wegen $b \neq 0$ auch $b_n \neq 0$ für n genügend groß.

Satz 5.8 [“Sandwich-Folgen”]
Falls $a_n \le b_n \le c_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $a_n \to a$, $c_n \to a$ für eine Zahl $a \in \mathbb{R}$, dann gilt $b_n \to a$ für $n \to \infty$.

Bemerkung. Wenn $a_n < b_n < c_n$ oder $a_n \le b_n \le c_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $a_n \to a$, $b_n \to b$ und $c_n \to c$, dann gilt $a \le b \le c$.

Definition 5.10
(i) Eine Folge $\{a_n\}_{n\in U\subset\mathbb{N}}$ heißt (streng) *monoton wachsend (fallend)*, wenn die Funktion $f : U \subset \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ mit $f(n) = a_n$, $n \in U$ (streng) monoton wachsend (fallend) ist (vgl. Definition 4.6).

(ii) Eine Folge $\{a_n\}_{n\in U\subset\mathbb{N}}$ heißt *(nach unten/oben) beschränkt*, wenn die Funktion $f : U \subset \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ mit $f(n) = a_n$, $n \in U$ (nach unten/oben) beschränkt ist (vgl. Definition 4.19).

Satz 5.11 [Monotone Konvergenz]
Eine monoton wachsende, nach oben beschränkte Folge $\{a_n\}_{n\in U\subset\mathbb{N}}$ ist konvergent.
Eine monoton fallende, nach unten beschränkte Folge $\{a_n\}_{n\in U\subset\mathbb{N}}$ ist konvergent.

Definition 5.13
Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) := \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

heißt *Exponentialfunktion*, und wir schreiben $f(x) =: \exp(x)$.
Der Wert

$$\exp(1) = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2.71828...$$

heißt *Eulersche Zahl*.

Satz 5.14 [Eigenschaften von exp]
Für die Funktion $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *gilt:*

(i) $\exp(0) = 1$

(ii) $\exp(x + y) = \exp(x) \cdot \exp(y) \quad \forall\, x, y \in \mathbb{R}$

(iii) $\exp(x) > 0 \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$

(iv) $\exp(-x) = 1/\exp(x) \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$.

Lemma 5.15
Für $x := p/q \in \mathbb{Q}$ $(p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N})$ *gilt*

$$\exp(x) = e^x = e^{p/q} = \sqrt[q]{e^p}.$$

Definition 5.16
Für $x \in \mathbb{R}$ setze

$$e^x := \exp(x) = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n.$$

Satz 5.17 [Eigenschaften von e^x] (i) $e^x \geq 1 + x \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$

(ii) $e^x < e^y \quad \forall\, x < y$

(iii) $|e^x - 1| \leq \frac{|x|}{1-|x|} \quad \forall\, |x| < 1$

(iv) $e^x > x^n \quad \forall\, x \in \mathbb{R} :\ x > 4n^2$

(v) $\lim_{n\to\infty} e^{-n} = 0$.

Satz 5.19 [Logarithmus]
Der Wertebereich der Exponentialfunktion ist $\mathscr{W}(\exp) = (0,\infty)$*. Damit besitzt die Funktion* exp *auf* $(0,\infty)$ *eine eindeutig definierte Umkehrfunktion, die* Logarithmusfunktion*, die wir mit* log *bezeichnen.*

Satz 5.20 [Eigenschaften von log]
Für die Funktion $\log : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ *gilt:*

(i) $e^{\log y} = y \quad \forall\, y > 0$ *und* $\log e^x = x \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$

(ii) $\log x < \log y \quad \forall\, x, y \in (0,\infty)$ *mit* $x < y$ *(Monotonie)*

(iii) $\log(x \cdot y) = \log x + \log y$ *und* $\log(x/y) = \log x - \log y$ *für alle* $x, y \in (0,\infty)$

(iv) $\log(x^n) = n \log x \quad \forall\, x \in (0,\infty), n \in \mathbb{N}$

(v) $\log(1 + x) \le x \quad \forall\, x > -1$

(vi) $\forall\, c > 0\ \exists\, K = K(c) : \log x < cx\ \ \forall\, x \in (0,\infty)$ *mit* $x > K$.

Satz 5.21
Für $a > 0$ *und* $\exp_a(x) := e^{x \log a}$, *gilt*

$$\exp_a(x) = a^x \qquad \forall\, x \in \mathbb{Q}$$

(vgl. Bemerkung nach Satz 4.17).

Definition 5.22
Für $a > 0$ heißt $a^x := e^{x \log a}$, $x \in \mathbb{R}$, die *Exponentialfunktion (zur Basis a)*.

Bemerkung. Für die Funktion $x \mapsto e^x$ verwenden wir ab sofort nur noch den Begriff *Exponentialfunktion* ohne den Zusatz *zur Basis e*.

Satz 5.23 [Eigenschaften der Exponentialfunktion]
Für $a, b > 0$ *und* $x, y \in \mathbb{R}$ *gilt:*

(i) $(ab)^x = a^x b^x$

(ii) $a^{xy} = (a^x)^y$

(iii) $a^{x+y} = a^x a^y$.

Definition 5.24
Eine *Reihe* ist ein Ausdruck der Form

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k := a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_k + \cdots,$$

wobei $\{a_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen ist. (Mitunter beginnt die Indizierung einer Reihe auch bei $k = 0$ oder einer anderen, von 1 verschiedenen ganzen Zahl.)

Definition 5.26
(i) Die n-te *Partialsumme* S_n der Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ist definiert durch

$$S_n := \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_n.$$

(ii) Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *konvergiert* mit *Summe* $S \in \mathbb{R}$, wenn gilt

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

Falls der Grenzwert $\lim_{n\to\infty} S_n$ nicht existiert, dann heißt die Reihe *divergent*.

Bemerkung. Für die Konvergenzanalyse bei Reihen ist es oft hilfreich, komplizierte gebrochen-rationale Ausdrücke in einzelne Summanden einfacher Gestalt zu zerlegen. Dies kann man mit der *Partialbruchzerlegung* tun. Seien P_n, Q_m Polynome vom Grad n bzw. m mit $n < m$, dann ist

$$\begin{aligned}
\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} &= \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_0} \\
&= \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0}{(x-c_1)^{k_1}(x-c_2)^{k_2}\cdots(x^2+p_1x+q_1)^{l_1}(x^2+p_2x+q_2)^{l_2}\cdots} \\
&\stackrel{!}{=} \frac{A_{11}}{x-c_1} + \frac{A_{12}}{(x-c_1)^2} + \frac{A_{13}}{(x-c_1)^3} + \cdots + \frac{A_{1k_1}}{(x-c_1)^{k_1}} \\
&\quad + \frac{A_{21}}{x-c_2} + \frac{A_{22}}{(x-c_2)^2} + \frac{A_{23}}{(x-c_2)^3} + \cdots + \frac{A_{2k_2}}{(x-c_2)^{k_2}} \\
&\quad + \cdots + \cdots \\
&\quad + \frac{D_{11}x+E_{11}}{x^2+p_1x+q_1} + \frac{D_{12}x+E_{12}}{(x^2+p_1x+q_1)^2} + \cdots + \frac{D_{1l_1}x+E_{1l_1}}{(x^2+p_1x+q_1)^{l_1}} \\
&\quad + \frac{D_{21}x+E_{21}}{x^2+p_2x+q_2} + \frac{D_{22}x+E_{22}}{(x^2+p_2x+q_2)^2} + \cdots + \frac{D_{2l_2}x+E_{2l_2}}{(x^2+p_2x+q_2)^{l_2}} \\
&\quad + \cdots + \cdots
\end{aligned}$$

Satz 5.29 [Geometrische Reihe]
Für $|r| < 1$ *und* $a \in \mathbb{R}$ *gilt*

$$\sum_{k=0}^{\infty} ar^k = \frac{a}{1-r}.$$

Falls $|r| \geq 1$ *und* $a \neq 0$*, dann divergiert die Reihe* $\sum_{k=0}^{\infty} ar^k$.

Satz 5.31 [Rechenregeln für Reihen]
Falls $A = \sum_k a_k$, $B = \sum_k b_k$ *und* $c \in \mathbb{R}$*, dann gilt:*

(i) $\sum_k (a_k + b_k) = A + B$

(ii) $\sum_k ca_k = cA$.

Satz 5.33 [Divergenztest]
Falls $a_k \not\to 0$ *für* $k \to \infty$*, dann ist* $\sum_k a_k$ *divergent.*

Bemerkung. Die für die Konvergenz notwendige Bedingung $a_k \to 0$ für $k \to \infty$ ist NICHT hinreichend für die Konvergenz einer Reihe, wie der folgende Satz zeigt.

Satz 5.35 [Harmonische Reihe]
Die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots$$

ist divergent.

Satz 5.36 [Vergleichstest]
(i) $\sum_k a_k$ *konvergiert, falls* $\sum_k b_k$ *konvergiert und* $0 \le a_n \le b_n \; \forall \; n \ge n_0$.
(ii) $\sum_k a_k$ *divergiert, falls* $\sum_k b_k$ *divergiert und* $0 \le b_n \le a_n \; \forall \; n \ge n_0$.

Bemerkung. Falls $a_n \ge 0 \; \forall \; n \in \mathbb{N}$, dann kann man die Reihe $\sum_k a_k$ beliebig klammern oder umordnen, d.h. es gilt

$$\begin{aligned}\sum_k a_k &= a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + \cdots \\ &= (a_1 + a_2 + a_3) + a_4 + (a_5 + a_6) + \cdots \\ &= a_1 + a_2 + a_4 + a_3 + a_6 + a_8 + \cdots,\end{aligned}$$

unabhängig davon, ob die Reihe konvergiert oder divergiert.
Demgegenüber ist zu beachten, dass z.B. die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k = 1 + (-1) + 1 + (-1) + \cdots$$

nach Satz 5.33 divergiert, obwohl eine abweichende Klammerung zur Konvergenz führt:

$$(1 + (-1)) + (1 + (-1)) + \cdots = 0 + 0 + \cdots = 0.$$

Es gibt sogar konvergente Reihen, für die gewisse Umordnungen entweder gegen eine andere Summe konvergieren, oder aber divergieren!

Satz 5.38 [Absolute Konvergenz]
Falls $\sum_k |a_k|$ *konvergiert, dann auch* $\sum_k a_k$*, wobei allerdings i.a.* $\sum_k a_k \neq \sum_k |a_k|$.

Bemerkung. Man sagt auch, dass $\sum_k a_k$ *absolut* konvergiert, falls $\sum_k |a_k|$ konvergiert. Man kann beweisen, dass man absolut konvergente Reihen beliebig umordnen darf, ohne ihre Summe zu ändern.

Satz 5.39 [Quotiententest]
Falls $a_n \neq 0$ *für alle* $n \geq n_0$ *und falls*

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \to \varrho \in [0, \infty] \quad \text{für } n \to \infty,$$

dann gilt:

(i) $\sum_k a_k$ *konvergiert absolut, falls* $0 \leq \varrho < 1$,

(ii) $\sum_k a_k$ *divergiert, falls* $\varrho > 1$.

