3. Übung

Abgabetermin B-Teil 02.11.2018

Der B-Teil kann bis spätestens am **02.11.2018 um 12:30 Uhr** im Hauptgebäude in Raum 115 oder Raum 113 (Sekretariat) abgegeben werden. Die genaueren Bedingungen entnehmen Sie bitte dem Infozettel.

Deckblatt

Bitte tragen Sie Ihren/Ihre Namen und Matrikelnummer ein und kreuzen Sie in den folgenden Tabellen ihre Kleingruppe an. Drucken Sie diese Seite aus und benutzen Sie diese als Deckblatt für Ihre Abgabe.

Name:

Matrikelnummer:

Kleingruppe											
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

Mit der Abgabe versichere ich, dass ich die folgenden Aufgaben selbst erarbeitet habe und dass ich diese in meiner Kleingruppe vorstellen kann.

Aufgabe	B18	B19	B20	B21	B22
Punkte					

Teil A

Aufgabe A10

Sei A eine nicht-leere Teilmenge von $\mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass im Allgemeinen $\sup(\lfloor A\rfloor) = \lfloor \sup(A)\rfloor$ nicht gilt. Hierbei ist $\lfloor A\rfloor = \{\lfloor a\rfloor | a \in A\}$.

Aufgabe A11

Sei $A \subset \mathbb{R}$ und $x_0 \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass x_0 genau dann ein Häufungspunkt der Menge A ist, wenn für jedes $\epsilon > 0$ der Durchschnitt von A mit der ϵ-Umgebung $(x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon)$ unendlich viele Punkte enthält.

Aufgabe A12

Gegeben seien die Mengen $M_1 = \{\frac{1}{n} | n \in \mathbb{N}\}$ und $M_2 = M_1 \cup \{0\}$.

1. Beweisen oder widerlegen Sie: M_i beschränkt für $i = 1, 2$.
2. Beweisen oder widerlegen Sie: M_i abgeschlossen für $i = 1, 2$.

Aufgabe A13

Sei D eine nicht-leere Teilmenge von $\mathbb{R}$ und $a \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie: Ist a ein Häufungspunkt von D, so ist $\inf(\{|x-a| \, | x \in D\}) = 0$.

Teil B

Aufgabe B18
Zeigen Sie, dass für jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\sup(\{r \in \mathbb{Q} | r < x\}) = x$$

3 Punkte

Aufgabe B19

a) Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass jede endliche nicht-leere Teilmenge $A \subset \mathbb{R}$ immer ihr Maximum und Minimum annimmt.

b) Zeigen Sie, dass jede endliche Teilmenge $A \subset \mathbb{R}$ keine Häufungspunkte besitzt.

5 Punkte

Aufgabe B20
Beschreiben Sie die folgenden Teilmengen von $\mathbb{R}$ als Intervall oder als Vereinigung von Intervallen und bestimmen außerdem Supremum, Infimum und Maximum und Minumum, falls sie existieren.

a) $A := \{x \in \mathbb{R} | (x^2 + x - 2)(x - 2) < 0\}$

b) $B := \{x \in \mathbb{R} | 1 < x^2 \leq 4\}$

c) $C := \{\frac{1}{x} | x \in (0, 1]\}$

3 Punkte

Aufgabe B21

a) Welche der folgenden Mengen $M_1, .., M_5$ ist

(i) nach oben beschränkt,

(ii) nach unten beschränkt,

(iii) beschränkt?

Sie müssen Ihre Antworten nicht beweisen.

$$M_1 := \{x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} | \, |\frac{1}{x} - 1| < 1\}; \; M_2 := \{x \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} | x - \frac{1}{x} \leq 4\};$$
$$M_3 := \{x \in \mathbb{R} | \, |x + 1| - |x| < 1\}; \; M_4 := \{x \in \mathbb{R} | x^2 + 1 \geq 2x\}; \; M_5 := \{\frac{1}{z} | z \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\}$$

b) Beweisen Sie Ihre Antworten zu M_3 und bestimmen Sie $\sup(M_3)$ und $\inf(M_3)$, falls sie existieren.

5 Punkte

Aufgabe B22
Es seien A und B beschränkte Teilmengen von $\mathbb{R}$ mit A nicht-leer und $A \subset B$. Zeigen Sie, dass $\sup(A) \leq \sup(B)$ gilt.
Zeigen Sie weiter, dass die Gleichheit gilt, falls $\forall b \in B \exists a \in A : b \leq a$ erfüllt ist.
Zeigen Sie anhand eines Gegenbeispiels, dass die Umkehrung nicht gilt.

4 Punkte