(Falls $\varrho = 1$, *dann gestattet das Quotientenkriterium keine Aussage zur Konvergenz oder Divergenz von* $\sum_k a_k$.*)*

Satz 5.42 [Wurzelkriterium]
Falls $\sqrt[n]{|a_n|} \to \varrho \in [0, \infty]$ *für* $n \to \infty$, *dann gilt:*

(i) *Die Reihe* $\sum_k a_k$ *konvergiert absolut, falls* $0 \leq \varrho < 1$.

(ii) *Die Reihe* $\sum_k a_k$ *divergiert, falls* $\varrho > 1$.

(Falls $\varrho = 1$, *dann gestattet das Wurzelkriterium keine Aussage zur Konvergenz oder Divergenz von* $\sum_k a_k$.*)*

Kapitel 6

Stetige Funktionen, Sinus und Cosinus

Der Begriff der *Stetigkeit* ist konzeptionell eigentlich komplizierter als der der Differenzierbarkeit, welche erst im siebten Kapitel behandelt wird. Aber mit den in Kapitel 5 studierten Folgen und dem zugehörigen Konvergenzbegriff lassen sich *Grenzwerte von Funktionen* und die Stetigkeit von reellen Funktionen einfach definieren. Das alternative sogenannte $\epsilon-\delta$*-Kriterium* für die Stetigkeit ist technisch komplizierter, dafür aber auch universeller einsetzbar. Auch stetige Funktionen lassen sich miteinander kombinieren, um neue stetige Funktionen zu erzeugen. Um wichtige Aussagen für allgemeine stetige Funktionen zu erkennen, wird das Konzept von Häufungspunkten eingeführt. Damit lässt sich dann beispielsweise der *Zwischenwertsatz* beweisen, der grob gesprochen sagt, dass eine stetige Funktion jeden Wert zwischen ihrem minimalen und maximalen Wert tatsächlich auch annimmt. Abschließend werden wir in diesem Kapitel *Potenzreihen* und deren *Konvergenzradien* untersuchen, und als Spezialfälle die *trigonometrischen Funktionen* einführen.

Definition 6.1 [Grenzwerte von Funktionen]
(i) Die Funktion $f:\mathscr{D}(f)\to\mathbb{R}$ besitzt an der Stelle $x_0\in(a,b)$, $(a,b)\setminus\{x_0\}\subset\mathscr{D}(f)$, den *Grenzwert* y_0, wenn für alle Folgen $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subset(a,b)\setminus\{x_0\}$ mit $x_n\to x_0$ für $n\to\infty$ gilt:

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n)=y_0.$$

Wir schreiben dann

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=y_0.$$

(ii) Die Funktion $f:\mathscr{D}(f)\to\mathbb{R}$ besitzt in $x_0\in\mathscr{D}(f)$ den *linksseitigen* (bzw. *rechtsseitigen Grenzwert*) y_0, wenn es ein Intervall $(a,x_0)\subset D(f)$ (bzw. $(x_0,b)\subset D(f)$) gibt und für alle Folgen $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subset(a,x_0)$ (bzw. für alle Folgen $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subset(x_0,b)$) mit $x_n\to x_0$ für $n\to\infty$ gilt:

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n)=y_0.$$

Wir schreiben dann

$$\lim_{x\nearrow x_0} f(x)=y_0$$

$$\left(\text{ bzw. } \quad \lim_{x\searrow x_0} f(x)=y_0\ \right).$$

Bemerkung. Für die Untersuchung des Grenzwertes $\lim_{x\to x_0} f(x)$ reicht es, für beliebiges $\epsilon > 0$ Folgen

$$\{x_n\} \subset (x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon) \setminus \{x_0\} =: B_\epsilon(x_0) \setminus \{x_0\}$$

zu betrachten. Wir sprechen bei $B_\epsilon(x_0)$ auch von dem *ϵ-Ball* oder von der (symmetrischen) *ϵ-Umgebung* von x_0.

Im Folgenden formulieren wir viele Aussagen fuer Funktionen $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ und Punkte $x_0 \in (a,b)$. Diese gelten entsprechend auch fuer allgemeinere Definitionsbereiche $D(f) \subset \mathbb{R}$ und Punkte x_0, sofern $x_0 \in (a,b)$ und $(a,b) \setminus \{x_0\} \subset \mathscr{D}(f)$ oder, im Fall links- bzw. rechtsseitiger Stetigkeit, $(a,x_0) \subset \mathscr{D}(f)$ bzw. $(x_0,b) \subset \mathscr{D}(f)$, wie in Definition 6.1).

Satz 6.3 [Grenzwertsätze für Funktionen]
Für Funktionen $f, g : (a,b) \to \mathbb{R}$, $x_0 \in (a,b)$, *mit* $\lim_{x\to x_0} f(x) = y_0$ *und* $\lim_{x\to x_0} g(x) = z_0$ *gilt:*

(i) $\lim_{x\to x_0}[\alpha f(x) + \beta g(x)] = \alpha y_0 + \beta z_0 \quad \forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

(ii) $\lim_{x\to x_0}[f(x)\cdot g(x)] = y_0 z_0$

(iii)
$$\lim_{x\to x_0}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{y_0}{z_0}, \quad \text{falls} \quad z_0 \neq 0.$$

(iv) *Enthaelt* $\mathscr{W}(f)$ *eine Umgebung von* y_0 *und ist zusaetzlich* $h : \mathscr{W}(f) \to \mathbb{R}$ *mit* $\lim_{y\to y_0} h(y) = z_0$ *gegeben, so gilt* $\lim_{x\to x_0}(h \circ f)(x) = z_0$.

Satz 6.6 [Vergleichskriterium („Sandwich“)]
Für Funktionen $f, g, h : (a,b) \to \mathbb{R}$, $x_0 \in (a,b)$ *mit*

$$g(x) \leq f(x) \leq h(x) \quad \forall\, x \in B_\epsilon(x_0) \setminus \{x_0\}$$

für ein $\epsilon > 0$, *und mit*

$$\lim_{x\to x_0} g(x) = \lim_{x\to x_0} h(x) = y_0$$

gilt:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = y_0.$$

Bemerkung. Für $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$, oder $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ kann man z.B. auch die Grenzwerte

$$\lim_{x\to\infty} f(x) \text{ oder } \lim_{x\to-\infty} g(x)$$

betrachten, indem man etwa Folgen $x_n \to \infty$ betrachtet, d.h. Folgen $\{x_n\}$, so dass für alle $K > 0$ ein Folgenindex $N = N(K)$ existiert, so dass $x_n \geq K$ für alle $n \geq N$.

Satz 6.7 [ϵ-δ-Formulierung]
Für eine Funktion $f : (a,b) \to \mathbb{R}$, $x_0 \in (a,b)$ gilt

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = y_0,$$

genau dann wenn

$$\forall\, \epsilon > 0\ \exists\, \delta = \delta(x_0,\epsilon) > 0\ \forall\, x \in (a,b), 0 < |x - x_0| < \delta \quad : \quad |y_0 - f(x)| < \epsilon.$$

Definition 6.8 [Stetigkeit]
(i) Eine Funktion $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ heißt *stetig* in $x_0 \in (a,b) :\Leftrightarrow$

$$f(x_0) = \lim_{x\to x_0} f(x).$$

$\Leftrightarrow$

$$\forall\, \epsilon > 0\ \exists\, \delta = \delta(x_0,\epsilon) > 0\ \forall\, x \in (a,b), |x - x_0| < \delta \quad : \quad |f(x_0) - f(x)| < \epsilon.$$

(ii) Eine Funktion $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ heißt *rechtsseitig stetig* (bzw. *linksseitig stetig*) in $x_0 \in (a,b) :\Leftrightarrow$

$$f(x_0) = \lim_{x\searrow x_0} f(x)$$

$$(\text{ bzw.} \qquad f(x_0) = \lim_{x\nearrow x_0} f(x)\ )$$

$\Leftrightarrow$

$$\forall\, \epsilon > 0\ \exists\, \delta = \delta(x_0,\epsilon) > 0\ \forall\, x \in [x_0,b), |x - x_0| < \delta \quad : \quad |f(x_0) - f(x)| < \epsilon$$

$$(\text{bzw.} \qquad \forall\, \epsilon > 0\ \exists\, \delta = \delta(x_0,\epsilon) > 0\ \forall\, x \in (a,x_0], |x - x_0| < \delta \quad : \quad |f(x_0) - f(x)| < \epsilon\ ).$$

(iii) Ist eine Funktion $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ in allen $x \in (a,b)$ stetig, dann heißt f *stetig* auf (a,b). Die Menge aller auf (a,b) stetigen Funktionen bezeichnen wir mit $C^0((a,b))$.

Definition 6.9 [Stetige Fortsetzung]
Sei $f \in C^0(B_\epsilon(x_0) \setminus \{x_0\})$, und es existiere $\lim_{\xi \to x_0} f(\xi)$, dann heißt f in x_0 *stetig fortsetzbar*. Die Funktion

$$\tilde{f}(x) := \begin{cases} f(x) & \forall\ x \in B_\epsilon(x_0) \setminus \{x_0\} \\ \lim_{\xi \to x_0} f(\xi) & \text{für } \ x = x_0 \end{cases}$$

heißt *stetige Fortsetzung* von f auf $B_\epsilon(x_0)$. Der Punkt x_0 heißt dann *hebbare Singularität* oder, falls $f(x_0) \neq \lim_{\xi \to x_0} f(\xi)$ definiert ist, *hebbare Unstetigkeit*.

Satz 6.11 [Operationen mit stetigen Funktionen]
(i) Falls $f, g : (a,b) \to \mathbb{R}$ in x_0 stetig sind, dann sind auch die Funktionen $f + g$ und $f \cdot g$ in x_0 stetig, ebenso f/g, falls zusätzlich $g(x_0) \neq 0$.
(ii) Die Funktion $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ mit Wertebereich $\mathscr{W}(f) \subset (c,d)$ sei in $x_0 \in (a,b)$ stetig, und $g : (c,d) \to \mathbb{R}$ sei in $y_0 := f(x_0)$ stetig. Dann ist $g \circ f$ in x_0 stetig.
(iii) Die Funktion $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ sei streng monoton und stetig in (a,b). Dann ist die Umkehrfunktion $f^{-1} : \mathscr{W}(f) \to \mathbb{R}$ ebenfalls streng monoton und stetig, und $\mathscr{W}(f)$ ist ein Intervall.

Corollar 6.13 [Konvergenzkriterium für Folgen]
Sei $\epsilon > 0$, $A \in \mathbb{R}$ und $f : B_\epsilon(A) \to \mathbb{R}$ stetig in A. Dann gilt für jede Folge $\{a_n\} \subset B_\epsilon(A)$ mit $a_n \to A$ für $n \to \infty$:

$$\lim_{n \to \infty} f(a_n) = f(A).$$

Definition 6.14
(i) Sei $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$, und die Folge $\{n_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$ streng monoton wachsend. Dann heißt $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ *Teilfolge* von $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

(ii) $x_0 \in \mathbb{R}$ heißt *Häufungspunkt* der Folge $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R} :\Leftrightarrow$
in jeder Umgebung $B_\epsilon(x_0) := (x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon)$, $\epsilon > 0$, liegen unendlich viele Glieder der Folge
($\Leftrightarrow \sharp(B_\epsilon(x_0) \cap \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}) = \infty$).

Konvergiert $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, so konvergiert auch jede Teilfolge, und die Grenzwerte stimmen ueberein.

Satz 6.15
$\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ hat den Häufungspunkt $x_0 \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$ es gibt eine Teilfolge $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_{n_k} \to x_0$ für $k \to \infty$.

Definition 6.17
Eine Folge abgeschlossener Intervalle $\{[a_n, b_n]\}_{n=1}^{\infty}$ heißt *Intervallschachtelung* $:\Leftrightarrow$

(i) $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$

(ii) $b_n - a_n \to 0$ für $n \to \infty$.

Lemma 6.18
Zu einer Intervallschachtelung $\{[a_n, b_n]\}$ gibt es genau ein $x_0 \in \mathbb{R}$ mit $x_0 \in [a_n, b_n]$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $a_n \to x_0$, $b_n \to x_0$ für $n \to \infty$.

Satz 6.19 [Bolzano-Weierstraß]
Jede beschränkte Folge besitzt (mindestens) einen Häufungspunkt.

Satz 6.20
Zu jeder Funktion $f \in C^0([a,b])$ gibt es eine (von dieser Funktion abhängige) Konstante $K \geq 0$, so dass

$$|f(x)| \leq K \quad \forall\, x \in [a,b].$$

Satz 6.22
Jede Funktion $f \in C^0([a,b])$ nimmt ihr Supremum und Infimum an, d.h. es existieren $x_1, x_2 \in [a,b]$, so dass

$$f(x_1) = \sup \mathscr{W}(f) =: \sup_{[a,b]} f \qquad \textit{und} \qquad f(x_2) = \inf \mathscr{W}(f) =: \inf_{[a,b]} f.$$

Man schreibt dann auch (vgl. Definition 1.3):

$$f(x_1) = \max \mathscr{W}(f) =: \max_{[a,b]} f \qquad \textit{und} \qquad f(x_2) = \min \mathscr{W}(f) =: \min_{[a,b]} f.$$

Satz 6.24 [Zwischenwertsatz]
Sei $f \in C^0([a,b])$. Dann gilt:

(i) *Falls $f(a) \cdot f(b) < 0$, dann gibt es (mindestens) ein $x_0 \in (a,b)$ mit $f(x_0) = 0$.*

(ii) $\mathscr{W}(f) = [\inf_{[a,b]} f, \sup_{[a,b]} f]$.

Corollar 6.26
Ein Polynom $P_{2m-1}(x)$, $x \in \mathbb{R}$ vom Grade $2m-1$, $m \in \mathbb{N}$ hat (mindestens) eine reelle Nullstelle.

Definition 6.27
Für eine Funktion $f : M \to \mathbb{R}$ heißt $x_0 \in M$ *Fixpunkt* von $f :\Leftrightarrow$

$$f(x_0) = x_0.$$

Corollar 6.28 [Fixpunktsatz]
Für $f \in C^0([a,b])$ mit $\mathscr{W}(f) \subset [a,b]$ gibt es (mindestens) einen Fixpunkt.

Definition 6.29
(i) Sei $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}} \subset \mathbb{R}$, dann heißt für $x \in \mathbb{R}$ der Ausdruck

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

eine *Potenzreihe* in x mit *Koeffizienten* $a_k \in \mathbb{R}$.

(ii) Wir definieren die Menge

$$K := \{x \in \mathbb{R} : \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \quad \text{konvergent}\}$$

und bezeichnen die Zahl

$$R := \sup\{|y| : y \in K\}$$

als den *Konvergenzradius* der Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$.

Satz 6.30
Sei $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius R. Dann gilt:

(i) $R = 0 \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ *konvergiert absolut nur für* $x = 0$.

(ii) $R > 0 \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ *konvergiert absolut für alle* $x \in (-R, R)$.

(iii) *Für alle x mit $|x| > R$ ist $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ divergent.*

Satz 6.31 [Quotienten- und Wurzelkriterium für Potenzreihen]
(i) Falls die Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ mit $a_k \neq 0$ die Bedingung

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = A$$

erfüllt, dann gilt

$$R = \frac{1}{A}, \tag{6.1}$$

wobei in (6.1) $R = \infty$, *falls* $A = 0$ *und* $R = 0$, *falls* $\lim_{n\to\infty} |a_{n+1}/a_n| = \infty$.

(ii) Falls die Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ die Bedingung

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = B$$

erfüllt, dann gilt

$$R = \frac{1}{B}, \tag{6.2}$$

wobei in (6.2) $R = \infty$, *falls* $B = 0$ *und* $R = 0$, *falls* $\{\sqrt[n]{|a_n|}\}$ *eine unbeschränkte Folge ist.*

Definition 6.33 [Sinus, Cosinus]
Wir setzen für $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \sin x &:= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \\ \cos x &:= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} \end{aligned}$$

Satz 6.34 [Stetigkeit von Potenzreihen]
Eine Potenzreihe $P(x) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ *mit Konvergenzradius* R *ist stetig auf* $(-R,R)$*, kurz:* $P \in C^0((-R,R))$.

Satz 6.35 [Cauchy-Produkt]
Die Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ *habe den Konvergenzradius* R*, und die Potenzreihe* $\sum_{m=0}^{\infty} b_m x^m$ *habe den Konvergenzradius* S*, dann hat das Produkt –* Cauchy-Produkt *genannt – der beiden Potenzreihen die Gestalt*

$$\begin{aligned} \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k\right)\left(\sum_{m=0}^{\infty} b_m x^m\right) &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{l=0}^{n} a_l b_{n-l}\right) x^n \\ &= a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)x + (a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0)x^2 \\ &\quad +(a_0b_3 + a_1b_2 + a_2b_1 + a_3b_0)x^3 + \cdots \end{aligned}$$

und einen Konvergenzradius $T \geq \min\{R,S\}$.

Allgemein erhalten wir fuer absolut konvergente Reihen $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$*,* $\sum_{m=0}^{\infty} b_m$ *die Identitaet*

$$\begin{aligned} \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k\right)\left(\sum_{m=0}^{\infty} b_m\right) &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{l=0}^{n} a_l b_{n-l}\right) \\ &= a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0) + (a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0) \\ &\quad +(a_0b_3 + a_1b_2 + a_2b_1 + a_3b_0) + \cdots . \end{aligned}$$

Bemerkung. Bei der Berechnung von Cauchy-Produkten treten in natürlicher Weise die *Binomialfaktoren*

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

auf.

Satz 6.37 [Elementare Eigenschaften von Sinus und Cosinus] (i) *Die auf* $\mathbb{R}$ *definierten Funktionen* $\sin x$ *und* $\cos x$ *sind stetig, d.h.* $\sin, \cos \in C^0(\mathbb{R})$.

(ii) $\sin x = -\sin(-x)$ *und* $\cos x = \cos(-x)$ *für alle* $x \in \mathbb{R}$*, d.h.* $\sin x$ *ist eine* ungerade *Funktion und* $\cos x$ *ist eine* gerade *Funktion.*

(iii) $\cos 0 = 1$, $\sin 0 = 0$ *und* $\lim_{x\to 0}(\sin x/x) = 1$.

(iv) *Es gelten die* Additionstheoreme*:*

$$\begin{aligned} \sin(x+y) &= \sin x \cos y + \cos x \sin y \\ \cos(x+y) &= \cos x \cos y - \sin x \sin y \end{aligned}$$

für alle $x, y \in \mathbb{R}$.

Corollar 6.38
Es gelten für alle $x, y \in \mathbb{R}$*:*

(i) $-1 \le \sin x \le 1$ *und* $-1 \le \cos x \le 1$

(ii) $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

(iii) $\sin(x+2k\pi) = \sin x$ *und* $\cos(x+2k\pi) = \cos x$ *für alle* $k \in \mathbb{Z}$*, d.h.* sin *und* cos *sind* 2π-periodisch

(iv) $\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi$ *für ein* $k \in \mathbb{Z}$
$\cos x = 0 \Leftrightarrow x = (2k+1)\pi/2$ *für ein* $k \in \mathbb{Z}$

(v) $\sin(x+(\pi/2)) = \cos x$ *und* $\cos(x-(\pi/2)) = \sin x$

(vi) $\sin x + \sin y = 2\sin[(x+y)/2]\cos[(x-y)/2]$
$\sin x - \sin y = 2\sin[(x-y)/2]\cos[(x+y)/2]$
$\cos x + \cos y = 2\cos[(x+y)/2]\cos[(x-y)/2]$
$\cos x - \cos y = -2\sin[(x+y)/2]\sin[(x-y)/2]$

(vii) $\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1$
$\sin(2x) = 2\sin x \cos x$
$1 + \cos x = 2\cos^2(x/2)$
$1 - \cos x = 2\sin^2(x/2)$

Definition 6.39
Wir setzen

$$\begin{aligned} \tan x &:= \frac{\sin x}{\cos x}, \quad x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}, \\ \cot x &:= \frac{\cos x}{\sin x}, \quad x \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Corollar 6.40 [Eigenschaften des Tangens und Cotangens]
Für alle $x, y \in \mathbb{R}$, für die die folgenden Ausdrücke definiert sind, gelten die Eigenschaften:

(i) $\tan(-x) = -\tan x$ *und* $\cot(-x) = -\cot x$*, d.h.* tan *und* cot *sind ungerade*

(ii) $\tan(x+\pi) = \tan x$ *und* $\cot(x+\pi) = \cot x$*, d.h.* tan *und* cot *sind π-periodisch*

(iii) (Additionstheorem für den Tangens)

$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$$

Werte der trigonometrischen Funktionen					
Winkel	Bogen	sin	cos	tan	cot
0°	0	0	1	0	$\mp\infty$
30°	$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$
45°	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	1	1
60°	$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$
90°	$\frac{1}{2}\pi$	1	0	$\pm\infty$	0

Kapitel 7

Differentiation

Der Begriff der Ableitung einer Funktion spielt eine entscheidende Rolle bei der Formulierung von Naturgesetzen (Newtons Bewegungsgleichungen), zeitlich veränderlichen Phänomenen in der Biologie und Chemie (Wachstumsraten und Reaktionsgeschwindigkeiten) und bei globalen Entwicklungen in der Ökonomie und Soziologie (Bevölkerungsentwicklung). Der Definition der Ableitung einer reellen Funktion über Grenzwerte von Differenzenquotienten wird hier ihre geometrischen Bedeutung als Tangentensteigung an den Graphen der Funktion und die analytische Interpretation als lineare Approximation einer nichtlinearen Funktion gegenübergestellt. Diese Interpretation bildet auch die Grundlage allgemeiner Ableitungsbegriffe der mehrdimensionalen Analysis, der Differentialgeometrie und der für die theoretische Physik so wichtigen Funktionalanalysis, wo es nicht mehr um Funktionen sondern um allgemeinere Funktionale und Operatoren geht.
Nach einigen grundlegenden Beispielen, bei denen angelehnt an die Definition (Definition 7.1) die Ableitungen bestimmt werden, werden praktische Rechenregeln (Satz 7.7) hergeleitet, die die Berechnung der Ableitungen von komplizierteren Funktionen erleichtern. Dabei sind besonders die Produktregel und die Kettenregel (Satz 7.11) sowie der Satz über die Ableitung der Umkehrfunktion (Satz 7.37) wichtig. Der vom mathematischen Gesichtspunkt her zentrale Mittelwertsatz, Satz 7.19, erlaubt die Herleitung von Kriterien für die qualitative Beschreibung von Funktionen mit Hilfe ihrer Ableitungen (Extremwerte, Monotonie, Konvexität, Asymptotik).

Im Folgenden sei $I := (a,b)$ stets ein offenes Intervall mit $-\infty \leq a < b \leq \infty$.

Definition 7.1
(i) Eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ heißt in $x_0 \in I$ *differenzierbar* $:\Leftrightarrow$

$$f'(x_0) := \lim_{h\to 0} \Delta_h f(x_0) := \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\{f(x_0+h) - f(x_0)\} < \infty,$$

d.h. der Grenzwert der *Differenzenquotienten* $\Delta_h f(x_0)$ für $h \to 0$ an der Stelle x_0 soll existieren und endlich sein.

(ii) $f : I \to \mathbb{R}$ heißt *auf I differenzierbar* $:\Leftrightarrow$ $f'(x)$ existiert und ist endlich für alle $x \in I$. Die Funktion $x \mapsto f'(x)$ heißt *Ableitung* von f, und man schreibt

$$f' \quad \left(= \frac{df}{dx} = \frac{d}{dx} f\right) : I \to \mathbb{R}.$$

(iii) Falls $f, f' \in C^0(I)$, dann schreiben wir $f \in C^1(I)$.

Bemerkung. (i) Der Wert der Ableitung $f'(x_0)$ einer Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ ist identisch mit der Steigung der *Tangenten* an dem Graphen von f in dem Punkt $(x_0, f(x_0)) \in \mathbb{R}^2$. Die zugehörige Tangentengleichung ist

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

(ii) Mit Hilfe der Ableitung $f'(x_0)$ einer Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ findet man die beste *lineare Approximation* $g(x) := m(x - x_0) + f(x_0)$ an den Graphen von f durch den Punkt $(x_0, f(x_0))$. Tatsächlich liefert die Wahl $m := f'(x_0)$ für die Geradensteigung von g, dass der relative Fehler

$$\frac{f(x) - g(x)}{x - x_0}$$

gegen Null konvergiert, falls $x \to x_0$. Wir schreiben auch mit $h := x - x_0$

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + o(h) \text{ für } h \to 0,$$

was bedeutet, dass der Term

$$r(x_0, h) := f(x_0 + h) - f(x_0) - f'(x_0)h$$

die Beziehung

$$\lim_{h \to 0} \frac{r(x_0, h)}{h} = 0$$

erfüllt, vgl. Definition 7.3.

Definition 7.3 [Landausche Symbole]
Für $f : I \to \mathbb{R}$ und $g : I \to \mathbb{R}$ schreiben wir

(i)

$$f(x) = O(g(x)) \text{ für } x \to x_0,$$

$:\Leftrightarrow$

$$\exists\, C \geq 0, \delta > 0 : |f(x)| \leq C|g(x)| \quad \forall\, |x - x_0| \leq \delta.$$

(ii)

$$f(x) = o(g(x)) \text{ für } x \to x_0,$$

$:\Leftrightarrow$

$$\forall\, \epsilon > 0\, \exists\, \delta(\epsilon) > 0 : |f(x)| \leq \epsilon|g(x)| \quad \forall\, |x - x_0| \leq \delta.$$

Bemerkung. Physikalisch ist die Ableitung eng mit dem Geschwindigkeitsbegriff gekoppelt. Wenn $s = s(t)$ die in der Zeit t zurückgelegt Strecke eines Massenpunktes bei geradliniger Bewegung bezeichnet, so errechnet sich die *Momentangeschwindigkeit* $v(t_0)$ des Massenpunktes zum Zeitpunkt $t = t_0$ durch

$$\begin{aligned} v(t_0) &= \lim_{h \to 0} \Delta_h s(t_0) \\ &= s'(t_0) \quad \left(\frac{d}{dt} s|_{t=t_0} = \dot{s}(t_0)\right). \end{aligned}$$

Genauso kann man Wachstumsgeschwindigkeiten in der Biologie, Zerfallsgeschwindigkeiten in der Atomphysik oder Reaktionsgeschwindigkeiten in der Chemie definieren und berechnen.

Lemma 7.5 [Differenzierbarkeit $\Rightarrow$ Stetigkeit]
Falls $f'(x_0)$ für $x_0 \in I$ existiert, dann ist $f : I \to \mathbb{R}$ stetig in x_0. Es gilt also für $f : I \to \mathbb{R}$ mit $f' \in C^0(I)$ automatisch $f \in C^1(I)$.

Satz 7.7 [Differentiationsregeln]
Wenn die Funktionen $f, g : I \to \mathbb{R}$ in $x \in I$ differenzierbar sind, dann gilt:

(i) $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$

(ii) $(cf)'(x) = cf'(x) \quad \forall\, c \in \mathbb{R}$

(iii) $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ [Produktregel]

(iv)
$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)},$$
falls $g(x) \neq 0$ [Quotientenregel]. *Speziell gilt*
$$\left(\frac{1}{g}\right)'(x) = -\frac{g'(x)}{g^2(x)},$$
falls $g(x) \neq 0$.

Satz 7.9 [Ableitung trigonometrischer Funktionen]
Die Funktionen sin *und* cos *sind von der Klasse $C^1(\mathbb{R})$, und es gilt*

$$\begin{aligned}
(\sin x)' &= \cos x \\
(\cos x)' &= -\sin x \\
(\tan x)' &= 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} \text{ für } x \neq (2k+1)\pi/2, \quad k \in \mathbb{Z} \\
(\cot x)' &= -(1 + \cot^2 x) = -\frac{1}{\sin^2 x} \text{ für } x \neq k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

Satz 7.11 [Kettenregel]
Für $f : I \to \mathbb{R}$, $g : (c,d) \to \mathbb{R}$, $-\infty \le c < d \le \infty$, mit $\mathscr{W}(f) \subset (c,d)$, so dass f differenzierbar in $x_0 \in I$ und g differenzierbar in $y_0 := f(x_0)$ ist, ist die Verkettung $g \circ f : I \to \mathbb{R}$ in x_0 differenzierbar, und es gilt

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0).$$

Definition 7.13 [Höhere Ableitungen]
Sei $n \in \mathbb{N}$, $f : I \to \mathbb{R}$ und $x_0 \in I$.
(i) f heißt in x_0 *n-mal differenzierbar* $:\Leftrightarrow$

$$f^{(n)}(x_0) := \lim_{h\to 0} \Delta_h f^{(n-1)}(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\{f^{(n-1)}(x_0+h) - f^{(n-1)}(x_0)\} < \infty,$$

wobei $f^{(1)} := f'$. Man schreibt entsprechend auch $f'' := f^{(2)}$, $f''' := f^{(3)}$ usw.

(ii) f heißt auf I n-mal differenzierbar $:\Leftrightarrow$ $f^{(n)}(x)$ existiert und ist endlich für alle $x \in I$. Die Funktion $x \mapsto f^{(n)}(x)$ heißt die *n-te Ableitung* von f, und wir schreiben

$$f^{(n)} \quad \left(= \frac{d^n}{dx^n} f = \frac{d^n f}{dx^n}\right) : I \to \mathbb{R}.$$

(iii) Falls $f^{(n)}, f^{(n-1)}, f^{(n-2)}, \dots, f''', f'', f', f \in C^0(I)$, dann schreiben wir $f \in C^n(I)$. (Nach Lemma 7.5 folgt bereits aus $f^{(n)} \in C^0(I)$, dass $f \in C^n(I)$.)

(iv) f heißt *glatt* auf I $:\Leftrightarrow$ $f \in C^n(I)\ \forall\, n \in \mathbb{N}$, und wir schreiben in dem Fall $f \in C^\infty(I)$.

Definition 7.15
Sei $f : I \to \mathbb{R}$.

(i) $x_0 \in I$ heißt *lokale Maximalstelle* (oder *relative Maximalstelle*) und $f(x_0)$ ein *lokales Maximum* (oder *relatives Maximum*) von $f :\Longleftrightarrow$

$$\exists\, \epsilon > 0 : f(x) \le f(x_0) \quad \forall\, x \in B_\epsilon(x_0) \cap I.$$

(ii) $x_0 \in I$ heißt *globale Maximalstelle* und $f(x_0)$ ein *globales Maximum* von $f :\Longleftrightarrow$

$$f(x) \le f(x_0) \quad \forall\, x \in I.$$

(iii) Entsprechend definiert man *lokale Minima* und *globale Minima*. Ist $f(x_0)$ (ein lokales oder globales) Maximum oder Minimum, so ist x_0 eine *Extremalstelle* und $f(x_0)$ ein *Extremum* von f.

Satz 7.16 [Extremalstelle x_0 von $f \Rightarrow f'(x_0) = 0$]
Falls $x_0 \in I$ eine lokale Extremalstelle einer in I differenzierbaren Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ ist, dann gilt

$$f'(x_0) = 0.$$

Definition 7.17
Alle $x \in I$ mit $f'(x) = 0$ nennt man *stationäre Punkte* oder *kritische Punkte* von f.

Bemerkung. Mögliche Extremalstellen einer Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ sind:

1. die Endpunkte a oder b,
2. Punkte $x_0 \in I$, wo f nicht differenzierbar ist,
3. Punkte $x \in I$, wo $f'(x) = 0$.

Satz 7.19 [Mittelwertsatz]
Für eine Funktion $f \in C^0([a,b])$, die differenzierbar in (a,b) ist, gibt es (mindestens) ein $x_0 \in (a,b)$ mit

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b-a}.$$

Satz 7.20 [Monotoniekriterien]
Für eine auf I differenzierbare Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ gilt

(i) $f' > 0$ *auf* $I \quad \Rightarrow \quad f$ *streng monoton wachsend auf* I

(ii) $f' < 0$ *auf* $I \quad \Rightarrow \quad f$ *streng monoton fallend auf* I

(iii) $f' \geq 0$ *auf* $I \quad \Leftrightarrow \quad f$ *monoton wachsend auf* I

(iv) $f' \leq 0$ *auf* $I \quad \Leftrightarrow \quad f$ *monoton fallend auf* I

(v) $f' \equiv 0$ *auf* $I \quad \Leftrightarrow \quad f$ *konstant auf* I.

Corollar 7.21 [Integrationskonstanten]
Für differenzierbare Funktionen $f, g : I \to \mathbb{R}$ gilt:

$$f' = g' \text{ auf } I \quad \Leftrightarrow \quad \exists\, c \in \mathbb{R} : f(x) = g(x) + c \;\forall\, x \in I.$$

Corollar 7.23 [Extremwerttest über erste Ableitung]
Sei $f : I \to \mathbb{R}$ differenzierbar mit $f'(x_0) = 0$ für ein $x_0 \in I$. Dann gilt:

(i) *$f(x_0)$ ist genau dann ein lokales Maximum, wenn ein $\epsilon > 0$ existiert mit*

$$\begin{aligned} f' &\geq 0 \qquad \text{auf } (x_0 - \epsilon, x_0) \text{ und} \\ f' &\leq 0 \qquad \text{auf } (x_0, x_0 + \epsilon). \end{aligned}$$

(ii) *$f(x_0)$ ist genau dann ein lokales Minimum, wenn ein $\epsilon > 0$ existiert mit*

$$\begin{aligned} f' &\leq 0 \qquad \text{auf } (x_0 - \epsilon, x_0) \text{ und} \\ f' &\geq 0 \qquad \text{auf } (x_0, x_0 + \epsilon). \end{aligned}$$

Corollar 7.25 [Extremwerttest über zweite Ableitung]
Für $f \in C^2(I)$ mit $f'(x_0) = 0$ für ein $x_0 \in I$ gilt:

(i) $f''(x_0) < 0 \quad \Rightarrow \quad f(x_0)$ *ist ein lokales Maximum.*

(ii) $f''(x_0) > 0 \quad \Rightarrow \quad f(x_0)$ *ist ein lokales Minimum.*

Definition 7.27

(i) Eine Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ heißt *konvex* $:\Longleftrightarrow$

$$f(tx + (1-t)y) \le t f(x) + (1-t) f(y) \quad \forall\, x, y \in [a,b], t \in [0,1].$$

(ii) Eine Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ heißt *strikt konvex* $:\Longleftrightarrow$

$$f(tx + (1-t)y) < t f(x) + (1-t) f(y) \quad \forall\, x, y \in [a,b], x \ne y, t \in (0,1).$$

(iii) Eine Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ heißt (strikt) *konkav* $:\Longleftrightarrow -f$ ist (strikt) konvex.

Satz 7.29 [Konvexitätskriterien] (i) *Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und in (a,b) differenzierbar. Dann gilt*

$$f \quad \text{konvex} \quad \Longleftrightarrow \quad f' \quad \text{auf } (a,b) \text{ monoton wachsend.}$$

(ii) *Sei $f \in C^2((a,b))$. Dann gilt*

$$f \quad \text{konvex} \quad \Longleftrightarrow \quad f'' \ge 0 \ \textit{in} \ (a,b).$$

(iii) *Falls $f \in C^2((a,b))$ und $f'' > 0$* [oder *f auf $[a,b]$ stetig, in (a,b) differenzierbar und f' streng monoton wachsend*]*, dann ist f strikt konvex.*

Definition 7.31
$x_0 \in (a,b)$ heißt *Wendepunkt* einer Funktion $f : (a,b) \to \mathbb{R} :\Longleftrightarrow$

$$\begin{array}{rlllll} & \exists\, \epsilon > 0: & f|_{[x_0-\epsilon,x_0]} & \text{konvex und} & f|_{[x_0,x_0+\epsilon]} & \text{konkav.} \\ \text{oder} & \exists\, \epsilon > 0: & f|_{[x_0-\epsilon,x_0]} & \text{konkav und} & f|_{[x_0,x_0+\epsilon]} & \text{konvex.} \end{array}$$

Bemerkung. Kandidaten für Wendepunkte einer Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ sind damit $x_0 \in I$ mit $f''(x_0) = 0$, oder wo die zweite Ableitung $f''(x_0)$ *nicht* existiert. (Randpunkte sind nach Definition keine Wendepunkte!)

Satz 7.32 [Wendepunktkriterien] (i) *Sei $f \in C^3((a,b))$, $x_0 \in (a,b)$, $f''(x_0) = 0$ und $f'''(x_0) \neq 0$. Dann ist x_0 ein Wendepunkt von f.*

(ii) *Sei $f \in C^2((a,b))$, $x_0 \in (a,b)$, $f''(x_0) = 0$. Dann ist x_0 genau dann ein Wendepunkt, wenn es ein $\epsilon > 0$ gibt, so dass*

$$f'' \geq 0 \text{ auf } (x_0-\epsilon, x_0) \text{ und } f'' \leq 0 \text{ auf } (x_0, x_0+\epsilon),$$

oder

$$f'' \leq 0 \text{ auf } (x_0-\epsilon, x_0) \text{ und } f'' \geq 0 \text{ auf } (x_0, x_0+\epsilon).$$

Satz 7.34 [Verallgemeinerter Mittelwertsatz]
Für Funktionen $f,g \in C^0([a,b])$, die differenzierbar in (a,b) sind, mit $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in (a,b)$, gibt es (mindestens) ein $x_0 \in (a,b)$ mit

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}.$$

Satz 7.35 [L'Hospital]
Seien $f,g : (a,b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar, $-\infty \leq a < b \leq \infty$, mit

(i) *$f(x) \to 0$ und $g(x) \to 0$ für $x \nearrow b$, oder $f(x) \to \infty$ und $g(x) \to \infty$ für $x \nearrow b$,*

(ii) *$g'(x) \neq 0$ fuer alle $x \in (a,b)$,*

(iii) *$f'(x)/g'(x) \to L \in [-\infty,\infty]$ für $x \nearrow b$.*

Dann gilt

$$\lim_{x \nearrow b} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \nearrow b} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L.$$

Entsprechende Aussagen gelten für den Grenzübergang $x \searrow a$ sowie für einen (beidseitigen) Grenzübergang $x \to c$ gegen einen inneren Punkt $c \in (a,b)$.

Bemerkung. [Iterierte Anwendung des Satzes von L'Hospital]
Wenn im Fall $x \nearrow b$ die drei Bedingungen

- $f^{(j)}(x) \to 0$ und $g^{(j)}(x) \to 0$ für alle $j = 0,1,\ldots,k-1$
  oder $f^{(j)}(x) \to \infty$ und $g^{(j)}(x) \to \infty$ für alle $j = 0,1,\ldots,k-1$,
- $g^{(k)}(x) \neq 0$ für alle x nahe b,
- $f^{(k)}(x)/g^{(k)}(x) \to L \in [-\infty,\infty]$

erfuellt sind, dann hat man

$$\lim_{x \nearrow b} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \nearrow b} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \nearrow b} \frac{f''(x)}{g''(x)} = \cdots = \lim_{x \nearrow b} \frac{f^{(k)}(x)}{g^{(k)}(x)} = L.$$

Entsprechendes gilt wieder fuer $x \searrow a$ bzw. $x \to c$.

Satz 7.37 [Ableitung der Umkehrfunktion]
Sei $f \in C^0([a,b])$ streng monoton mit $\mathscr{W}(f) = [c,d]$ und in $x_0 \in (a,b)$ differenzierbar mit $f'(x_0) \neq 0$. Dann ist die Umkehrfunktion $g = f^{-1} : [c,d] \to \mathbb{R}$ in $y_0 := f(x_0)$ differenzierbar, und es gilt

$$g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(g(y_0))}. \tag{7.1}$$

Bemerkung. (i) Wäre g schon als differenzierbar in Satz 7.37 vorausgesetzt, dann könnte man einfach die Relation

$$x = g(f(x))$$

nach x differenzieren, um unter Benutzung der Kettenregel (Satz 7.11)

$$1 = g'(f(x))f'(x)$$

und damit (7.1) zu erhalten.

(ii) Falls $f \in C^0([a,b]) \cap C^1((a,b))$ und $f' \neq 0$ auf (a,b), dann erhält man $g \in C^0([c,d]) \cap C^1((c,d))$.

Kapitel 8

Integration

Das Gegenstück zur Differentiation bildet die Integration, mit deren Hilfe man aus der Ableitung f' die ursprüngliche Funktion (bis auf Integrationskonstante) rekonstruieren kann. Dabei wird das (Riemannsche) Integral zunächst über approximierende Summen definiert, bevor einfach Integrationsregeln das Berechnen von bestimmten Integralen erleichtern. Die Integration bildet die Grundlage für Flächenberechnungen, Kurvenlängenbestimmung und die Berechnung von Potentialen, Momenten und anderen geometrischen und physikalischen Größen. Hier sollen die grundlegenden Hilfsmittel bereitgestellt werden, um die Integrale auch komplizierterer Funktionen – wenn möglich – zu berechnen.

Im Folgenden sei $I := (a,b)$ stets ein offenes Intervall mit $-\infty < a < b < \infty$.

Definition 8.1
Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stückweise stetig, d.h. f sei an höchstens endlich vielen Stellen unstetig und es existieren die rechts- und linksseitigen Grenzwerte an diesen Unstetigkeitsstellen. Dann heißt die Zahl

$$\int_a^b f(x)\,dx := \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) \tag{8.1}$$

für beliebige Unterteilungen $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$ und beliebige Zwischenpunkte $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ mit der Eigenschaft

$$\max_{i\in\{1,\ldots,n\}} |x_i - x_{i-1}| \longrightarrow 0 \text{ für } n \to \infty, \tag{8.2}$$

das *besimmte Integral von f über* $[a,b]$. Die Randpunkte a, b heißen *Integrationsgrenzen*, die Variable x in (8.1) nennt man die *Integrationsvariable*, deren Bezeichnung kann beliebig gewählt werden, z.B. ist

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt.$$

Bemerkung. 1. Es gilt

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0 \text{ und } \int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx \text{ für alle } a < b.$$

2. Dass der in (8.1) rechts stehende Grenzwert unter der Bedingung (8.2) tatsächlich existiert und (abgesehen von Bedingung (8.2)) *unabhängig* von der Wahl der x_i, ξ_i ist, ist beweisbedürftig.

3. Das bestimmte Integral

$$\int_a^b f(z)\,dz$$

definiert den orientierten Flächeninhalt zwischen dem Graphen der Funktion und der x-Achse.

Satz 8.3 [Elementare Integrationsregeln und Abschätzungen]
Seien $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ stückweise stetig. Dann gilt

(i)
$$\int_a^b [\alpha f(x) + \beta g(x)]\,dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx + \beta \int_a^b g(x)\,dx \text{ für alle } \alpha, \beta \in \mathbb{R},$$

(ii)
$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx \text{ für alle } c \in \mathbb{R},$$

(iii) *$f(x) \le g(x)$ fuer alle $a \le x \le b$ impliziert*
$$\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx,$$

(iv) *$m \le f(x) \le M$ fuer alle $a \le x \le b$ impliziert*
$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le M(b-a),$$

(v)
$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \le \int_a^b |f(x)|\,dx \text{ für } a \le b.$$

Satz 8.4 [Mittelwertsatz der Integralrechnung]
Seien $f \in C^0([a,b])$ und $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ stückweise stetig und $g \ge 0$ auf $[a,b]$. Dann existiert mindestens ein $\xi \in [a,b]$ mit
$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(\xi) \int_a^b g(x)\,dx.$$
Speziell gilt für $g \equiv 1$: Es gibt ein $x_0 \in [a,b]$ mit
$$\int_a^b f(x)\,dx = f(x_0)(b-a).$$

Definition 8.5
Eine auf einem Intervall I differenzierbare Funktion F heißt *Stammfunktion* von f

$$:\Longleftrightarrow \qquad F'(x) = f(x) \text{ für alle } x \in I.$$

Satz 8.6 [Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung]
Sei $f \in C^0(I)$, $a, b \in I$. Dann gilt

(i)
$$\frac{d}{dx}\left(\int_a^x f(t)\,dt\right) = f(x) \textit{ für alle } x \in I.$$

Jede andere Stammfunktion F von f hat die Form

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt + c \textit{ für } c \in \mathbb{R}.$$

(ii)
$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) =: \big[F(x)\big]_a^b$$

für alle Stammfunktionen F von f.

Definition 8.7
Die Menge

$$\int f(x)\,dx := \{F : I \to \mathbb{R} \quad \text{differenzierbar mit } F' = f \text{ auf } I\}$$

heißt *unbestimmtes Integral* von f.

Folglich kann man ein Integral berechnen, wenn man eine Stammfunktion kennt. Weiterhin erhaelt man aus einer Differentationsformel $F' = f$ sofort, dass F Stammfunktion von f ist.

Das unbestimmte Integral wird durch *eine* Stammfunktion bereits vollstaendig charakterisiert, da es genau alle Funktionen enthaelt, deren Differenz zu dieser Stammfunktion konstant ist.

$F(x)$	$F'(x) = f(x)$	$\int f(x)dx = F(x) + c$	Bemerkung
$\frac{1}{n+1}x^{n+1}$	x^n	$\int x^n dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + c$	$n \neq -1$
$\log\|x\|$	$\frac{1}{x}$	$\int \frac{1}{x}dx = \log\|x\| + c$	$x \neq 0$
$-\cos(x)$	$\sin(x)$	$\int \sin(x)dx = -\cos(x) + c$	
$\sin(x)$	$\cos(x)$	$\int \cos(x)dx = \sin(x) + c$	
$\tan(x)$	$\frac{1}{\cos^2(x)}$	$\int \frac{1}{\cos^2(x)}dx = \tan(x) + c$	$x \neq (2k+1)\pi$
$\cot(x)$	$-\frac{1}{\sin^2(x)}$	$\int \frac{1}{\sin^2(x)}dx = -\cot(x) + c$	$x \neq 2k\pi$
$\arcsin(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arcsin(x) + c$	$\|x\| < 1$
$\arctan(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\int \frac{1}{1+x^2}dx = \arctan(x) + c$	
$\frac{1}{2}\log\frac{1+x}{1-x}$	$\frac{1}{1-x^2}$	$\int \frac{1}{1-x^2}dx = \frac{1}{2}\log\frac{1+x}{1-x} + c$	$\|x\| < 1$
$\frac{1}{a}e^{ax}$	e^{ax}	$\int e^{ax}dx = \frac{1}{a}e^{ax} + c$	$a \neq 0$
$\cosh(x)$	$\sinh(x)$	$\int \sinh(x)dx = \cosh(x) + c$	
$\sinh(x)$	$\cosh(x)$	$\int \cosh(x)dx = \sinh(x) + c$	
$\log\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx = \log\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) + c$	
$\log\left\|x + \sqrt{x^2-1}\right\|$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}dx = \log\left\|x + \sqrt{x^2-1}\right\| + c$	$\|x\| > 1$

Satz 8.9 [Partielle Integration]
Für Funktionen $u, v \in C^1(I)$ und Stellen $a, b \in I$ gilt

$$\int_a^b u'(x)v(x)\,dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)\,dx.$$

Satz 8.11 [Substitutionsregel]
Für $g \in C^1(I)$ und $f \in C^0(B_\epsilon(\mathscr{W}(g)))$ für ein $\epsilon > 0$ gilt

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(t)\,dt.$$

Bemerkung. Die Integration einer rationalen Funktion $R(x)$ erfolgt in drei Schritten:

1. Eine Polynomdivision führt auf
$$R(x) = g(x) + \frac{P(x)}{Q(x)}$$
mit Polynomen g, P, Q, so dass P und Q keine gemeinsamen Faktoren haben und Grad $(P) <$ Grad (Q) gilt.

2. Eine Partialbruchzerlegung führt auf eine Summe einfacher rationaler Funktionen, deren Nenner entweder Linearfaktoren oder quadratische Terme in verschiedenen Potenzen sind, vgl. Seite 27.

3. Integration von g und den einzelnen Summanden der Partialbruchzerlegung liefert mit Satz 8.3 (i) das gesuchte Integral
$$\int R(x)\,dx.$$
Dabei treten verschiedene Integraltypen auf:
$$\int \frac{dx}{x-a} = \ln|x-a| + c, \tag{8.3}$$
$$\int \frac{dx}{(x-a)^k} = -\frac{1}{(k-1)(x-a)^{k-1}} + c \qquad \text{für } k>1, \tag{8.4}$$
$$\int \frac{dx}{x^2+px+q} = \frac{2}{\sqrt{4q-p^2}} \arctan \frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}} + c, \tag{8.5}$$
$$\begin{aligned}\int \frac{ax+b}{x^2+px+q}\,dx &= \frac{a}{2}\ln|x^2+px+q| \\ &\quad + \left(b - \frac{ap}{2}\right)\int \frac{dx}{x^2+px+q} + c,\end{aligned} \tag{8.6}$$
$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{(x^2+px+q)^k} &= \frac{2x+p}{(k-1)(4q-p^2)(x^2+px+q)^{k-1}} \\ &\quad + \frac{2(2k-3)}{(k-1)(4q-p^2)}\int \frac{dx}{(x^2+px+q)^{k-1}} + c, \qquad k>1,\end{aligned} \tag{8.7}$$
$$\begin{aligned}\int \frac{ax+b}{(x^2+px+q)^k}\,dx &= \frac{-a}{2(k-1)(x^2+px+q)^{k-1}} \\ &\quad + \left(b - \frac{ap}{2}\right)\int \frac{dx}{(x^2+px+q)^k} + c, \qquad k>1,\end{aligned} \tag{8.8}$$
wobei in (8.5)–(8.8) die Diskriminante $p^2 - 4q < 0$ ist.

Bemerkung. Ein Integral der Form

$$\int R(e^{ax})\,dx$$

lässt sich durch die Substitution $z := e^{ax}$ auf die Form

$$\int R(z)\frac{1}{az}\,dz$$

bringen und damit elementar integrieren.

Bemerkung. Ein Integral der Form

$$\int R(x, \sqrt[k]{\frac{ax+b}{cx+e}})\,dx, \qquad \text{für } ae-bc \neq 0,\, k \geq 2,$$

mit einer rationalen Funktion $R(\xi,\eta)$ *zweier* Variablen $\xi,\eta \in \mathbb{R}$ lässt sich durch die Substitution

$$z := \sqrt[k]{\frac{ax+b}{cx+e}}$$

auf die Form

$$\int R\left(\frac{ez^k-b}{a-cz^k}, z\right)\cdot\frac{k(ae-bc)z^{k-1}}{(a-cz^k)^2}\,dz$$

bringen und damit elementar integrieren.

Bemerkung. Ein Integral der Form

$$\int R(\cos x, \sin x)\,dx$$

wird durch die Substitution $u := \tan(x/2)$ in

$$\int R\left(\frac{1-u^2}{1+u^2}, \frac{2u}{1+u^2}\right)\cdot\frac{2}{1+u^2}\,du$$

überführt, und lässt sich damit elementar integrieren.

Bemerkung. Ein Integral der Form

$$\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\,dx, \qquad a \neq 0,$$

lässt sich mit einer geeigneten linearen Substitution $u = \alpha x + \beta$ auf eine der folgenden Formen bringen:

(i) $\int \tilde{R}(u, \sqrt{u^2+1})\,du$,

(ii) $\int \tilde{R}(u, \sqrt{u^2-1})\,du$,

(iii) $\int \tilde{R}(u, \sqrt{1-u^2})\,du$,

wobei $\tilde{R}(\xi,\eta)$ eine im Allgemeinen von $R(\xi,\eta)$ verschiedene rationale Funktion zweier Variablen $\xi,\eta \in \mathbb{R}$ ist.
Für (i) führt die Substitution $u =: \sinh t$ auf den Integranden $\tilde{R}(\sinh t, \cosh t)$. Für (ii) führt die Substitution $u =: \cosh t$ auf den Integranden $\tilde{R}(\cosh t, \sinh t)$. Für (iii) führt die Substitution $u =: \sin t$ auf den Integranden $\tilde{R}(\sin t, \cos t)$.

Definition 8.16
Die *hyperbolischen Funktionen Sinus hyperbolicus*, *Cosinus hyperbolicus*, *Tangens hyperbolicus*, *Cotangens hyperbolicus* sind folgendermaßen definiert:

$$\begin{aligned}
\sinh x &:= \frac{e^x - e^{-x}}{2} \\
\cosh x &:= \frac{e^x + e^{-x}}{2} \\
\tanh x &:= \frac{\sinh x}{\cosh x} \\
\coth x &:= \frac{\cosh x}{\sinh x}, \qquad x \neq 0.
\end{aligned}$$

Lemma 8.17 [Eigenschaften der hyperbolischen Funktionen]

(i) $\sinh' x = \cosh x$ *und* $\cosh' x = \sinh x$.

(ii) $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$.

(iii) (Additionstheorem)

$$\begin{aligned}
\sinh(x \pm y) &= \sinh x \cosh y \pm \cosh x \sinh y \\
\cosh(x \pm y) &= \cosh x \cosh y \pm \sinh x \sinh y.
\end{aligned}$$

Bemerkung. Ein Integral der Form

$$\int R(\cosh x, \sinh x)\, dx$$

wird durch die Substitution $u := \tanh(x/2)$ in

$$\int R\left(\frac{1+u^2}{1-u^2}, \frac{2u}{1-u^2}\right) \cdot \frac{2}{1-u^2}\, du$$

überführt, und lässt sich damit elementar integrieren.

Definition 8.19
(i) Für eine Funktion $f : [a,b) \to \mathbb{R}$, $b \in (-\infty, +\infty]$, die für alle $c \in (a,b)$ stückweise stetig auf dem Intervall $[a,c]$ ist, definieren wir das (nach oben) *uneigentliche Integral*

$$\int_a^b f(x)\,dx := \lim_{c \nearrow b} \int_a^c f(x)\,dx.$$

Entsprechend definiert man nach unten uneigentliche Integrale.

(ii) Für eine Funktion $f : (a,b) \to \mathbb{R}$, $a,b \in [-\infty, +\infty]$, die stückweise stetig auf (c_1, c_2) für alle $a < c_1 < c_2 < b$ ist, definiert man das *beidseitig uneigentliche Integral*

$$\int_a^b f(x)\,dx := \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx \tag{8.9}$$

für irgendein $c \in (a,b)$.

Man sagt, dass ein uneigentliches Integral *konvergiert*, wenn der zugehörige Grenzwert in $\mathbb{R}$ existiert, andernfalls heißt das uneigentliche Integral *divergent*.

Bemerkung. (i) Mit dieser Definition ist ein Integral erklärt, falls der Integrand $f(x)$ gegen $\pm\infty$ konvergiert für $x \to b$, oder falls z.B. $b = \infty$ als Integrationsgrenze vorkommt.

(ii) Für die Konvergenz des beidseitig uneigentlichen Integrals müssen beide Grenzwerte auf der rechten Seite von (8.9) *unabhängig* voneinander existieren.

Kapitel 9

Taylorreihen und Differentialgleichungen

Die Entwicklung einer genügend glatten Funktion in ihre Taylorreihe stellt ein wichtiges analytisches Instrument in den Natur- und Ingenieurwissenschaften dar, um Näherungsformeln für komplizierte Ausdrücke anzugeben. Oft werden in der Praxis nur wenige Terme einer solchen Reihenentwicklung benötigt, um eine vertretbare Genauigkeit zu erreichen. Daneben erleichtern solche Entwicklungen Grenzwertbetrachtungen, das Errechnen von nicht elementar bestimmbaren Integralen und eine approximative Lösung von nicht explizit integrierbaren gewöhnlichen Differentialgleichungen. Zum Abschluss dieses Kapitels werden einige explizite Lösungsmethoden für bestimmte Typen gewöhnlicher Differentialgleichungen angegeben.

Allgemein sei I ein offenes Intervall in $\mathbb{R}$.

Satz 9.1 [Taylor-Formel]
Für alle $f \in C^{n+1}(I)$, $x, a \in I$ gilt

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_{n+1}(x,a)$$

mit

$$\begin{aligned} R_{n+1}(x,a) &:= \frac{1}{n!}\int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt \qquad \text{Cauchy-Restglied} \\ &= \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \qquad \text{Lagrange-Restglied,} \end{aligned}$$

wobei ξ ein (nicht notwendig eindeutiger) von f, a und x abhaengender Wert aus (a,x) bzw. (x,a) ist.

Satz 9.3 [Polynome]
Falls für $f \in C^{n+1}(I)$ *die Identität* $f^{(n+1)}(x) = 0$ *für alle* $x \in I$ *gilt, dann ist* f *ein Polynom* P *mit* $\operatorname{Grad}(P) \leq n$.

Satz 9.4 [Extremwerttest]
Erfüllt $f \in C^n(I)$ *an der Stelle* $a \in I$ *fuer* $n \in \mathbb{N}$

$$f'(a) = f''(a) = \cdots = f^{(n-1)}(a) = 0, \quad \textit{und} \;\; f^{(n)}(a) \neq 0,$$

dann gilt

(i) a *ist Extremalstelle* $\Leftrightarrow$ n *gerade*

(ii) $f^{(n)}(a) < 0$ *und* n *gerade* $\Rightarrow$ a *ist lokale Maximalstelle,*
$f^{(n)}(a) > 0$ *und* n *gerade* $\Rightarrow$ a *ist lokale Minimalstelle.*

Definition 9.6
Für $f \in C^\infty(I)$, $a \in I$ heißt der Ausdruck

$$T_f(x,a) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

die *Taylorreihe* von f um a.

Ist $f(x) = T_f(x,a)$ für alle $x \in I$, dann sagt man, dass f durch seine Taylorreihe *dargestellt* wird und man nennt f *reell analytisch*.

Satz 9.8 [Funktion=Taylorreihe]
Für $f \in C^\infty(I)$, $a \in I$, gilt

$$f(x) = T_f(x,a) \quad \text{für alle } x \text{ mit } R_n(x,a) \to 0 \text{ für } n \to \infty.$$

Falls $A, B > 0$ existieren, so dass $|f^{(n)}(x)| \le AB^n$ für alle $x \in I$, $n \in \mathbb{N}$, dann gilt

$$f(x) = T_f(x,a) \quad \text{für alle } x \in I.$$

Lemma 9.9 [Polynome=Taylorreihe]
Für alle Polynome P_n, $a \in \mathbb{R}$ gilt

$$P_n(x) = T_{P_n}(x,a) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

$T_{P_n}(.,a)$ ist die einzige Potenzreihendarstellung für P_n um a.

Definition 9.11
Für $n \in \mathbb{N}$, $F : G \to \mathbb{R}$, $G \subset \mathbb{R}^{n+2}$, nennt man die Gleichung

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}, y^{(n)}) = 0$$

eine (gewöhnliche) *Differentialgleichung n-ter Ordnung*. Eine *Lösung* dieser Differentialgleichung auf einem offenen Intervall $I \subset \mathbb{R}$ ist eine auf I n-mal differenzierbare Funktion $y = y(x)$, so dass

$$F(x, y(x), y'(x), y''(x), \dots, y^{(n-1)}(x), y^{(n)}(x)) = 0 \quad \text{für alle } \ x \in I.$$

Eine solche Differentialgleichung heißt *explizit* , wenn die höchste Ableitung isoliert werden kann, d.h. falls

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}),$$

andernfalls heißt sie *implizit*.

Satz 9.13 [Separation der Variablen für $y' = f(x)g(y)$]
Seien $I, J \subset \mathbb{R}$ offene Intervalle, $f \in C^0(I)$, $g \in C^0(J)$ mit $g \neq 0$ auf J, $(x_0, y_0) \in I' \times J$ für ein Intervall $I' \subset I$ und für

$$F(x) := \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt \qquad G(y) := \int_{y_0}^{y} \frac{dt}{g(t)} \qquad \textit{für } \ (x, y) \in I \times J,$$

gelte $F(I') \subset G(J)$.
Dann existiert genau eine Lösung $\phi : I' \to \mathbb{R}$ der Differentialgleichung

$$\begin{cases} \phi'(x) = f(x)g(\phi(x)) & \textit{für } \ x \in I' \\ \phi(x_0) = y_0. \end{cases}$$

Es gilt

$$G(\phi(x)) = F(x) \textit{ für alle } \ x \in I'. \tag{9.1}$$

Definition 9.15
Für ein Intervall $I \subset \mathbb{R}$ und Funktionen $a, b \in C^0(I)$ nennt man die Differentialgleichung

$$y' = a(x)y + b(x), \qquad \text{für } \; x \in I$$

eine *lineare Differentialgleichung* 1. Ordnung. Sie heißt *homogen*, falls $b = 0$, sonst *inhomogen*.

Satz 9.16 [Homogene lineare Differentialgleichungen]
Für $x_0 \in I$, $c \in \mathbb{R}$ und $a \in C^0(I)$ gibt es genau eine Funktion $\phi : I \to \mathbb{R}$ mit

$$\begin{cases} \phi'(x) = a(x)\phi(x) \\ \phi(x_0) = c, \end{cases}$$

nämlich die Funktion

$$\phi(x) := c\, e^{\int_{x_0}^{x} a(t)\, dt}.$$

Satz 9.18 [Inhomogene lineare Differentialgleichung – Variation der Konstanten]
Für $x_0 \in I$, $c \in \mathbb{R}$ und $a, b \in C^0(I)$ gibt es genau eine Funktion $\psi : I \to \mathbb{R}$ mit

$$\begin{cases} \psi'(x) = a(x)\psi(x) + b(x) \\ \psi(x_0) = c, \end{cases}$$

nämlich die Funktion

$$\psi(x) := \left(c + \int_{x_0}^{x} b(t) e^{-\int_{x_0}^{t} a(z)\, dz}\, dt \right) e^{\int_{x_0}^{x} a(t)\, dt}.$$

Satz 9.20 **[**$y' = f(y/x) \mapsto z' = (f(z) - z)/x$**]**
Sei $f : J \to \mathbb{R}$, $J \subset \mathbb{R}$ *ein Intervall und*

$$G := \{(x, y) \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \times \mathbb{R} : y/x \in J\},$$

$I \subset \mathbb{R} \setminus \{0\}$, *und* $x_0 \in I$ *mit* $(x_0, y_0) \in G$. *Dann löst die Funktion* $\phi : I \to \mathbb{R}$ *die Differentialgleichung*

$$\begin{cases} \phi'(x) = f(\phi(x)/x) \\ \phi(x_0) = y_0 \end{cases} \tag{9.2}$$

genau dann, wenn die Funktion $\psi : I \to \mathbb{R}$, $\psi(x) := \phi(x)/x$, *die Differentialgleichung*

$$\begin{cases} \psi'(x) = [f(\psi(x)) - \psi(x)]/x \\ \psi(x_0) = y_0/x_0 \end{cases} \tag{9.3}$$

löst.

Kapitel 10

Mehrdimensionale Analysis – ein Ausblick

In diesem Kapitel werden wir einige Aspekte der mehrdimensionalen Analysis vorstellen, die naturgemäß gewisse Konzepte der linearen Algebra im $\mathbb{R}^n$ benötigt. Vektorwertige Funktionen ordnen also beispielsweise jedem Parameter $t \in \mathbb{R}$ einen Vektor $x(t) \in \mathbb{R}^n$ zu, was zu stetigen Raumkurven $t \mapsto x(t)$ führt, falls alle Komponenten $x^i(\cdot)$ des Vektors $x(\cdot)$ stetige Funktionen von t sind. Solche Raumkurven kann man häufig sogar differenzieren, was einfach komponentenweise geschieht. Komplizierter sind Ableitungsbegriffe allerdings, wenn der Parameter auch schon mehrdimensional ist, was bei der Formulierung von Naturgesetzen sehr häufig vorkommt, etwa wenn eine physikalische Größe von Temperatur, Dichte und Leitfähigkeit eines Materials abhängt. Die Begriffe der *partiellen Ableitung* und der *totalen Differenzierbarkeit* sind hier zentral. Wie im Eindimensionalen gibt es auch hier Differenzierbarkeitsregeln wie etwa die Kettenregel, oder die Entwicklung in (mehrdimensionale) Taylorreihen. Wir beschließen diesen Ausblick dann mit einigen Extremwerttests und verzichten damit auf die Darstellung einer Integrationstheorie im Mehrdimensionalen.

Definition 10.2
(i) Das *Skalarprodukt* zweier Vektoren

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \qquad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

ist gegeben durch

$$x \cdot y := \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

(ii) Der *Abstand* zweier Vektoren (oder zweier Punkte)

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \qquad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

ist gegeben durch

$$\|x-y\| := \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(y_i - x_i)^2} = \sqrt{(y-x)\cdot(y-x)}.$$

(iii) Zu $r > 0$ definieren wir den *offenen Ball* mit Radius r um den Punkt $x_0 \in \mathbb{R}^n$ durch

$$B_r(x_0) := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - x_0\| < r\}.$$

(iv) Die Menge $M \subset \mathbb{R}^n$ heißt *offen* $:\Leftrightarrow\ \forall\, x \in M\ \exists\, r = r(x) > 0 : B_r(x) \subset M$.
$M \subset \mathbb{R}^n$ heißt *abgeschlossen* $:\Leftrightarrow \mathbb{R}^n \setminus M$ ist offen.

(v) Sei $M \subset \mathbb{R}^n$, $f : M \to \mathbb{R}^m$. f besitzt am Punkt $x_0 \in M$ den *Grenzwert* $y_0 \in \mathbb{R}^m$, d.h.

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = y_0$$

$:\Leftrightarrow$

$$\forall\, \epsilon > 0\ \exists\, B_\delta(x_0) \subset \mathbb{R}^n : \qquad f(x) \in B_\epsilon(y_0) \subset \mathbb{R}^m \quad \forall\, x \in B_\delta(x_0) \setminus \{x_0\}.$$

(vi) Die Funktion $f : M \to \mathbb{R}^m$ heißt in $x_0 \in M$ *stetig* $:\Leftrightarrow$

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Die Funktion $f : M \to \mathbb{R}^m$ heißt (auf M) stetig $:\Leftrightarrow f$ ist stetig in $x_0 \in M$ für alle $x_0 \in M$.

Lemma 10.4 [Operationen mit stetigen Funktionen mehrerer Veränderlicher]
Seien $f, g : M \to \mathbb{R}^m$ in $x_0 \in M$ stetig. Dann gilt

(i) *Die Funktionen*

$$f + g : M \to \mathbb{R}^m \text{ und } f \cdot g = \sum_{i=1}^{m} f_i g_i : M \to \mathbb{R}$$

sind stetig in x_0.

(ii) *Für $m = 1$ und $g(x_0) \neq 0$ ist auch der Quotient f/g stetig in x_0.*

Definition 10.6
(i) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : \Omega \to \mathbb{R}$ und $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \Omega$. Dann heißt der Ausdruck

$$\begin{aligned} f_{x_i}(a) := \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) &:= \frac{d}{d\xi} f(a_1, \ldots, a_{i-1}, \xi, a_{i+1}, \ldots, a_n)|_{\xi = a_i} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{f(a_1, \ldots, a_{i-1}, a_i + h, a_{i+1}, \ldots, a_n) - f(a_1, \ldots, a_{i-1}, a_i, a_{i+1}, \ldots, a_n)}{h} \end{aligned}$$

die *partielle Ableitung* von f nach x_i (sofern der Grenzwert auf der rechten Seite existiert).

(ii) Der *Gradient* von f an der Stelle $a \in \Omega$ ist gegeben durch den Vektor

$$\nabla f(a) := \operatorname{grad} f(a) := \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) \\ \frac{\partial f}{\partial x_2}(a) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n.$$

(iii) Die Funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}$ heißt k-mal *partiell differenzierbar*, $k \in \mathbb{N}$,
$:\Leftrightarrow$ alle k-ten partiellen Ableitungen

$$f_{x_{i_1} \cdots x_{i_k}} = \frac{\partial^k}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_k}} f$$

existieren.
Sind alle diese Ableitungen stetig, dann heißt f k-mal *stetig partiell differenzierbar*, und wir schreiben

$$f \in C^k(\Omega, \mathbb{R}) = C^k(\Omega).$$

(iv) Ist für $f = (f^1, f^2, \ldots, f^m) : \Omega \to \mathbb{R}^m$ jede Komponente f^i, $i = 1, \ldots, m$ k-mal stetig partiell differenzierbar, dann schreiben wir

$$f \in C^k(\Omega, \mathbb{R}^m).$$

Die Matrix

$$Df(a) := \begin{pmatrix} \frac{\partial f^1}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f^1}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f^m}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f^m}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix} = \left(\nabla f^1(a), \nabla f^2(a), \cdots, \nabla f^m(a)\right)^T \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

heißt JACOBI*sche Matrix* oder *Funktionalmatrix* von $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^m)$ in $a \in \Omega$, während für $f \in C^2(\Omega, \mathbb{R}) = C^2(\Omega)$ die Matrix

$$D^2 f(a) := \begin{pmatrix} f_{x_1 x_1}(a) & \cdots & f_{x_1 x_n}(a) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{x_n x_1}(a) & \cdots & f_{x_n x_n}(a) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

die HESSE-*Matrix* von f in $a \in \Omega$ heißt.

Satz 10.8 [SCHWARZ]
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Dann gilt für alle $f \in C^2(\Omega)$

$$f_{x_i x_j} = f_{x_j x_i} \quad \textit{für alle } \ i, j = 1, \ldots, n.$$

Definition 10.9
(i) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Dann heißt $f : \Omega \to \mathbb{R}$ in $x_0 \in \Omega$ *total differenzierbar* $:\Leftrightarrow$ Es existiert ein Vektor $l \in \mathbb{R}^n$, so dass

$$f(x) = f(x_0) + l \cdot (x - x_0) + o(\|x - x_0\|) \quad \text{für } x \to x_0.$$

(ii) Für $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ heißt der Ausdruck

$$\frac{\partial f}{\partial v} := \partial_v f(x) := \lim_{t \to 0} \frac{f(x+tv) - f(x)}{t} = \frac{d}{dt} f(x+tv)$$

die *Richtungsableitung* von f an der Stelle x in Richtung v, sofern der Grenzwert existiert. (Achtung: Davon abweichend wird in der Literatur für die Richtungsableitung $\partial_v f$ oft zusätzlich die Eigenschaft $\|v\| = 1$ gefordert.)

Satz 10.10 [Differenzierbarkeitseigenschaften]
Ist f in $x_0 \in \Omega$ total differenzierbar im Sinne von Definition 10.9*, dann gilt*

(i) *f ist stetig in x_0*

(ii) $\partial_v f(x_0) = l \cdot v$ *für alle $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$*

(iii) *f ist partiell differenzierbar, und es gilt $\nabla f(x_0) = l$, und damit*

$$f(x) = f(x_0) + \nabla f(x_0) \cdot (x - x_0) + o(\|x - x_0\|) \quad \textit{für } x \to x_0$$

(iv) $\partial_v f(x_0) = \nabla f(x_0) \cdot v$ *für alle $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.*

Bemerkung. Geometrische Deutung. Für $n = 2$ liefert der Ausdruck

$$\begin{aligned} f(x,y) &= f(x_0,y_0) + \nabla f(x_0,y_0) \cdot ((x,y) - (x_0,y_0)) + o(\|(x,y) - (x_0,y_0)\|) \\ &= f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)(x - x_0) + f_y(x_0,y_0)(y - y_0) + o(\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}) \end{aligned}$$

die Approximation des Graphen der Funktion f nahe dem Graphenpunkt $(x_0, y_0, f(x_0,y_0))$ durch seine Tangentialebene im Punkt $(x_0, y_0, f(x_0,y_0))$ beschrieben durch den Ausdruck

$$z = f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)(x - x_0) + f_y(x_0,y_0)(y - y_0).$$

Satz 10.11 [totale Differenzierbarkeit]
Eine Funktion $f \in C^1(\Omega)$ ist auf Ω total differenzierbar.

Satz 10.13 [Kettenregel]
Für $f \in C^1(\Omega)$, $x \in C^1((a,b), \mathbb{R}^n)$ mit $x((a,b)) \subset \Omega$ gilt

$$\frac{d}{dt} f(x(t)) = \nabla f(x(t)) \cdot \dot{x}(t).$$

Definition 10.15
Eine Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ heißt *konvex* $:\Leftrightarrow$

$$\forall\, x,y \in \Omega : tx+(t-1)y \in \Omega \qquad \text{für alle } \; t \in [0,1].$$

Mit anderen Worten: mit je zwei Punkten aus Ω liegt auch deren Verbindungsstrecke in Ω.

Satz 10.16 [Taylor-Formel im Mehrdimensionalen]
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und konvex, $f \in C^{k+1}(\Omega)$, $x \in \Omega$ und $x+v \in \Omega$. Dann gilt:

$$f(x+v) = f(x) + \partial_v f(x) + \frac{1}{2!}\partial_v^2 f(x) + \cdots + \frac{1}{k!}\partial_v^k f(x) + \frac{1}{(k+1)!}\partial_v^{k+1} f(x+\xi_k v)$$

mit einer Zahl $\xi_k \in [0,1]$, wobei

$$\partial_v := \sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Speziell gilt für $x := x_0$ und $v := x-x_0$ und $k = 0,1,2$:

(i)
$$f(x) = f(x_0) + \nabla f(\tilde{x}) \cdot (x-x_0) \qquad \textit{mit } \; \tilde{x} \in [x_0,x] \quad \text{(Mittelwertsatz)}$$

(ii)
$$f(x) = f(x_0) + \nabla f(x_0)\cdot(x-x_0) + \frac{1}{2}(x-x_0)\cdot D^2 f(x^*)(x-x_0) \qquad \textit{mit } \; x^* \in [x_0,x]$$

(iii)
$$f(x) = f(x_0) + \nabla f(x_0)\cdot(x-x_0) + \frac{1}{2}(x-x_0)\cdot D^2 f(x_0)(x-x_0) + o(\|x-x_0\|^2),$$

wobei $[x_0,x]$ die Verbindungsstrecke von x_0 und x im $\mathbb{R}^n$ bezeichnet.

Bemerkung. Geometrische Deutung. 1. Für $n = 2$ liefert der Ausdruck

$$\begin{aligned} f(x,y) &= f(x_0,y_0) + \nabla f(x_0,y_0)\cdot((x,y)-(x_0,y_0)) \\ &\quad + \frac{1}{2}((x,y)-(x_0,y_0))\cdot D^2 f(x_0,y_0)((x,y)-(x_0,y_0)) + o(\|(x,y)-(x_0,y_0)\|^2) \end{aligned}$$

die Approximation des Graphen der Funktion f nahe dem Graphenpunkt $(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$ durch eine Fläche zweiter Ordnung, einer sogenannten *Quadrik* im Punkt $(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$ beschrieben durch den Ausdruck

$$\begin{aligned} z &= f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0) \\ &\quad + \frac{1}{2}((x,y)-(x_0,y_0))\cdot D^2 f(x_0,y_0)((x,y)-(x_0,y_0)). \end{aligned}$$

Die Klassifikation solcher Quadriken wird in der Linearen Algebra behandelt, siehe Skript der Linearen Algebra, Kapitel 6.

Definition 10.18
Sei $M \subset \mathbb{R}^n$. Ein Punkt $x_0 \in M$ heißt *lokale (relative) Maximalstelle* (bzw. *Minimalstelle*) $:\Leftrightarrow$

$$\exists\, r > 0 : f(x) \le f(x_0) \qquad (\text{bzw. } f(x) \ge f(x_0)) \quad \text{für alle } x \in B_r(x_0).$$

Falls $f(x) \le f(x_0)$ (bzw. $f(x) \ge f(x_0)$) für alle $x \in M$, so heißt x_0 *globale (absolute) Maximalstelle* (bzw. *Minimalstelle*). Die Zahl $f(x_0)$ nennt man dann ein *Maximum* (bzw. ein *Minimum*), in beiden Fällen ist $f(x_0)$ ein *Extremum* und die zugehörige Stelle x_0 heißt *Extremalstelle*.

Satz 10.19 [Notwendige Bedingung für Extremalstellen]
Für $f \in C^1(B_r(a))$ gilt:
a ist lokale Extremalstelle von $f \Rightarrow \nabla f(a) = 0$.

Satz 10.20 [Extremwerttest über $D^2 f$]
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f \in C^2(\Omega)$, $\nabla f(a) = 0$ für ein $a \in \Omega$. Dann gilt

(i) *$D^2 f(a)$ positiv definit $\Rightarrow f(a)$ is lokales Minimum*

(ii) *$D^2 f(a)$ negativ definit $\Rightarrow f(a)$ is lokales Maximum*

(iii) *$D^2 f(a)$ indefinit $\Rightarrow a$ ist keine Extremalstelle, d.h., a ist* Sattelpunkt.

Definition 10.21
$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ heißt *positiv definit* (bzw. *negativ definit*) $:\Leftrightarrow$

$$\xi \cdot A\xi > 0 \qquad (\text{bzw. } \xi \cdot A\xi < 0) \quad \forall\, \xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\},$$

andernfalls heißt A indefinit.

Bemerkung. Ein Satz aus der Linearen Algebra (vgl. Satz 6.35 im Skript zur Linearen Algebra) impliziert z.B. für $n = 2$:

$$\begin{aligned}
D^2 f(a) \quad \text{positiv definit} \quad &\Leftrightarrow \quad f_{xx}(a) > 0 \text{ und } \det D^2 f(a) = (f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2)(a) > 0,\\
D^2 f(a) \quad \text{negativ definit} \quad &\Leftrightarrow \quad f_{xx}(a) < 0 \text{ und } \det D^2 f(a) = (f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2)(a) > 0,\\
D^2 f(a) \quad \text{indefinit} \quad &\Leftrightarrow \quad \det D^2 f(a) = (f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2)(a) < 0.
\end{aligned}$$